Passage en Première générale avec spécialité Mathématiques

Sommaire

- Quelques conseils page 1
- Exercices Partie I (Application directe des résultats et méthodes du cours) page 2
- Exercices Partie II (S'entrainer, développer les connaissances, rédiger) page 5
- Exercices Partie III (Synthétiser les méthodes, prendre des initiatives, démontrer) page 7
- Correction des exercices page 8

Quelques conseils

Quatre thèmes sont fondamentaux pour la spécialité maths en 1re :

- **Fonctions** (chapitres 3, 6, 8) : si vous devez privilégier un thème, c'est celui-ci…
- **Calcul littéral, équations, inéquations** (chapitres 2, 4 et 11) (souvent avec des fonctions !)
- **Probabilités** (chapitre 12)
- **Calcul vectoriel et droites dans le plan** (chapitres 1, 10 et 13)

Pour chacun de ces thèmes :

- Connaître le cours (faire des fiches), refaire plusieurs fois les exemples et les exercices du cours.
- Refaire d'abord les exercices des DS et des DM, puis **les exercices proposés dans ce document**, pour approfondir le travail.
  Il est important de chercher les exercices, d'abord sans aucune aide, puis si nécessaire avec l'aide du cours et en dernier recours de la correction.
- Penser à l'aide qu'apporte la calculatrice : maîtriser notamment la représentation graphique de fonctions. Dès que possible, essayer de vérifier les réponses à l'aide de la calculatrice.
- Comme vous l'avez peut-être déjà fait cette année, vous pouvez également consulter des vidéos sur internet, notamment celles d'Yvan Monka :

  https://urlz.fr/cUmx
  (vous trouverez sur cette page des vidéos de cours, de méthodes et d'exercices types, mais aussi un e-cahier de vacances)

Il est conseillé de fractionner le travail (éviter les longues séances de révision : il est préférable de se concentrer par exemple 30 minutes sur un exercice, sans musique ni téléphone à portée de main, que de vouloir survoler 6 exercices pendant 1 heure).

Il est très bénéfique de refaire deux fois ces exercices (une fois fin juin ou début juillet et une fois en août par exemple). Certains de ces exercices sont difficiles, il est normal de ne pas savoir tout faire du premier coup !

Il vous est conseillé de dédier un cahier à votre travail des vacances, en mathématiques ou dans d'autres matières. Vous pourrez ainsi le présenter à vos professeurs à la rentrée pour qu'ils puissent mesurer vos efforts.

PARTIE I :
Connaître les résultats du cours, savoir les appliquer, connaître les méthodes de base

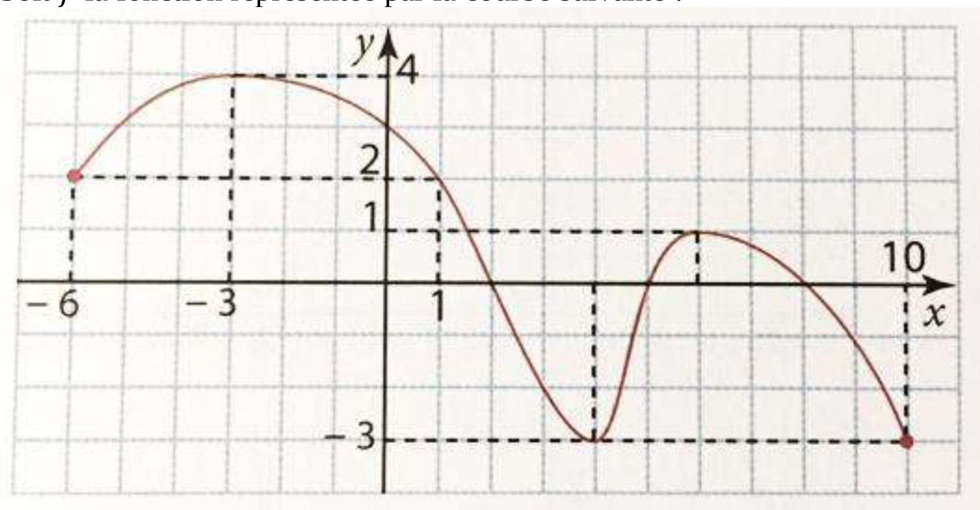
Exercice 1 :

Soit la fonction f définie sur $]2\,;+\infty[$ par $f(x) = \frac{5}{x-2}$.

1. Quelle est l'image par la fonction f de 8 et de $\frac{11}{3}$
2. Les points de coordonnées $(3\,;\ 5)$ et $(2\,;\ 0)$ sont-ils des points de la courbe représentative de f ? Justifier.

Exercice 2 :

Soit f la fonction représentée par la courbe suivante :



Par lecture graphique et sans justifier. Donner des valeurs approchées si nécessaire.

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Résoudre :
   a. $f(x) \leq 2$
   b. $f(x) > 0$
3. Compléter le tableau de valeurs de f ci-dessous :
4. Dresser le tableau de variation de f sur son ensemble de définition.

x	-6	0	1	2	4	5	6	8	10
$f(x)$									

5. Dresser le tableau de signes de f sur son ensemble de définition.
6. Quel est le maximum de f sur son ensemble de définition ? Pour quelle(s) valeur(s) est-il atteint ?
7. Quel est le minimum de f sur son ensemble de définition ? Pour quelle(s) valeur(s) est-il atteint ?

Exercice 3 :

