BTS SIO. Mathématiques approfondies

Lycée Carcouët

8 décembre 2022

Résumé

Valeurs de la variable	x_1	x_2	...	x_i	...	x_p
Effectifs	n_1	n_2	...	n_i	...	n_p

Fréquences : $f_i = \dfrac{n_i}{n}$ où $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_p = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} n_i$

Moyenne :

$$\overline{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots + n_ix_i + \cdots + n_px_p}{n_1 + n_2 + \cdots + n_i + \cdots + n_p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_ix_i$$

Variance :

$$V_x = \sigma_x^2 = \frac{1}{n}[n_1(x_1 - \overline{x})^2 + \cdots + n_p(x_p - \overline{x})^2] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i(x_i - \overline{x})^2$$

Écart-type : $\sigma_x = \sqrt{V_x}$

Autres indicateurs

- Le **mode** est la valeur de la variable pour laquelle l'effectif est maximal.
- **Étendue** : C'est la différence entre les valeurs extrêmes de la série.
- **Médiane** : La moitié (au moins) des valeurs est inférieure à la médiane et la moitié (au moins) des valeurs est supérieure.

- Le **premier quartile** : c'est la plus petite donnée Q_1 telle qu'au moins 25 % des données soient inférieures ou égales à Q_1.
  Si $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n$, Q_1 est la valeur de x_i dont l'indice i est le plus petit entier supérieur où égal à $\frac{n}{4}$.
- Le **troisième quartile** : c'est la plus petite donnée Q_3 telle qu'au moins 75 % des données soient inférieures ou égales à Q_3.
  Si $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n$, Q_3 est la valeur de x_i dont l'indice i est le plus petit entier supérieur où égal à $\frac{3n}{4}$.
- L'**écart interquartile** est le nombre $Q_3 - Q_1$.

Regroupement en classes

On traite ce cas comme une série à variable discrète en utilisant pour les calculs les centres de classes.

On étudie deux variables numériques x et y dans une population de n individus.

Dans un repère du plan, les points $M_i(x_i; y_i)$ forment le **nuage de points**.

Le point moyen est le point de coordonnées $\boxed{(\overline{x}; \overline{y})}$, avec :

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \quad \text{et} \quad \overline{y} = \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n}$$

Un nuage de points étant donné, on peut chercher une droite passant le plus près possible de tous les points.
La calculatrice donne l'équation de la droite obtenue par la **méthode des moindres carrés** (ou ajustement affine par la méthode des moindres carrés, ou droite de régression de y en x, ou ...).
Pour l'épreuve, il faut donner l'équation $y = ax + b$ fournie par la calculatrice.

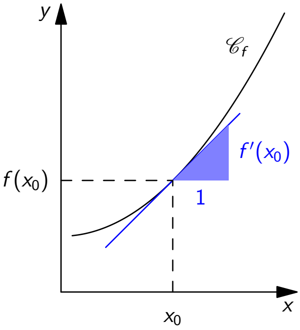
On calcule parfois le **coefficient de corrélation linéaire** r.
r est compris entre -1 et 1.

- Si r est proche de 1 ou -1, on dit qu'il y a une bonne corrélation (et c'est tout). Quand le nuage a aussi une forme "allongée", il est raisonnable de déterminer un ajustement affine du nuage.
- Sinon, déterminer un ajustement affine est inutile : il faut alors se tourner vers des ajustements plus compliqués : à l'aide de polynômes, de fonctions exponentielles . . .

Résumé

1. Statistiques
2. Fonctions d'une variable réelle
3. Suites numériques
4. Intégration

$f'(x_0)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point de coordonnées $(x_0; f(x_0))$.



L'équation réduite de la tangente à la courne représentative de f en x_0 est :

L'équation réduite de la tangente à la courne représentative de f en x_0 est :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Le théorème fondamental

f est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

Si f' est positive sur I, alors ...

