BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR

SESSION 2024

Épreuve de mathématiques

GROUPEMENT B ***CODE : 24MATGRB4***

Durée : 3 heures

SPÉCIALITÉ	COEFFICIENT
Systèmes photoniques	3

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il soit complet.

Le sujet comporte 8 pages, numérotées de 1/8 à 8/8.

EXERCICE 1 (10 points)

On coule du béton pour faire une dalle. Au début, le béton est mou, puis, au fil du temps, il sèche, et devient plus résistant.

On note $f(t)$ la résistance du béton à l'instant t.
$f(t)$ est exprimée en mégapascal (MPa) et t désigne le nombre de jours de séchage.

Les trois parties peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A. Résolution d'une équation différentielle

On admet que la fonction f est solution de l'équation différentielle :

$$(E) : \quad y' + 0{,}06y = 2{,}1 \ ,$$

où y est une fonction inconnue de la variable réelle t, définie et dérivable sur $[\,0\,;\, +\infty\,[$, et où y' est la dérivée de y.

1. Résoudre sur $[0\,;+\infty\,[$ l'équation différentielle :

$$(E_0) : \ y' + 0{,}06y = 0$$

On fournit la formule suivante :

Équation différentielle	Solutions sur un intervalle I
$y' + ay = 0$	$y(t) = k\mathrm{e}^{-at}$

2. On considère la fonction constante g définie sur $[0\,;+\infty\,[$ par $g(t) = 35$.
Vérifier que la fonction g est solution de l'équation différentielle (E).

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4. À l'instant $t = 0$, on considère que la résistance du béton est nulle.
En déduire que la fonction f est définie sur $[0\,;+\infty\,[$ par : $f(t) = -35\mathrm{e}^{-0{,}06t} + 35$.

Partie B. Étude de fonction

On considère à nouveau la fonction f définie sur $[0\,;+\infty\,[$ par :

$$f(t) = -35\mathrm{e}^{-0{,}06t} + 35\,.$$

On rappelle que $f(t)$ désigne la résistance du béton, exprimée en mégapascal, à l'issue de t jours de séchage.

1. Quelle est la résistance du béton après 7 jours de séchage ? Après 72 heures ?
Arrondir au dixième.

2. On admet que la fonction f est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée. Vérifier que, pour tout réel t appartenant à $[0\,;+\infty\,[$, on a :

$$f'(t) = 2{,}1\mathrm{e}^{-0{,}06t}\,.$$

3. Déterminer le signe de $f'(t)$ sur $[0\,;+\infty[$ et en déduire le sens de variations de la fonction f sur $[0\,;\,+\infty[$.

4. Déterminer la limite de $f(t)$ lorsque t tend vers l'infini.
Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

5. Le fabricant du béton affirme que la résistance après 28 jours de séchage correspond à 80% de la résistance finale.

Cette affirmation est-elle juste ?

6. On considère la fonction F définie sur $[0\,;+\infty\,[$ par $F(t) = \left(\frac{1750}{3}\right)\mathrm{e}^{-0{,}06t} + 35t$.
Montrer que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

7. Déterminer une valeur approchée au dixième de la valeur moyenne de la résistance du béton sur les 28 premiers jours.

On fournit la formule suivante :

La valeur moyenne M d'une fonction h sur l'intervalle $[a\,;b]$ est définie par : $$M = \frac{1}{b-a}\int_a^b h(t)\mathrm{d}t\ .$$

Partie C. Algorithme

On note N le nombre entier correspondant au nombre minimal de jours de séchage permettant d'obtenir une résistance au moins égale à 21 MPa.

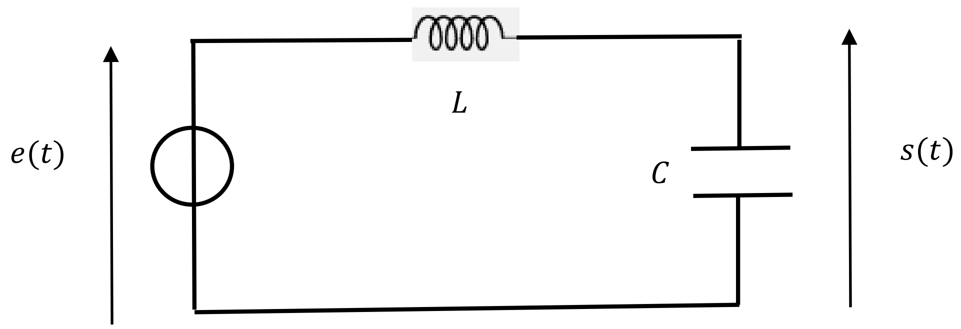
1. Recopier l'algorithme ci-dessous et compléter les lignes **3** et **4**.