1. Dresser le tableau de signes de la fonction :

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{2(3x+1)}$$

2. Résoudre $f(x) \leq 0$

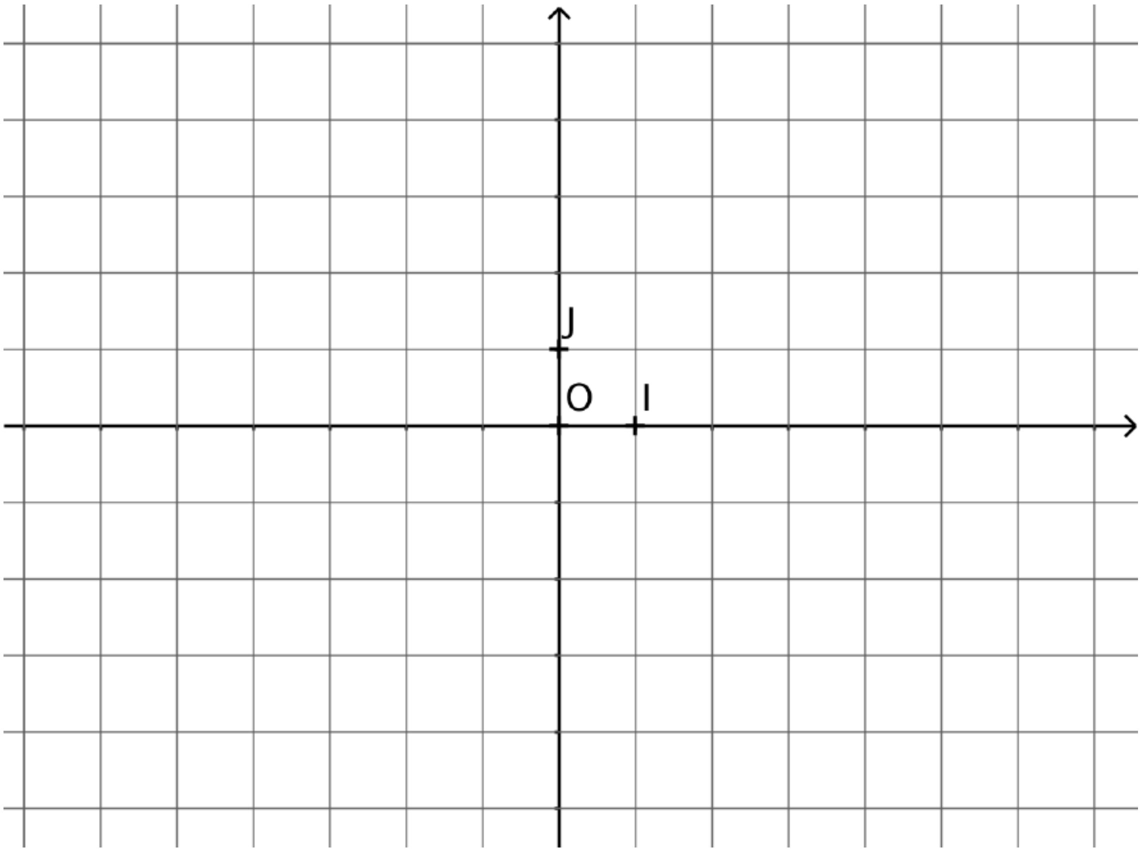
Exercice 4 :

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. Déterminer l'expression algébrique de la fonction affine f telle que $f(7) = 22$ et $f(13) = 40$
2. On considère les fonctions affines g et h définies sur $\mathbb{R}$ par :

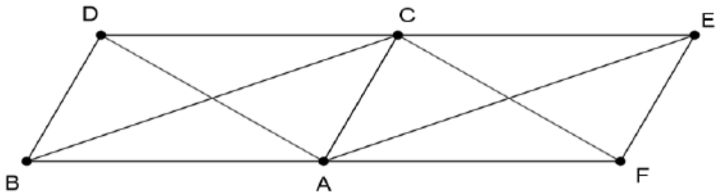
$$g(x) = 2x - 5 \quad \text{et} \quad h(x) = -5x + 8$$

   a. Tracer la courbe représentative de la fonction g dans le repère ci-dessous.
   b. Donner (sans justification) le tableau de signes de $h(x)$



Exercice 5 :

On considère ABDC, AFEC et ABCE des parallélogrammes.
Compléter les égalités suivantes à l'aide des points de la figure :



$\overrightarrow{DB} = \ldots\ldots$	$\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A\ldots}$
$\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CA} = \ldots\ldots$	$\overrightarrow{EA} - \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{F\ldots}$
$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{B\ldots}$	$\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{B\ldots}$

Exercice 6 :

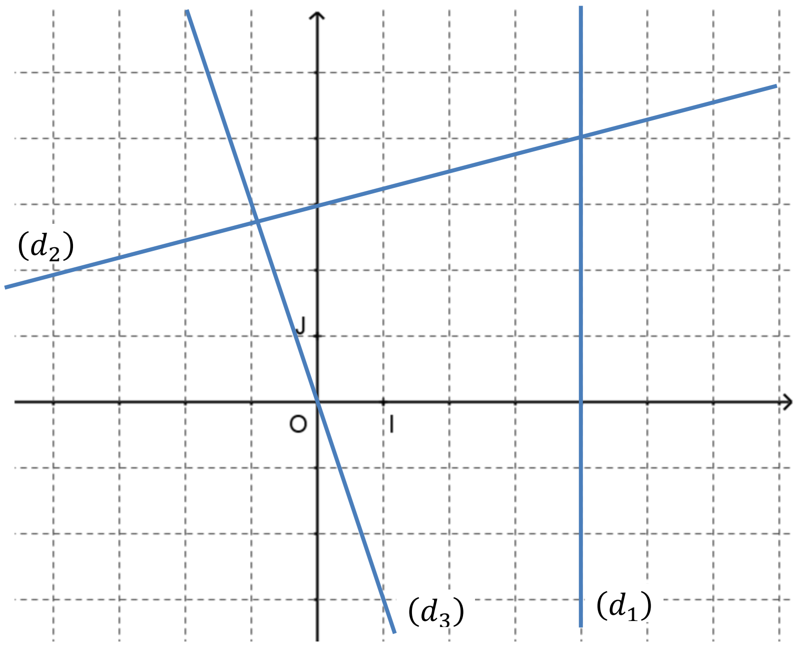
Un sac contient 4 jetons numérotés 1, 3, 6 et 9, qui sont indiscernables au toucher.
On tire au hasard un premier jeton, puis un second jeton en remettant le premier dans le sac. On note le nombre à deux chiffres obtenu dont les dizaines sont données par le premier jeton extrait et les unités par le second.
Par exemple, tirer le jeton 6 puis le jeton 1 conduit au nombre 61.

1. a. Ecrire tous les résultats de l'univers en utilisant un arbre représentant cette expérience aléatoire.
   b. Déterminer le nombre d'issues possibles liées à cette expérience.

2. On considère les événements suivants :
   A : « Le nombre obtenu est pair »
   B : « Le nombre obtenu est un multiple de 3 »
   a. Déterminer les probabilités des événements A, B et $\overline{B}$.
   b. Traduire par une phrase l'événement $A \cap B$, puis calculer sa probabilité.
   c. Exprimer $P(A \cup B)$ en fonction des probabilités précédentes.
   d. Traduire par une phrase l'événement $A \cup B$, puis calculer sa probabilité.

Exercice 7 :

1. Déterminer par lecture graphique les équations réduites des droites $(d_1), (d_2)$ et (d_3). On ne demande pas de justification.
2. Dans le repère ci-contre, tracer, sans justification, les droites :
   - (d_4) d'équation réduite : $y = 3x - 2$.
   - (d_5) d'équation réduite : $y = 5$
   - (d_6) d'équation réduite : $y = -\frac{2}{5}x + 1$
3. Le point $C(-7; -19)$ appartient t-il à la droite (d_4) ? Justifier.



Exercice 8 :

1. Déterminer, par le calcul, si les points $D(25; -10)$, $E(4; -1)$ et $G(-3; 2)$ sont alignés ou non.
2. Soit (d_4) la droite d'équation réduite $y = -5x + 7$.
   Déterminer, par le calcul, l'équation réduite de la droite (d_5) parallèle à (d_4) passant par le point $H(2; 3)$.