Si f' est négative sur I, alors ...

Si f' est strictement positive sur I, alors ...

Si f' est strictement négative sur I, alors ...

Le théorème fondamental

f est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.
Si f' est positive sur I, alors f est croissante sur I.
Si f' est négative sur I, alors f est décroissante sur I.
Si f' est strictement positive sur I, alors f est strictement croissante sur I.
Si f' est strictement négative sur I, alors f est strictement décroissante sur I.

La fonction dérivée de

$$f : x \mapsto k$$

est ...

(k est une constante réelle et $x \in \ldots$)

La fonction dérivée de

$$f : x \mapsto k$$

est

$$f' : x \mapsto 0$$

(k est une constante réelle et $x \in \mathbb{R}$)

La fonction dérivée de

$$f : x \mapsto x$$

est . . .

$(x \in \ldots)$

La fonction dérivée de

$$f : x \mapsto x$$

est

$$f' : x \mapsto 1$$

$(x \in \mathbb{R})$

La fonction dérivée de

$$f : x \mapsto x^n$$

est . . .

$(n \in \mathbb{Z}^*$. Si $n < 0$, $x \in \mathbb{R}^*$. Sinon $x \in \mathbb{R})$

La fonction dérivée de

$$f : x \mapsto x^n$$

est

$$f' : x \mapsto nx^{n-1}$$

($n \in \mathbb{Z}^*$. Si $n < 0$, $x \in \mathbb{R}^*$. Sinon $x \in \mathbb{R}$)

La fonction dérivée de

$$f : x \mapsto \sqrt{x}$$

est ...

$(x \in \dots)$

La fonction dérivée de

$$f : x \mapsto \sqrt{x}$$

est

$$f' : x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$(x \in]0; +\infty[\ )$

La fonction dérivée de

$$f : x \mapsto e^x$$

est ...

$(x \in \dots)$

La fonction dérivée de

$$f : x \mapsto e^x$$

est

$$f' : x \mapsto e^x$$

$(x \in \mathbb{R})$

La fonction dérivée de

$$f : x \mapsto \ln(x)$$

est . . .

$(x \in \dots)$

La fonction dérivée de

$$f : x \mapsto \ln(x)$$

est

$$f' : x \mapsto \frac{1}{x}$$

$(x \in]0; +\infty[\ )$

u et v sont des fonctions dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

$$(u+v)' =$$

u et v sont des fonctions dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

$$(u+v)' = u' + v'$$

u est une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et k est une constante réelle.

$$(ku)' =$$

u est une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et k est une constante réelle.

$$(ku)' = ku'$$

u et v sont des fonctions dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

$$(uv)' =$$

u et v sont des fonctions dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

$$(uv)' = uv' + u'v$$

v est une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et v ne s'annule pas sur I.

$$\left(\frac{1}{v}\right)' =$$

v est une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et v ne s'annule pas sur I.

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$$

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et v ne s'annule pas sur I.

$$\left(\frac{u}{v}\right)' =$$

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et v ne s'annule pas sur I.

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$$

u est une fonction dérivable sur un intervalle I et g est dérivable en $u(x)$ pour tout x de I.

$$f(x) = g \circ u(x)$$

$$f'(x) =$$

u est une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et n est un entier naturel, $n \geqslant 1$.

$$f = u^n$$

$$f' =$$

u est une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et n est un entier naturel, $n \geqslant 1$.

$$f = u^n$$

$$f' = nu^{n-1}u'$$

u est une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $u(x) > 0$ pour tout x de I.