Ligne 1	$t \leftarrow 0$
Ligne 2	$R \leftarrow 0$
Ligne 3	Tant que ……………
Ligne 4	$t \leftarrow$ ……….
Ligne 5	$R \leftarrow -35\mathrm{e}^{-0{,}06t} + 35$
Ligne 6	Fin Tant que

2. Donner la valeur de N. Expliquer la démarche suivie.

<u>EXERCICE 2</u> (10 points)

Un formulaire sur les transformées de Laplace est placé à la fin de l'exercice.



On considère un circuit LC.
Le signal d'entrée est noté $e(t)$. Le signal de sortie est noté $s(t)$.

Le système est régi par l'équation différentielle

$$(E) \ : \ LCs''(t) + s(t) = e(t).$$

Les conditions initiales sont : $s(0^+) = 0$ et $s'(0^+) = 0$.

1. On sait que $L = 10 \ H$ et $C = 10^{-5} \ F$.
Réécrire alors l'équation différentielle (E).

2. On suppose que :
La fonction $e(t)$ admet une transformée de Laplace notée $E(p)$.
La fonction $s(t)$ admet une transformée de Laplace notée $S(p)$.

Démontrer que l'on a : $(10^{-4}p^2 + 1)S(p) = E(p)$.

3. La fonction de transfert $H(p)$ est définie par : $S(p) = H(p) \times E(p)$.

Démontrer que l'on a :

$$H(p) = \frac{10^4}{p^2 + 10^4} \ .$$

4. On note $\mathcal{U}(t)$ la fonction échelon unité définie ainsi : $\begin{cases} \mathcal{U}(t) = 0 \ si \ t < 0 \, . \\ \mathcal{U}(t) = 1 \ si \ t \geq 0 \, . \end{cases}$

On suppose désormais que l'on a : $e(t) = 3\,\mathcal{U}(t)$.

Représenter graphiquement sur votre copie le signal $e(t)$ en prenant pour échelle 1 cm pour chaque axe.

5. Donner l'expression de $E(p)$.

6. À l'aide des questions précédentes, déterminer $S(p)$ puis démontrer que l'on a :

$$S(p) = \frac{3}{p} - \frac{3p}{p^2 + 10^4} .$$

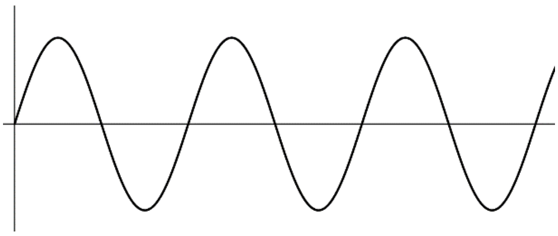
7. En déduire l'expression de $s(t)$.

8. On admet que l'on a :

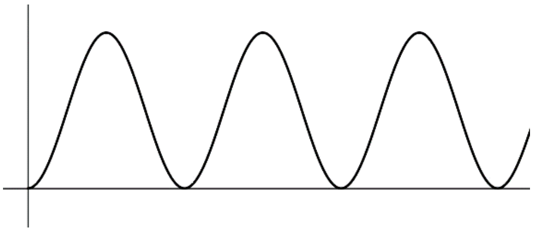
$$s(t) = 3\,\mathcal{U}(t)\,(1 - \cos(100t)).$$

Indiquer, sans justifier, lequel des croquis ci-dessous représente la courbe de la fonction $s(t)$.