PARTIE II :
S'entrainer, développer les connaissances, rédiger

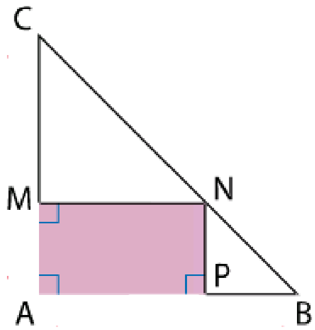
Exercice 9 :

On donne la fonction définie sur R par $f(x) = -x^2 + 6x - 8$. C_f est sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Montrer que pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, $f(x) = -(x-3)^2 + 1$.
2. En déduire une factorisation de $f(x)$.
3. Démontrer par le calcul que f est strictement croissante sur $]-\infty; 3]$.
4. Calculer les coordonnées des points d'intersection de C_f avec l'axe des abscisses.

Exercice 10 :

ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB = 6$ et $AC = 12$.
M, N et P sont trois points tels que : M est un point sur $[AC]$, N est un point sur $[BC]$, P est un point sur $[AB]$ et $AMNP$ est un rectangle.
On note x la longueur AM en mètres et $\mathcal{A}(x)$ l'aire en m² du rectangle $AMNP$.



1. Déterminer l'intervalle I auquel appartient x.
2. Calculer $\mathcal{A}(x)$ l'aire de $AMNP$ en fonction de x.
3. Vérifier que $\mathcal{A}(x) = -\frac{1}{2}(x-6)^2 + 18$
4. Démontrer que $\mathcal{A}(x)$ admet un maximum sur I.
5. Quel est le maximum de cette aire ? A quelle position du point M cela correspond-il ?
6. Calculer l'aire de CMN, notée $\mathcal{B}(x)$.
7. On souhaite savoir pour quelles valeurs de x on a $\mathcal{A}(x) > \mathcal{B}(x)$.
   a. Montrer que cette inéquation est équivalente à $(12-x)(x-4) > 0$.
   b. Résoudre cette inéquation.

Exercice 11 :

Soit (O, I, J) un repère orthonormé du plan.
Soient $A(-3; -1)$, $B(-2 ; 2)$ et $C(3 ; -3)$

1. Faire une figure dans un repère, qui sera complété par la suite.
2. Démontrer que le triangle est rectangle en A
3. a. En déduire la position du point H, centre du cercle $\mathcal{C}$ circonscrit au triangle ABC.
   b. Déterminer par le calcul les coordonnées du point H.
4. Calculer le rayon du cercle $\mathcal{C}$
5. Soit M le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.
   a. Calculer l'aire du triangle ABC.
   b. Exprimer l'aire du triangle ABC en fonction de la longueur AM.
   c. En déduire la longueur AM.

Exercice 12 :

Soit les points $A(2;-1)$, $B(3;7)$, $C(-5;1)$ et $U(11;13)$.

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ puis celles du vecteur $-\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}$.
2. Déterminer les coordonnées du point V défini par : $\overrightarrow{BV}=-\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}$.
3. Montrer que le quadrilatère $CUAV$ est un parallélogramme.

On pourra représenter les points et les vecteurs dans un repère pour s'aider mais cela ne remplacera pas une réponse algébrique argumentée.

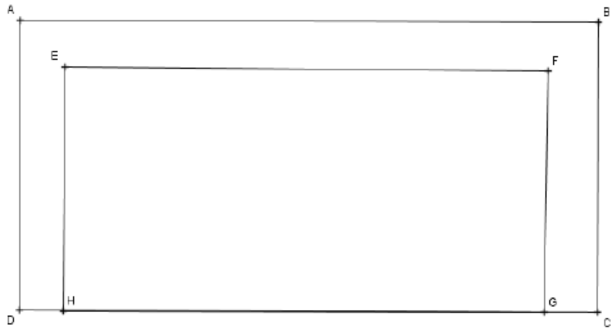
Exercice 13 :

On considère les points A, B et C du plan tels que : $A(-1\,;3), B(3\,;1)$ et $C(-5\,;-2)$

1. Démontrer que les points $M(1\,;2)$ et $N(-1\,;-0{,}5)$ sont les milieux respectifs de $[AB]$ et $[BC]$.
2. Déterminer l'équation réduite de la droite (CM) et celle de la droite (AN).
3. Déterminer algébriquement les coordonnées du point d'intersection de (CM) et (AN).

PARTIE III :
Synthétiser les connaissances et les méthodes, prendre des initiatives, démontrer

Exercice 14 :



Une cheminée est représentée par un rectangle $ABCD$ dont les côtés AD et AB mesurent respectivement 1m et 2m. L'intérieur de la cheminée est représenté par le rectangle $EFGH$.

La partie entre les deux rectangles, appelée le bandeau, a partout la même largeur.

Pour que le père Noël puisse passer facilement par la cheminée, il faut que l'aire du rectangle $EFGH$ soit supérieure ou égale à 0,5m^2.
On cherche la largeur du bandeau qui convient.

On pose x la largeur du bandeau.
1. A quel intervalle appartient x ?
2. Montrer que résoudre le problème revient à résoudre l'inéquation $(1-x)^2-\frac{1}{4}\geq 0$.
3. Résoudre graphiquement le problème posé.
4. Résoudre algébriquement le problème posé.

Exercice 15 :
Partie A
On considère la fonction f définie par $f(x)=\frac{3x+1}{2x-4}$ pour tout nombre réel x différent de 2.
1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
2. a. A l'aide de la calculatrice, tracer la courbe représentative de f.
   b. A partir de cette courbe, conjecturer le tableau de variations de f.
3. L'objectif de cette question est de valider ou corriger la conjecture émise à la question précédente.
   a. Démontrer que pour tous nombres réels a et b différents de 2, on a :
   $$f(b)-f(a)=\frac{7}{2}\times\frac{a-b}{(a-2)(b-2)}.$$
   b. a et b sont deux nombres de l'intervalle $]2;+\infty[$ vérifiant $a<b$.
   Après avoir déterminé le signe de $a-b$, de $a-2$ puis de $b-2$, donner le signe de $f(b)-f(a)$.
   En déduire le sens de variation de f sur l'intervalle $]2\,;+\infty[$.
   c. a et b sont deux nombres de l'intervalle $]-\infty;2[$ vérifiant $a<b$.
   En raisonnant comme dans la question 3.b., déterminer le sens de variation de f sur l'intervalle $]-\infty;2[$.

Partie B
Procéder de façon analogue pour étudier les variations de la fonction g définie par $g(x)=\frac{x+2}{1-x}$ sur son ensemble de définition.
Vérifier le résultat à l'aide de la calculatrice.

CORRIGES DES EXERCICES

Exercice 1 :

1. $f(8) = \frac{5}{8-2} = \frac{5}{6}$

   L'image de 8 par la fonction f est $\frac{5}{6}$.

   $$f\left(\frac{11}{3}\right) = \frac{5}{\frac{11}{3} - 2} = 5 \div \left(\frac{11}{3} - \frac{6}{3}\right) = 5 \div \frac{5}{3} = 5 \times \frac{3}{5} = 3$$

   Diviser par une fraction, c'est multiplier par son inverse.