$$(\sqrt{u})' =$$

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

u est une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

$$(e^u)' =$$

u est une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

$$(e^u)' = u'e^u$$

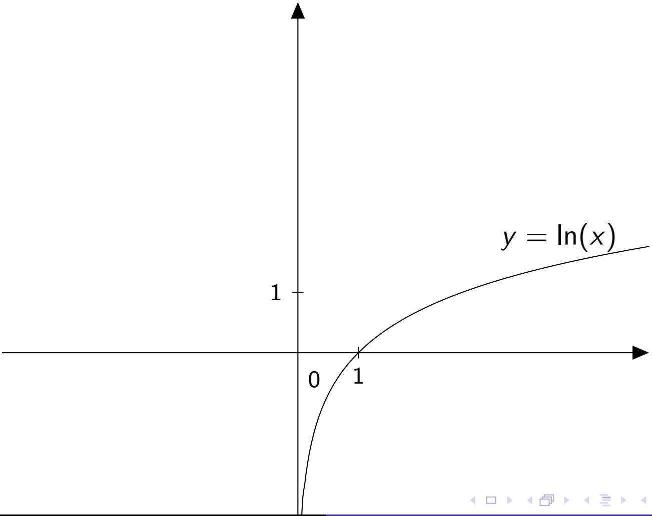
u est une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et pour tout x de I, $u(x) > 0$.

$$(\ln u)' =$$

u est une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et pour tout x de I, $u(x) > 0$.

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

Fonction logarithme népérien (ln)



Pour tout réel x

$$\ln\left(e^{x}\right) =$$

Pour tout réel x

$$\ln\left(e^{x}\right) = x$$

Pour tout réel x strictement positif

$$e^{\ln(x)} =$$

Pour tout réel x strictement positif

$$e^{\ln(x)} = x$$

$$\ln(1) =$$

$$\ln(1) = 0$$

$$\ln(e) =$$

$$\ln(e) = 1$$

a et b sont des nombres réels strictement positifs.

$$\ln(ab) =$$

a et b sont des nombres réels strictement positifs.

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$$

a et b sont des nombres réels strictement positifs.

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) =$$

a et b sont des nombres réels strictement positifs.

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

b est un nombre réel strictement positif.

$$\ln\left(\frac{1}{b}\right) =$$

b est un nombre réel strictement positif.

$$\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)$$

a et b sont des nombres réels strictement positifs, $n \in \mathbb{Z}$.

$$\ln\left(a^n\right) =$$

a et b sont des nombres réels strictement positifs, $n \in \mathbb{Z}$.

$$\ln\left(a^n\right) = n\ln(a)$$

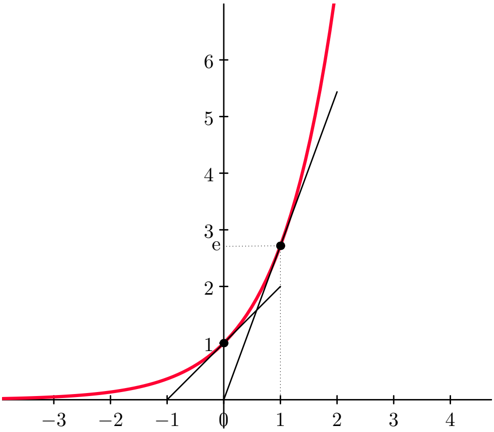
a et b sont des nombres réels strictement positifs.

$$\ln\left(\sqrt{a}\right) =$$

a et b sont des nombres réels strictement positifs.

$$\ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\ln(a)$$

Fonction exponentielle (de base e)



$$e^0 =$$

$$e^0 = 1$$

$$e^1 =$$

$$e^1 = e$$

a et b sont des nombres réels.

$$e^{a+b} =$$

a et b sont des nombres réels.

$$e^{a+b} = e^{a} \times e^{b}$$

a et b sont des nombres réels.

$$e^{a-b} =$$

a et b sont des nombres réels.

$$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$$

b est un nombre réel.

$$e^{-b} =$$

b est un nombre réel.

$$e^{-b} = \frac{1}{e^{b}}$$

a est un nombre réel et n un entier relatif.

$$(e^a)^n =$$

a est un nombre réel et n un entier relatif.