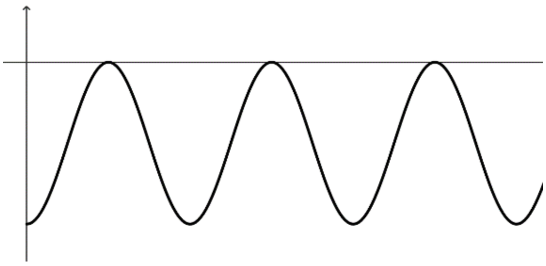
Croquis n°1



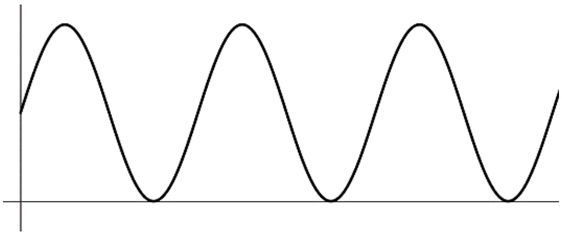
Croquis n°2



Croquis n°3



Croquis n°4



FORMULAIRE

Fonction	Transformée de Laplace
$t \mapsto \mathcal{U}(t)$	$p \mapsto \dfrac{1}{p}$
$t \mapsto t\mathcal{U}(t)$	$p \mapsto \dfrac{1}{p^2}$
$t \mapsto t^2\mathcal{U}(t)$	$p \mapsto \dfrac{2}{p^3}$
$t \mapsto \mathrm{e}^{-at}\mathcal{U}(t), a \in \mathbb{R}$	$p \mapsto \dfrac{1}{p+a}$
$t \mapsto \mathcal{U}(t-a), a \in \mathbb{R}$	$p \mapsto \dfrac{1}{p}\mathrm{e}^{-ap}$
$t \mapsto \sin(\omega \mathrm{t})\,\mathcal{U}(t), \omega \in \mathbb{R}$	$p \mapsto \dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$t \mapsto \cos(\omega \mathrm{t})\,\mathcal{U}(t), \omega \in \mathbb{R}$	$p \mapsto \dfrac{\mathrm{p}}{p^2+\omega^2}$
Dans ce qui suit, $f(t)$ est une fonction possédant une transformée de Laplace notée $F(p)$.	
$t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-at}\mathcal{U}(t), a \in \mathbb{R}$	$p \mapsto F(p+a)$
$t \mapsto f(t-a)\mathcal{U}(t-a), a \in \mathbb{R}$	$p \mapsto F(p)\mathrm{e}^{-ap}$
Si, de plus f est dérivable : $t \mapsto f'(t)\mathcal{U}(t)$	$pF(p) - f(0^+)$
Si, de plus f' est dérivable : $t \mapsto f''(t)\mathcal{U}(t)$	$p^2F(p) - pf(0^+) - f'(0^+)$

<u>EXERCICE 3</u> (6 points)

Une usine produit des ampoules pour voitures.

Partie A. Probabilités conditionnelles

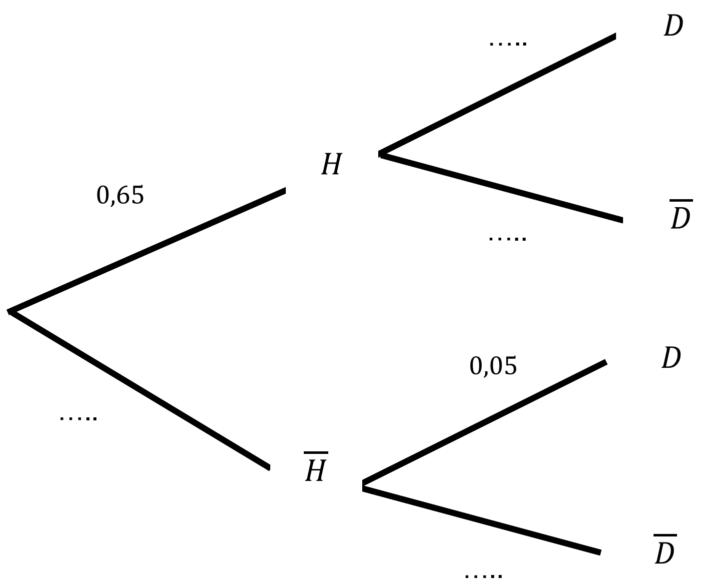
On dispose des données suivantes :

65% des ampoules produites sont des ampoules pour l'habitacle.
Parmi elles, 15% sont défectueuses.
35% des ampoules produites sont des ampoules pour les phares.
Parmi elles, 5% sont défectueuses.

On choisit une ampoule au hasard et on considère les évènements suivants :

H : l'ampoule est une ampoule pour l'habitacle.
D : l'ampoule est défectueuse.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous qui décrit la situation.