   L'image par la fonction $\boldsymbol{f}$ de $\boldsymbol{\frac{11}{3}}$ est 3

2. $f(3) = \frac{5}{3-2} = 5$ donc les point de coordonnées $(3\ ;\ 5)$ est un point de la courbe représentative de f.

   2 n'appartient pas à l'ensemble de définition de f donc **le point de coordonnées $(\mathbf{2}\ ;\ \mathbf{0})$ n'appartient pas à la courbe représentative de $\boldsymbol{f}$.**

Exercice 2 :

1. L'ensemble de définition de la fonction f est $\mathcal{D}_f = [\mathbf{-6}\,;\mathbf{10}]$.
2. a. $\mathcal{S} = \{\mathbf{-6}\} \cup [\mathbf{1};\mathbf{10}]$

   b. $\mathcal{S} = [\mathbf{-6};\mathbf{2}[\cup]\mathbf{5};\mathbf{8}[$
3. Tableau de valeurs de f :

x	-6	0	1	2	4	5	6	8	10
$f(x)$	2	3	2	0	-3	0	1	0	-3

4. Tableau de variation de f sur son ensemble de définition :

x	-6		-3		4		6		10
Variations de f			4				1		
	2	↗		↘	-3	↗		↘	-3

5. Tableau de signes de f sur son ensemble de définition :

x	-6		2		5		8		10
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

6. **Le maximum de $\boldsymbol{f}$ sur son ensemble de définition est 4 ; il est atteint en $\boldsymbol{x = -3}$.**
7. **Le minimum de $\boldsymbol{f}$ sur son ensemble de définition est $\mathbf{-3}$; il est atteint en $\boldsymbol{x = 4}$ et en $\boldsymbol{x = 10}$.**

Exercice 3 :

1. On factorise d'abord le numérateur de cette fonction :

   $$f(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{2(3x+1)}$$

   On cherche les valeurs d'annulation de la fonction :

   $x - 2 = 0$ $\quad$ $x + 2 = 0$

   $x = 2$ $\quad$ $x = -2$

   Puis la valeur interdite :

   $3x + 1 = 0$

   $x = -\frac{1}{3}$

   Ainsi on obtient le tableau de signes suivant :

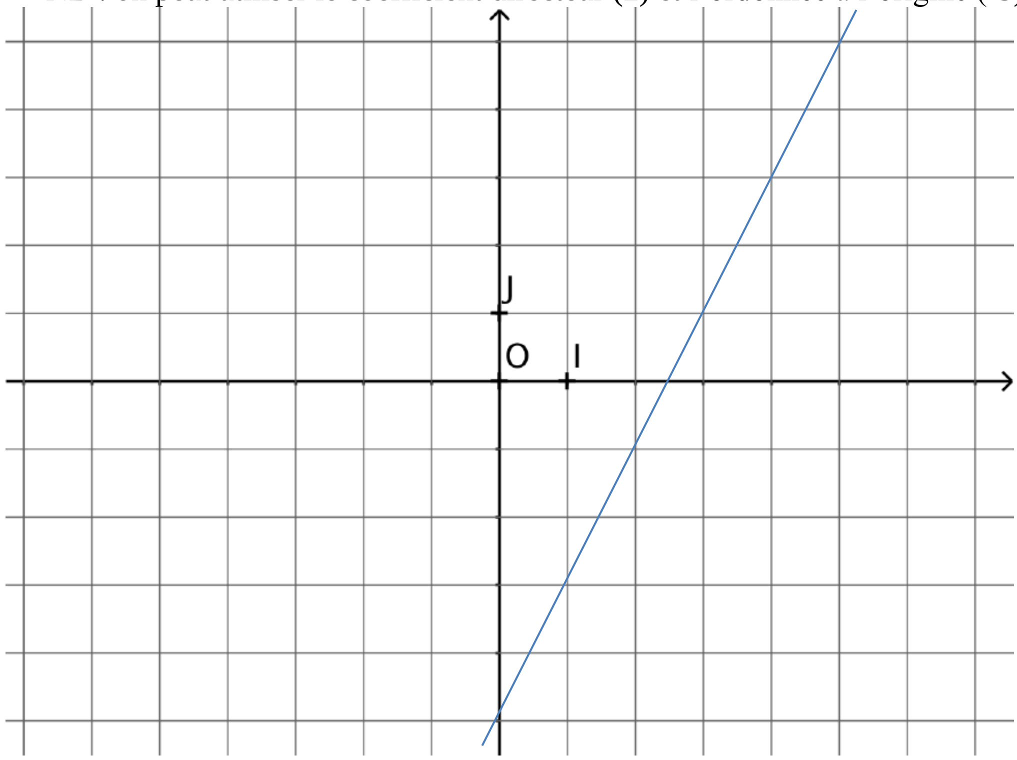
x	$-\infty$		-2		$-\frac{1}{3}$		2		$+\infty$
Signe de $(x-2)$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $(x+2)$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
Signe de 2		$+$		$+$		$+$		$+$	
Signe de $(3x+1)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	0	$+$	

On indique la valeur interdite avec une double barre

2. L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \leq 0$ est $\boldsymbol{S} =]-\infty; \mathbf{-2}] \cup]-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}; \mathbf{2}]$

Exercice 4 :

1. f est une fonction affine donc son expression algébrique est de la forme : $f(x) = ax + b$.
   Déterminons a :
   $$a = \frac{f(13) - f(7)}{13 - 7}$$
   $$= \frac{40 - 22}{13 - 7}$$
   $$= \frac{18}{6}$$
   $$= 3$$
   Donc f est de la forme $f(x) = 3x + b$.
   Déterminons b :
   $f(7) = 22 \iff 3 \times 7 + b = 22$
   $\iff 21 + b = 22$
   $\iff b = 1$
   Ainsi la fonction f cherchée a pour expression algébrique : $\boldsymbol{f(x) = 3x + 1}$.
2. a. La courbe représentative de g est une droite puisque g est une fonction affine.
   Pour la tracer, on peut déterminer 2 points en déterminant les images de deux nombres : $g(1) = 2 \times 1 - 5 = -3$ et $g(5) = 2 \times 5 - 5 = 5$, donc la droite passe par les points de coordonnées $(1; -3)$ et $(5; 5)$.
   NB : on peut utiliser le coefficient directeur (2) et l'ordonnée à l'origine (-5).



b. Tableau de signes de $h(x)$:

$-5x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{8}{5} = 1{,}6$

x	$-\infty$ 1,6 $+\infty$
Signe de $h(x)$	+ 0 −

Signe de $a = -5$ à droite du zéro

Exercice 5 :

$\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{CA} = \boldsymbol{\overrightarrow{EF}}$

$\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CA} = \boldsymbol{\vec{0}}$

$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \boldsymbol{\overrightarrow{BC}}$