$$(e^a)^n = e^{na}$$

Limites à utiliser sans justifier :

$$\lim_{x \to \pm\infty} x^2 = \qquad ; \qquad \lim_{x \to +\infty} x^n = \qquad \mathrm{n} \in \mathbb{N}^*$$

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = \qquad ; \qquad \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} =$$

$$\lim_{x \to -\infty} x^n = \qquad (\mathrm{n} \in \mathbb{N}^* \text{ et n pair})$$

$$\lim_{x \to -\infty} x^n = \qquad (\mathrm{n} \in \mathbb{N} \text{ et n impair})$$

Limites à utiliser sans justifier :

$$\lim_{x \to \pm\infty} x^2 = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty \quad \mathrm{n} \in \mathbb{N}^*$$

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} = 0^{\pm}$$

$$\lim_{x \to -\infty} x^n = +\infty \quad (\mathrm{n} \in \mathbb{N}^* \text{ et n pair})$$

$$\lim_{x \to -\infty} x^n = -\infty \quad (\mathrm{n} \in \mathbb{N} \text{ et n impair})$$

Limites à utiliser sans justifier :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = \qquad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = \qquad \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} =$$

Limites à utiliser sans justifier :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty \qquad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty \qquad \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

Limites à utiliser sans justifier :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty} \quad \text{et} \quad \boxed{\lim_{x \to -\infty} e^x = 0}$$

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty} \quad \text{et} \quad \boxed{\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty}$$

Polynôme à l'infini

En $\pm\infty$, un polynôme se comporte comme son terme de plus grand degré.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(7x^5-2x^2\right)=\lim_{x\to+\infty}7x^5=+\infty$$

Quotient de polynômes à l'infini

En $\pm\infty$, un quotient de polynômes se comporte comme le quotient des ses termes de plus grand degré.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{7x^5-2x^2}{3x^2-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{7x^5}{3x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{7x^3}{3} = -\infty$$

Croissances comparées

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0 \qquad n \in \mathbb{N}$$

On dit souvent : à l'infini, l'exponentielle l'emporte sur x^n.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^n \ln x = 0 \qquad (n \in \mathbb{N}^*)$$

En $+\infty$, e^x l'emporte sur x^n qui l'emporte sur $\ln x$.

Signes connus

- $(\dots)^2$. Un carré est positif. S'il est au dénominateur, il est strictement positif sur l'intervalle étudié.
- $\sqrt{\dots}$. La racine carrée d'un nombre est positive.
- $e^{\cdots}$. L'exponentielle d'un nombre est strictement positive.
- $\ln(x) > 0$ si $x > 1$ et $\ln(x) < 0$ si $0 < x < 1$

Signes connus

- fonction affine :
  $1-3x>0$ équivaut à $x<\dfrac{1}{3}$
  $1-3x<0$ équivaut à $x>\dfrac{1}{3}$
- ax^2+bx+c
  On récite : C'est signe de a sauf entre les racines éventuelles.

Signes connus

- $(\dots)(\dots)$. Le signe d'un produit s'étudie à l'aide d'un tableau de signes.
- $\dfrac{(\dots)}{(\dots)}$. Le signe d'un quotient s'étudie à l'aide d'un tableau de signes.
- $(\dots)+(\dots)$.
  Si c'est une somme de nombres positifs, on peut conclure.
  Si c'est une somme de nombres négatifs, on peut conclure.
  Sinon non.

Résumé

1. Statistiques
2. Fonctions d'une variable réelle
3. Suites numériques
4. Intégration

Distinguer les deux types de suites :

- $\boxed{u_{n+1} = f(u_n)}$

  exemple : $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n

  $$u_{n+1} = u_n + (u_n)^2$$

  Pour calculer u_{100}, il faut calculer tous les termes précédents.