2. Calculer la probabilité $P(H \cap D)$.

3. Démontrer que $P(D) = 0{,}115$.

4. L'ampoule choisie est défectueuse.
Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'une ampoule pour phares ? Arrondir au millième.

Partie B. Loi binomiale

On rappelle que la probabilité qu'une ampoule choisie au hasard soit défectueuse est égale à $0{,}115$.
On prélève un échantillon aléatoire de 300 ampoules. On suppose que ce prélèvement peut être assimilé à un tirage avec remise.
On note X la variable aléatoire qui compte le nombre d'ampoules défectueuses au sein de cet échantillon.

1. Donner la loi suivie par la variable aléatoire X ainsi que ses paramètres.

2. Quelle est la probabilité qu'exactement 30 ampoules de l'échantillon soient défectueuses ? Arrondir au millième.

3. Quelle est la probabilité qu'au plus 20 ampoules de l'échantillon soient défectueuses ? Arrondir au millième.

BTS Industriels

Studyrama.com

Session 2024

Épreuve : **Mathématiques Groupe B4**

Durée de l'épreuve : 3 heures

PROPOSITION DE CORRIGÉ

Exercice 1

Partie A

1. a) La solution générale de (E_0) est : $\boldsymbol{y(t) = k\, e^{-0,06\,t}}$, où k est un réel quelconque.

b) On a $g'(t) + 0,8\, g(t) = 0 + 0,06*35 =$ ~~2,1 donc g(t) =~~ 35 est une solution particulière de (E).

c) La solution générale de (E) est alors : $\underline{\boldsymbol{y(t) = k\, e^{-0,06\,t} + 35}}$

2. On veut trouver $f(t) = k\, e^{-0,06\,t} + 35$ telle que $f(0) = 0$ i.e. $k + 35 = 0$ d'où $k = -35$ et $\underline{\mathbf{f(t) = -35e^{-0,06\,t} + 35}}$ est la fonction qui satisfait à la condition initiale du problème.

Partie B

1. a) $f(7) \approx 12$ donc la résistance du béton au bout de 7 jours de séchage est d'environ 12 MPa.

$f(3) \approx 5,8$ donc la résistance du béton au bout de 3 jours, soit 72h de séchage est d'environ 5,8 MPa .

2. On a $f'(t) = -35*(-0,06)\, e^{-0,06\,t} = 2,1\, e^{-0,06\,t}$

3. $f'(t) > 0$, **donc f est strictement croissante sur [0 ; + ∞[.**

4. Comme $\lim\limits_{t\to+\infty} -0,06\,t = -\infty$, alors par composition $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-0,06\,t} = 0$, et on a

$\lim\limits_{t\to+\infty} \boldsymbol{f(t) = 35}$ peut s'interpréter comme si **à terme**, la résistance du béton sera de 35 MPa.

5. Comme f (28) ≈ <u>28,5</u> et 28,5 /35 ≈ <u>81,4%</u> alors le fabricant du béton qui affirme que la résistance après 28 jours de séchage correspond à 80% de la résistance finale ne peut être accusé de mentir.

6. On a F ' (t) = (1750/3) * (-0,06) e $^{-0,06t}$ + 35 = - 35 e $^{-0,06t}$ + 35 = f (t), ce qui prouve que

F est une primitive de f sur [0 ; + ∞[.

7. On a :

$\underline{M} = \frac{1}{28}\int_0^{28} f(t)dt = \frac{1}{28}\,(F(28) - F(0)) \approx$ **18MPa** à 0,1 près

ce qui nous donne une valeur moyenne de la résistance du béton sur les 28 premiers jours de **<u>18MPa.</u>**

Partie C

1.

Ligne 1	t←0
Ligne 2	R←0
Ligne 3	Tant que R < 21
Ligne 4	t ← t + 1
Ligne 5	R← −35e−0,06t +35
Ligne 6	Fin Tant que

2. En tabulant les valeurs de la fonction f, on a f(15) ≈ 20,8 < 21 et f(16) ≈ 21,6 > 21 donc N = 16 : c'est le nombre minimal de jours de séchage permettant d'obtenir une résistance au moins égale à 21 MPa.