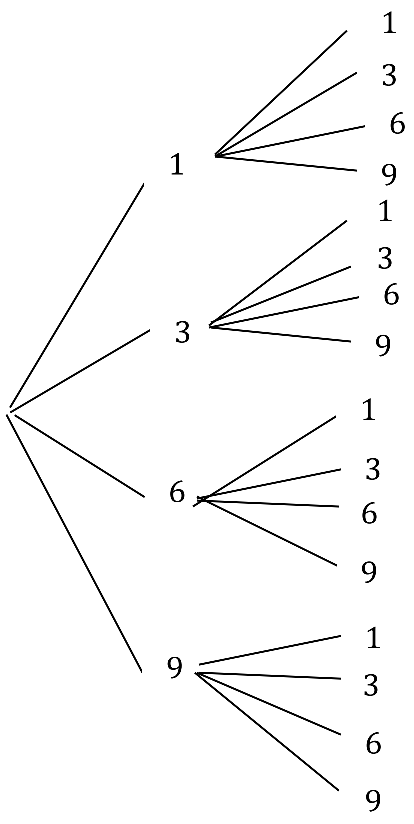
$\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB} = \boldsymbol{\overrightarrow{AC}}$

$\overrightarrow{EA} - \overrightarrow{CF} = \boldsymbol{\overrightarrow{FB}}$

$\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CE} = \boldsymbol{\overrightarrow{BF}}$

Exercice 6 :

1. a. Voici l'arbre représentant l'expérience aléatoire :



L'univers de cette expérience aléatoire est :

$$\boldsymbol{\Omega = \{11; 13; 16; 19; 31; 33; 36; 39; 61; 63; 66; 69; 91; 93; 96; 99\}}$$

b. Cette expérience aléatoire comporte **16 issues**.

2. Nous sommes dans une situation d'équiprobabilité car les 4 jetons sont indiscernables au toucher. On utilise donc la formule :

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'issues réalisant } A}{\text{nombre total d'issues}}$$

a. Parmi les issues, 4 sont des nombres pairs donc $\boldsymbol{P(A)} = \boldsymbol{\frac{4}{16}} = \boldsymbol{\frac{1}{4}}$.

Parmi les issues, 9 sont des multiples de 3 donc $\boldsymbol{P(B)} = \boldsymbol{\frac{9}{16}}$.

$\boldsymbol{P(\overline{B})} = 1 - P(B) = 1 - \frac{9}{16} = \boldsymbol{\frac{7}{16}}$.

b. $A \cap B$: « le nombre obtenu est pair ET est un multiple de 3 »

$A \cap B = \{36; 66; 96\}$, donc $\boldsymbol{P(A \cap B) = \frac{3}{16}}$.

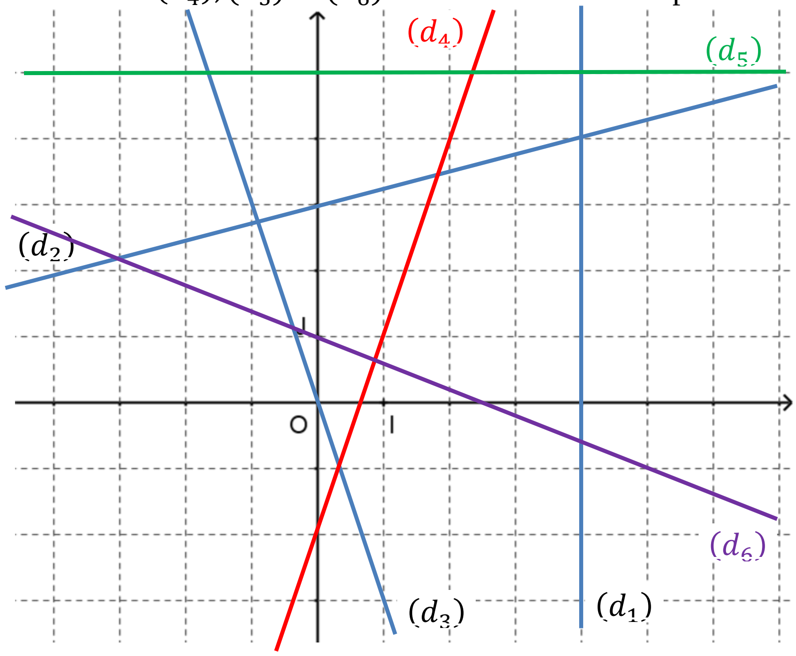
c. $\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$

d. $A \cup B$: « le nombre obtenu est pair OU est un multiple de 3 »
D'après la formule donnée dans la question précédente,

$$\boldsymbol{P(A \cup B)} = \frac{4}{16} + \frac{9}{16} - \frac{3}{16}$$
$$= \frac{10}{16}$$
$$= \boldsymbol{\frac{5}{8}}$$

<u>Exercice 7 :</u>

4. Par lecture graphique :
   - (d_1) a pour équation réduite : $\boldsymbol{x = 4}$;
   - (d_2) a pour équation réduite : $\boldsymbol{y = \frac{1}{4}x + 3}$;
   - (d_3) a pour équation réduite : $\boldsymbol{y = -3x}$.
5. Les droites $(d_4), (d_5)$ et (d_6) sont tracées dans le repère ci-dessous :



6. Pour $x = -7, y = 3 \times (-7) - 2 = -23 \neq -19$, donc **le point $\boldsymbol{C(-7; -19)}$ n'appartient pas à la droite $\boldsymbol{(d_4)}$** .

<u>Exercice 8 :</u>

1. Le coefficient directeur de (DE) est : $\frac{y_E - y_D}{x_E - x_D} = \frac{-1-(-10)}{4-25} = \frac{9}{-21} = -\frac{3}{7}$
   Le coefficient directeur de (EG) est : $\frac{y_E - y_G}{x_E - x_G} = \frac{-1-2}{4-(-3)} = \frac{-3}{7} = -\frac{3}{7}$
   Les droites (DE) et (EG) ont le même coefficient directeur et ont le point E en commun, donc elles sont confondues. Cela prouve que **les points $\boldsymbol{D, E}$ et $\boldsymbol{G}$ sont alignés**.

2. Les droites (d_4) et (d_5) sont parallèles donc elles ont le même coefficient directeur car (d_4) n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées.
   Ainsi, l'équation réduite de (d_5) est donc : $y = -5x + p$.
   Or le point $H(2; 3)$ appartient à (d_5) donc $3 = -5 \times 2 + p \Leftrightarrow p = 3 + 10 = 13$
   L'équation réduite de la droite (d_5) est : $\boldsymbol{y = -5x + 13}$.