- $\boxed{u_n = f(n)}$

  exemple : $u_n = n^2 + 3n$ pour tout entier naturel n
  Pour calculer u_{100}, il suffit de faire

  $$u_{100} = 100^2 + 3 \times 100 = 10300$$

On connaît deux types : les suites arithmétiques et les suites géométriques.
Ce ne sont pas les seules : il existe une infinité de suites qui ne sont ni arithmétiques ni géométriques.

Suites arithmétiques

Une suite de nombres est **arithmétique** si chaque terme s'obtient en ajoutant un même nombre au précédent :

$$\boxed{u_{n+1} = u_n + a} \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}$$

u_n est appelé terme de rang n et a est la *raison* de la suite.

$$u_0 \xrightarrow{+a} u_1 \xrightarrow{+a} u_2 \xrightarrow{+a} u_3 \xrightarrow{+a} \dots \qquad u_n \xrightarrow{+a} u_{n+1} \qquad \dots$$

Exemple : 2 ; 7 ; 12 ; 17 ; 22 ; 27 ...est la suite arithmétique de premier terme 2 et de raison 5.

Terme général d'une suite arithmétique

Pour calculer directement le terme de rang n :

$$\boxed{u_n = u_0 + na}$$

$$u_0 \xrightarrow{+a} u_1 \xrightarrow{+a} u_2 \xrightarrow{+a} u_3 \xrightarrow{+a} \dots \qquad u_n$$

Exemple : soit la suite (u_n), arithmétique, de raison 5, de premier terme $u_0 = 2$.

$$\begin{aligned} u_{100} &= u_0 + 100 \times 5 \\ &= 2 + 500 \\ &= 502 \end{aligned}$$

Somme de termes d'une suite arithmétique

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{somme de termes}\\\text{d'une suite arithmétique}\end{array} = \text{nbre de termes} \times \frac{\text{1er terme} + \text{dernier}}{2}}$$

Cas particulier :

$$\boxed{1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

Suite géométrique

Une suite de nombres est géométrique si chaque terme s'obtient en multipliant le précédent par un même nombre :

$$\boxed{u_{n+1} = b \times u_n}$$

b est la *raison* de la suite.

Pour calculer directement le terme de rang n :

$$\boxed{u_n = b^n \times u_0}$$

$$u_0 \xrightarrow{\times b} u_1 \xrightarrow{\times b} u_2 \xrightarrow{\times b} u_3 \xrightarrow{\times b} \dots \longrightarrow u_n$$

Somme de termes d'une suite géométrique

$$\boxed{\text{somme de termes d'une suite géométrique} = \text{1er terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}}$$

Cas particulier :

$$1 + b + b^2 + b^3 + b^4 + \cdots + b^n = \frac{1 - b^{n+1}}{1 - b}$$

Sens de variation d'une suite géométrique

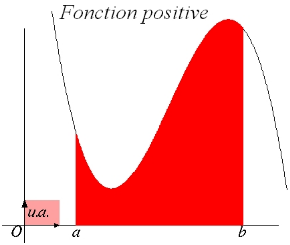
Pour $u_0 > 0$:

- si la raison $b > 1$, la suite géométrique croît strictement
- si $0 < b < 1$, elle décroît strictement.

Résumé

1. Statistiques
2. Fonctions d'une variable réelle
3. Suites numériques
4. Intégration

Si f est un fonction **continue et positive** sur $[a; b]$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ est l'aire du domaine colorié, mesurée en unités d'aires.



Aire entre deux courbes

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a; b]$, $a < b$. Si pour tout x de $[a; b]$ on a $f(x) \leqslant g(x)$, alors l'aire située entre les courbes de f et g sur $[a; b]$ est (en unité d'aires) :

$$\int_a^b (g(x) - f(x))\mathrm{d}x$$

(quels que soient leurs signes)

Si f est une fonction continue sur un intervalle I, alors pour tous réels a et b dans I, on a :

$$\boxed{\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a)}$$

où F est une primitive de f sur I.