<u>Exercice 2 :</u>

1. En remplaçant L et C par leur valeur, on obtient l'équation différentielle suivante :

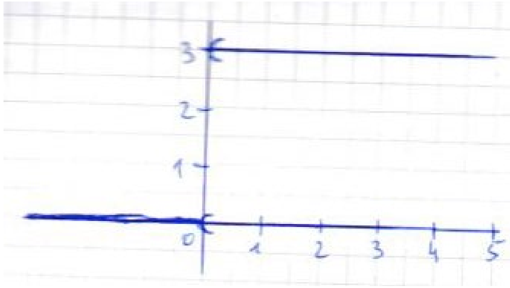
$$10^{-4} s''(t) + s(t) = e(t)$$

2. On applique la transformation de Laplace à chaque terme de l'équation différentielle :
$10^{-4} (p^2 S(p) - p\, s(0^+) - s'(0^+)) + S(p) = E(p)$
Vu que $s(0^+) = 0$ et $s'(0^+) = 0$, alors on obtient : $10^{-4} p^2 S(p) + S(p) = E(p)$
Donc en factorisant : $(10^{-4} p^2 + 1) S(p) = E(p)$
3. En utilisant le résultat précédent, on a :

$$S(p) = \frac{1}{10^{-4}p^2 + 1} E(p) = \frac{10^4}{p^2 + 10^4} E(p)$$

Donc *S(p)* est de la forme *H(p)* × *E(p)* avec : $H(p) = \frac{10^4}{p^2+10^4}$

4. On représente la fonction *e* :



5. *e(t) = 3 U(t)* a pour transformée de Laplace : $E(p) = \frac{3}{p}$

6. En utilisant les résultats précédents :

$$S(p) = \frac{10^4}{p^2 + 10^4} \times \frac{3}{p} = \frac{3 \times 10^4}{p(p^2 + 10^4)}$$

Or l'expression $\frac{3}{p} - \frac{3p}{p^2+10^4} = \frac{3(p^2+10^4)-3p^2}{p(p^2+10^4)} = \frac{3\times10^4}{p(p^2+10^4)}$

Donc on a bien : $S(p) = \frac{3}{p} - \frac{3p}{p^2+10^4}$

7. En utilisant le formulaire, on retrouve les originaux de chaque membre de *S(p)*.

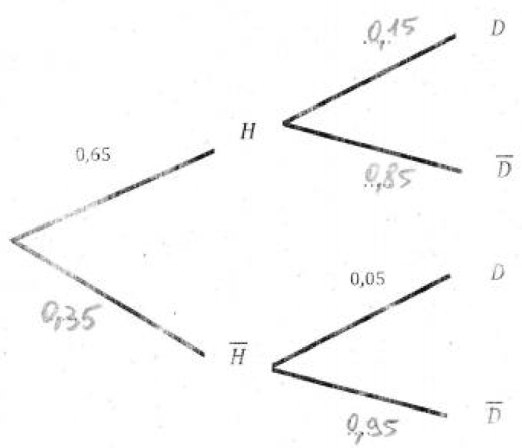
On obtient alors : $s(t) = 3U(t) - 3\cos(100t)\,U(t)$

8. Le croquis correct est le croquis n°2

Exercice 3 :

Partie A :

1.



1.

2. On calcule : $P(H \cap D) = P(H) \times P_H(D) = 0{,}65 \times 0{,}15 = 0{,}0975$

3. On utilise la formule des probabilités totales :

$$P(D) = P(H \cap D) + P(\overline{H} \cap D) = 0{,}0975 + P(\overline{H}) \times P_{\overline{H}}(D) = 0{,}0975 + 0{,}35 \times 0{,}05$$
$$= 0{,}115$$

4. La probabilité demandée est : $P_D(\overline{H}) = \frac{P(D\cap\overline{H})}{P(D)} = \frac{0{,}35\times0{,}05}{0{,}115} \approx 0{,}152 \approx 15{,}2\ \%$

Partie B :

1. La variable *X* suit la loi binomiale B(300 ; 0,115)
2. La probabilité qu'exactement 30 ampoules tombent en panne est :
$P(X=30) \approx 0{,}054 \approx 5{,}4\ \%$
3. La probabilité qu'au plus 20 ampoules soient défectueuses est :

$$P(X \leq 20) \approx 0{,}004 \approx 0{,}4\%$$