<u>Exercice 9 :</u>

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{-(x-3)^2+1} = -(x^2-6x+9)+1$
$= -x^2+6x-9+1$
$= -x^2+6x-8$
$= \boldsymbol{f(x)}$

On développe à l'aide de l'identité remarquable : $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$

2. $\boldsymbol{f(x)} = -(x-3)^2+1$
$= 1-(x-3)^2$
$= 1^2-(x-3)^2$
$= \big(1-(x-3)\big)\big(1+(x-3)\big)$
$= (1-x+3)(1+x-3)$
$= \boldsymbol{(4-x)(x-2)}$ ← forme factorisée

On factorise à l'aide de l'identité remarquable : $a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$

3. Soient a et b appartenant à l'intervalle $]-\infty;3]$ tels que $a<b$.
On cherche à comparer $f(a)$ et $f(b)$, c'est-à-dire $-(a-3)^2+1$ et $-(b-3)^2+1$.
$a<b \Leftrightarrow a-3<b-3$
$\Leftrightarrow (a-3)^2 > (b-3)^2$ car a et b appartiennent à $]-\infty;3]$, donc $a-3$ et $b-3$ sont négatifs, et la fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$.
$\Leftrightarrow -(a-3)^2 < -(b-3)^2$
$\Leftrightarrow -(a-3)^2+1 < -(b-3)^2+1$
$\Leftrightarrow f(a) < f(b)$
L'ordre a été conservé, donc $\boldsymbol{f}$ est strictement croissante sur $\boldsymbol{]-\infty;3]}$.

4. $f(x)=0 \Leftrightarrow (4-x)(x-2)=0$
$\Leftrightarrow 4-x=0$ ou $x-2=0$
$\Leftrightarrow x=4$ ou $x=2$

On choisit la forme factorisée pour avoir une équation produit nul

Les points d'intersection de C_f avec l'axe des abscisses ont pour abscisses 2 et 4.

Les points d'intersection avec l'axe des abscisses ont pour ordonnée 0.

Donc les points d'intersection de $\boldsymbol{C_f}$ avec l'axe des abscisses ont pour coordonnées $\boldsymbol{(2;0)}$ et $\boldsymbol{(4;0)}$.

__**Exercice 10 :**__

1. AM varie entre 0 (car c'est une longueur) et 12 car $AC=12$, donc $\boldsymbol{I=[0;12]}$.
2. $\mathcal{A}(x) = AM \times AP$
On sait que $AM=x$. Il reste à déterminer AP en fonction de x.
Dans le triangle ABC, $N\in[BC]$, $M\in[AC]$ et $(MN)//(AB)$ (car $AMNP$ est un rectangle). Donc d'après le théorème de Thalès :
$\frac{MN}{AB} = \frac{CM}{AC}$ soit $\frac{MN}{6} = \frac{12-x}{12}$
On en déduit (par produit en croix) que $MN = \frac{6(12-x)}{12} = \frac{12-x}{2}$, donc $AP = MN = \frac{12-x}{2}$.
Ainsi : $\boldsymbol{\mathcal{A}(x) = x \times \frac{12-x}{2} = \frac{12x-x^2}{2}}$
3. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\boldsymbol{-\frac{1}{2}(x-6)^2+18} = -\frac{1}{2}(x^2-12x+36)+18$
$= -\frac{1}{2}x^2+6x-18+18$
$= -\frac{x^2}{2}+6x$
$= \frac{-x^2+12x}{2}$
$= \boldsymbol{\mathcal{A}(x)}$
4. Pour tout $x\in I$, $(x-6)^2 \geq 0$, donc :

$-\frac{1}{2}(x-6)^2 \leq 0$ et $-\frac{1}{2}(x-6)^2 + 18 \leq 18$.

Pour démontrer que 18 est le maximum de $\mathcal{A}(x)$, il reste à montrer que 18 est une valeur atteinte, c'est-à-dire que 18 a un antécédent par la fonction $\mathcal{A}$:

On résout donc $\mathcal{A}(x) = 18 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}(x-6)^2 + 18 = 18$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}(x-6)^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x-6)^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow x-6=0$$
$$\Leftrightarrow x=6$$

Ainsi, on a démontré que pour tout $x \in I$, $\mathcal{A}(x) \leq 18$ et que $\mathcal{A}(6) = 18$, donc $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ **admet un maximum égal à 18.**

5. Le maximum de l'aire est donc de 18 m², il est atteint pour $x = 6$, c'est-à-dire lorsque $\boldsymbol{M}$ **est à 6 m du point** $\boldsymbol{A}$**.**

6. $\boldsymbol{\mathcal{B}(x)} = \frac{1}{2}(CM \times MN)$

$$= \frac{1}{2}(12-x) \times \frac{12-x}{2}$$
$$= \boldsymbol{\frac{(12-x)^2}{4}}$$

7. a. $\mathcal{A}(x) > \mathcal{B}(x) \Leftrightarrow \frac{x(12-x)}{2} > \frac{(12-x)^2}{4}$

$$\Leftrightarrow 2x(12-x) > (12-x)^2$$

On a multiplié les deux membres de l'inéquation par 4

$$\Leftrightarrow 2x(12-x) - (12-x)^2 > 0$$
$$\Leftrightarrow (12-x)\big(2x-(12-x)\big) > 0$$
$$\Leftrightarrow (12-x)(2x-12+x) > 0$$
$$\Leftrightarrow (12-x)(3x-12) > 0$$
$$\Leftrightarrow (12-x)3(x-4) > 0$$

On a factorisé $(3x-12)$ par 3

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{(12-x)(x-4) > 0}$$

On a divisé les deux membres de l'inéquation par 3

b. Pour résoudre cette inéquation, on établit le tableau de signes de $(12-x)(x-4)$:

$12 - x = 0$ $\qquad$ $x - 4 = 0$

$\Leftrightarrow x = 12$ $\qquad$ $\Leftrightarrow x = 4$

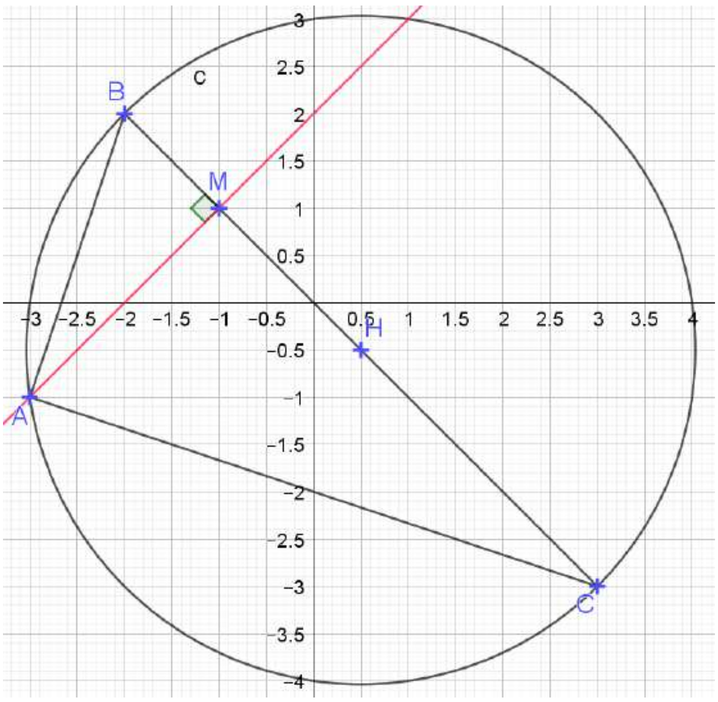
Ainsi on obtient le tableau de signes suivant :

x	0		4		12
Signe de $(12-x)$		$+$		$+$	0
Signe de $(x-4)$		$-$	0	$+$	
Signe de $(12-x)(x-4)$		$-$	0	$+$	0