Valeur moyenne d'une fonction

f est une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$. On appelle valeur moyenne de f sur $[a; b]$ le nombre :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Résumé

1. Statistiques
2. Fonctions d'une variable réelle
3. Suites numériques
4. Intégration

Bases

Pour deux événements A et B d'un univers Ω,

$$\boxed{P(\overline{A}) = 1 - P(A)}$$

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

Définition des probabilités conditionnelles

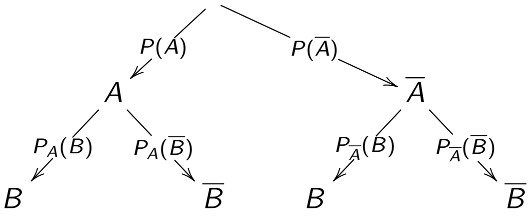
A et H sont des événements de Ω muni d'une loi de probabilité P.
La probabilité de H n'est pas nulle.

La probabilité de A sachant H est :

$$\boxed{P_H(A) = \frac{P(A \cap H)}{P(H)}}$$

Conséquence de la définition : $\boxed{P(A \cap H) = P(H) \times P_H(A)}$

On rencontre souvent la situation :



Au 2ème niveau, on trouve des probabilités conditionnelles !

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$$

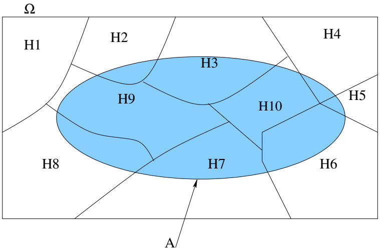
$$\boxed{P(B) = P(A) \times P_A(B) + P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B)}$$

Plus généralement :

Formule des probabilités totales

Les événements H_1, H_2, ..., H_n forment une partition de Ω. Cela signifie que $H_1 \cup H_2 \cup \cdots \cup H_n = \Omega$ et que les H_i sont disjoints deux à deux. Alors pour tout événement A :

$$P(A) = P_{H_1}(A) \times P(H_1) + P_{H_2}(A) \times P(H_2) + \cdots + P_{H_n}(A) \times P(H_n)$$



Evénements indépendants

Deux événements A et B sont dits indépendants si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Loi de Bernoulli

Une expérience de Bernoulli est une expérience aléatoire ayant deux issues contraires A et $\overline{A}$.

La loi de Bernoulli est donc, en notant $p = P(A)$:

A	$\overline{A}$
p	$1-p$

Loi binomiale

"On répète n expériences de Bernoulli identiques et indépendantes à deux issues A et $\overline{A}$.
La variable aléatoire X égale au nombre d'apparitions de A suit alors la loi binomiale de paramètres n et p (où $p = P(A)$)".

X peut prendre toutes les valeurs entières k comprises entre 0 et n.
Il faut savoir utiliser la calculatrice pour calculer $P(X = k)$ (1er menu) et $P(X \leqslant k)$ (2ème menu).

Si X suit la loi $\mathscr{B}(n,p)$:

$$\boxed{E(X) = np}$$

$$\boxed{\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}}$$

Loi de Poisson

λ est un réel strictement positif. Une variable X ne prend que des valeurs entières positives : 0, 1, 2, ..., k, ...
X suit une **loi de Poisson** de paramètre λ si pour tout k dans $\mathbb{N}$,

$$P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

Cette formule n'est pas à connaître : savoir utiliser la calculatrice pour calculer $P(X = k)$ (1er menu) et $P(X \leqslant k)$ (2ème menu).

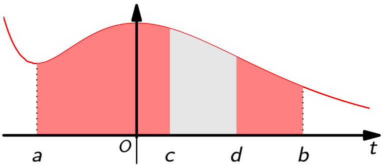
$\boxed{E(X) = \lambda}$ $\qquad V(X) = \lambda \qquad \sigma(X) = \sqrt{\lambda}$

Sous certaines conditions (n assez grand et p petit), on approxime la loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$ par la loi de Poisson de même espérance (c'est-à-dire de paramètre $\lambda = np$).