L'ensemble des solutions de l'inéquation est l'intervalle $]4; 12[$, ce qui signifie que **l'aire de** $\boldsymbol{AMNP}$ **est supérieure à l'aire de** $\boldsymbol{CMN}$ **lorsque** $\boldsymbol{x}$ **vaut entre 4 et 12 mètres.**

<u>Exercice 11</u> :

1. Figure :



2. $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
$= \sqrt{(-2+3)^2 + (2+1)^2}$
$= \sqrt{1+9}$
$= \sqrt{10}$
$BC = \sqrt{(3+2)^2 + (-3-2)^2}$
$= \sqrt{25+25}$
$= \sqrt{50}$
$AC = \sqrt{(3+3)^2 + (-3+1)^2}$
$= \sqrt{36+4}$
$= \sqrt{40}$
On a, d'une part, $BC^2 = \sqrt{50}^2 = 50$ et d'autre part, $AB^2 + AC^2 = \sqrt{10}^2 + \sqrt{40}^2 = 10 + 40 = 50$.
Ainsi, dans le triangle $ABC, AB^2 + AC^2 = BC^2$.
On en déduit, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, que **le triangle $\boldsymbol{ABC}$ est rectangle en $\boldsymbol{A}$**.

3. a. Dans un triangle rectangle, le centre du cercle circonscrit est le milieu de l'hypoténuse. **Donc $\boldsymbol{H}$ est le milieu de $[\boldsymbol{BC}]$.**
b. $x_H = \frac{x_B + x_C}{2}$ $\qquad$ $y_H = \frac{y_B + y_C}{2}$
$= \frac{-2+3}{2}$ $\qquad$ $= \frac{2-3}{2}$
$= \frac{1}{2}$ $\qquad$ $= \frac{-1}{2}$
Les coordonnées du point $\boldsymbol{H}$ sont $\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

4. Le rayon du cercle $\mathcal{C}$ est égal à la longueur HA.

$$HA = \sqrt{(x_H - x_A)^2 + (y_H - y_A)^2}$$
$$= \sqrt{\left(\frac{1}{2}+3\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}+1\right)^2}$$
$$= \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$
$$= \sqrt{\frac{50}{4}}$$
$$= \sqrt{\frac{5\times5\times2}{2\times2}}$$
$$= \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

Le rayon du cercle $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ vaut $\boldsymbol{\frac{5\sqrt{2}}{2}}$.

5. a. $\boldsymbol{\mathcal{A}_{ABC}} = \frac{AB\times AC}{2}$
$= \frac{\sqrt{10}\times\sqrt{40}}{2}$
$= \frac{\sqrt{400}}{2}$
$= \mathbf{10}$

b. $\boldsymbol{\mathcal{A}_{ABC}} = \frac{AM\times BC}{2}$
$= \frac{AM\times\sqrt{50}}{2}$
$= \boldsymbol{\frac{AM\times5\sqrt{2}}{2}}$

car $\sqrt{50} = \sqrt{5\times5\times2} = 5\sqrt{2}$

c. On en déduit que $\frac{AM\times5\sqrt{2}}{2} = 10$, c'est-à-dire que $\boldsymbol{AM} = \frac{2\times20}{5\sqrt{2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = \boldsymbol{4\sqrt{2}}$

On a multiplié le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{2}$ afin de n'avoir une racine qu'au numérateur

Exercice 12 :

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \end{pmatrix}$
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3-2 \\ 7+1 \end{pmatrix}$
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} x_C-x_B \\ y_C-y_B \end{pmatrix}$
$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -5-3 \\ 1-7 \end{pmatrix}$
$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -8 \\ -6 \end{pmatrix}$

$-\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -1+2\times(-8) \\ -8+2\times(-6) \end{pmatrix}$
$-\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -1-16 \\ -8-12 \end{pmatrix}$
$\boldsymbol{-\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -17 \\ -20 \end{pmatrix}}$

2. $\overrightarrow{BV}\begin{pmatrix} x_V-x_B \\ y_V-y_B \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{BV}\begin{pmatrix} x_V-3 \\ y_V-7 \end{pmatrix}$ et $-\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -17 \\ -20 \end{pmatrix}$

Donc $\overrightarrow{BV} = -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow x_V - 3 = -17$ et $y_V - 7 = -20$
$\Leftrightarrow x_V = -14$ et $y_V = -13$

Donc $\boldsymbol{V(-14;-13)}$.

3. $\overrightarrow{CU}\begin{pmatrix} x_U-x_C \\ y_U-y_C \end{pmatrix}$
$\overrightarrow{CU}\begin{pmatrix} 11+5 \\ 13-1 \end{pmatrix}$
$\overrightarrow{CU}\begin{pmatrix} 16 \\ 12 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{VA}\begin{pmatrix} x_A-x_V \\ y_A-y_V \end{pmatrix}$
$\overrightarrow{VA}\begin{pmatrix} 2+14 \\ -1+13 \end{pmatrix}$
$\overrightarrow{VA}\begin{pmatrix} 16 \\ 12 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CU} = \overrightarrow{VA}$ donc le quadrilatère $\boldsymbol{CUAV}$ **est un parallélogramme**.

Exercice 13 :

1. Le milieu de [AB] a pour coordonnées $\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$ soit $\left(\frac{-1+3}{2};\frac{3+1}{2}\right)$ soit $(1\,;2)$.

De même, le milieu de [BC] a pour coordonnées $\left(\frac{3+(-5)}{2};\frac{1+(-2)}{2}\right)$ soit $(-1;-0{,}5)$.

Les points M$(\mathbf{1}\,;\mathbf{2})$ et N$(\mathbf{-1}\,;\mathbf{-0,5})$ sont bien les milieux respectifs de [AB] et [BC].

2. • $x_C \neq x_M$ donc la droite (CM) n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées. Son équation est de la forme $y = ax + b$.

Calcul du coefficient directeur : $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_M - y_C}{x_M - x_C} = \frac{2-(-2)}{1-(-5)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. Donc $y = \frac{2}{3}x + b$.

Calcul de l'ordonnée à l'origine : M(1 ; 2) ∈ (CM) donc $2 = \frac{2}{3}\times1 + b$ et donc $b = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$.

L'équation réduite de la droite (CM) est $\boldsymbol{y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}}$**.**

- $x_A = x_N = -1$ donc **l'équation réduite de la droite (AN) est** $\boldsymbol{x = -1}$.