Densité de probabilité

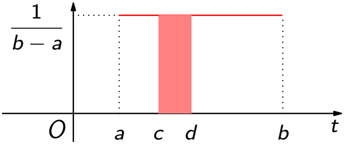
On appelle **densité de probabilité** sur l'intervalle $[a; b]$ une fonction continue et positive telle que $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = 1$.
Si une variable aléatoire X suit une loi de probabilité de densité f, alors pour tout intervalle $[c; d]$ inclus dans $[a; b]$:

$$P(X \in [c; d]) = \int_c^d f(t)\mathrm{d}t$$



Loi uniforme sur $[a, b]$.

On choisit au hasard un nombre réel dans $[a; b]$. La probabilité qu'il appartienne à un intervalle $[c; d]$ inclus dans $[a; b]$ vaut $P([c; d]) = \dfrac{d-c}{b-a}$. P est appelée la **loi uniforme** sur $[a; b]$. C'est la loi de densité $f : t \mapsto \dfrac{1}{b-a}$.

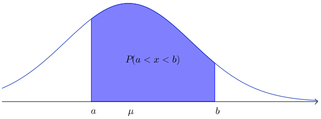


$$E(X) = \frac{a+b}{2}.$$

Loi normale (de Laplace-Gauss) d'espérance μ et d'écart type σ.

Une variable aléatoire X suit une loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ (ou $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$) si sa fonction de densité est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$.

Pour tous réels a et b ($a < b$) on a : $P(a \leqslant X \leqslant b) = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

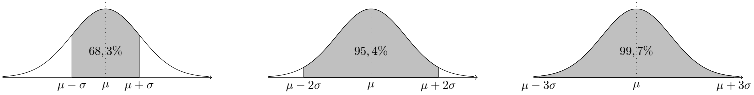


Loi normale

Intervalles à 1, 2 ou 3 sigmas

Si X suit $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$,

- $P(X \in [\mu - \sigma, \mu + \sigma]) \simeq 0,683$
- $P(X \in [\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]) \simeq 0,954$
- $P(X \in [\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]) \simeq 0,997$



Une loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$ peut, dans certaines conditions (quand n est grand, p pas trop près de 0 et 1 ...), être approchée par une loi normale $\mathscr{N}(\mu, \sigma)$ de même espérance et de même écart-type : $\mu = np$ et $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$

Loi exponentielle

Soit λ un réel strictement positif. La loi exponentielle P de paramètre λ est définie :

- pour tout intervalle $[a; b]$ inclus dans $[0; +\infty[$ par

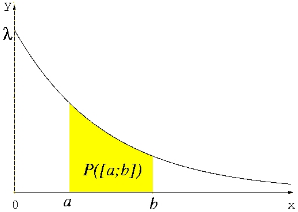
$$\boxed{P([a; b]) = \int_a^b \lambda e^{-\lambda t} dt = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}}$$

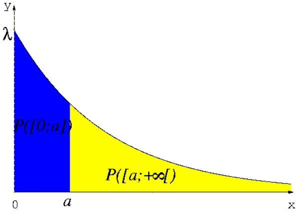
- pour tout intervalle $[a; +\infty[$ inclus dans $[0; +\infty[$ par

$$\boxed{P([a; +\infty[) = 1 - \int_0^a \lambda e^{-\lambda t} dt = e^{-\lambda a}}$$

La fonction $f : t \mapsto \lambda e^{-\lambda t}$ est une densité.

Loi exponentielle





Loi exponentielle

L'espérance de la loi exponentielle de paramètre λ est $\boxed{E(T) = \dfrac{1}{\lambda}}$.

Son écart-type est $\sigma(T) = \dfrac{1}{\lambda}$.