3. Les droites (CM) et (AN) ne sont pas parallèles (l'une est parallèle à l'axe des ordonnées et pas l'autre). Les coordonnées de leur point d'intersection vérifient le système :

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = \frac{2}{3} \times (-1) + \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Les coordonnées du point d'intersection de (CM) et (AN) sont donc $\boldsymbol{\left(-1; \frac{2}{3}\right)}$**.**

__Exercice 14 :__

1. $x \in [\mathbf{0}; \mathbf{1}]$.
2. $$\begin{aligned} \mathcal{A}_{EFGH} &= GH \times FG \\ &= (2 - 2x) \times (1 - x) \\ &= 2(1 - x) \times (1 - x) \\ &= 2(1 - x)^2 \end{aligned}$$

   Le problème posé revient à résoudre $\mathcal{A}_{EFGH} \geq 0{,}5 \Leftrightarrow 2(1 - x)^2 \geq \frac{1}{2}$

   $\Leftrightarrow (1 - x)^2 \geq \frac{1}{4}$

   On a divisé par 2 les deux membres de l'inéquation

   $\Leftrightarrow \boldsymbol{(1 - x)^2 - \frac{1}{4} \geq 0}$

3. On trace la fonction f définie par $f(x) = (1 - x)^2 - \frac{1}{4}$ sur la calculatrice, sur l'intervalle $[0; 1]$, et on détermine les valeurs de x pour lesquelles la courbe représentant f est au dessus de l'axe des abscisses : ce sont les x qui sont dans l'intervalle $[0; 0{,}5]$. Donc **le bandeau doit avoir une largeur inférieure ou égale à 0,5 m pour que le père Noël puisse passer.**

4. $$\begin{aligned} (1 - x)^2 - \frac{1}{4} \geq 0 &\Leftrightarrow (1 - x)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \left(1 - x - \frac{1}{2}\right)\left(1 - x + \frac{1}{2}\right) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} - x\right)\left(\frac{3}{2} - x\right) \geq 0 \end{aligned}$$

   Pour résoudre cette inéquation, on établit le tableau de signes de $\left(\frac{1}{2} - x\right)\left(\frac{3}{2} - x\right)$:

   $\frac{1}{2} - x = 0$ $\quad\quad$ $\frac{3}{2} - x = 0$

   $\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ $\quad\quad$ $\Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

   Ainsi on obtient le tableau de signes suivant :

   On ne fait l'étude que sur l'intervalle $[0; 1]$ qui est notre intervalle d'étude d'après la question 1.

x	0		$\frac{1}{2}$		1
Signe de $\left(\frac{1}{2} - x\right)$		$+$	0	$-$	
Signe de $\left(\frac{3}{2} - x\right)$		$+$		$+$	
Signe de $\left(\frac{1}{2} - x\right)\left(\frac{3}{2} - x\right)$		$+$	0	$-$	

   On retrouve que $\left(\frac{1}{2} - x\right)\left(\frac{3}{2} - x\right)$, c'est-à-dire $\boldsymbol{(1 - x)^2 - \frac{1}{4}}$ **est positif sur** $\boldsymbol{\left[0; \frac{1}{2}\right]}$.

Exercice 15 :

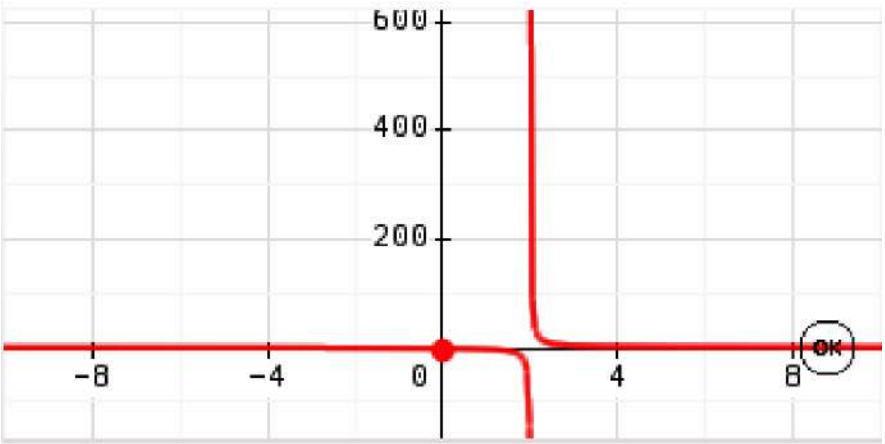
Partie A

f est la fonction définie par $f(x) = \frac{3x+1}{2x-4}$ pour tout nombre réel x différent de 2.

1. Valeur interdite : $2x - 4 = 0 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$

   Ainsi l'ensemble de définition de f est $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{2\} =]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$.

2. a. Voici la courbe représentative de f obtenue grâce à la calculatrice :



   b. A partir de cette courbe, on conjecture le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
Variations de f	↘	‖	↘

3.

   a. Pour tous nombres réels a et b différents de 2, on a :

$$\boldsymbol{f(b) - f(a)} = \frac{3b+1}{2b-4} - \frac{3a+1}{2a-4}$$
$$= \frac{3b+1}{2(b-2)} - \frac{3a+1}{2(a-2)}$$
$$= \frac{(3b+1)(a-2)}{2(b-2)(a-2)} - \frac{(3a+1)(b-2)}{2(a-2)(b-2)}$$
$$= \frac{3ba - 6b + a - 2}{2(b-2)(a-2)} - \frac{3ab - 6a + b - 2}{2(a-2)(b-2)}$$
$$= \frac{(3ba - 6b + a - 2) - (3ab - 6a + b - 2)}{2(b-2)(a-2)}$$
$$= \frac{3ba - 6b + a - 2 - 3ab + 6a - b + 2}{2(b-2)(a-2)}$$
$$= \frac{-7b + 7a}{2(b-2)(a-2)}$$
$$= \frac{7(a-b)}{2(b-2)(a-2)}$$
$$= \boldsymbol{\frac{7}{2} \times \frac{a-b}{(a-2)(b-2)}}$$

Pour soustraire ces deux fractions, il faut les réduire au même dénominateur.
Le dénominateur commun est $2(a-2)(b-2)$

   b. a et b sont deux nombres de l'intervalle $]2; +\infty[$ vérifiant $a < b$. Alors :

- $a - b < 0$ (car $a < b$)
- $a - 2 > 0$ (car $a \in]2; +\infty[$ donc $a > 2$)
- $b - 2 > 0$ (car $b \in]2; +\infty[$ donc $b > 2$)

D'après la règle des signes d'un produit et d'un quotient, on en déduit que $f(b) - f(a) < 0$.
Cela signifie que $f(a) > f(b)$.
Ainsi, on a démontré que pour tous $a, b \in]2\,;+\infty[$ tels que $a < b$, on a $f(a) > f(b)$.
L'ordre a changé, **donc f est décroissante sur l'intervalle $]2\,;+\infty[$.**

c. a et b sont deux nombres de l'intervalle $]-\infty; 2[$ vérifiant $a < b$. Alors :

- $a - b < 0$ (car $a < b$)
- $a - 2 < 0$ (car $a \in]-\infty; 2[$ donc $a < 2$)
- $b - 2 < 0$ (car $b \in]-\infty; 2[$ donc $b < 2$)

D'après la règle des signes d'un produit et d'un quotient, on en déduit que $f(b) - f(a) < 0$.
Cela signifie que $f(a) > f(b)$.
Ainsi, on a démontré que pour tous $a, b \in]-\infty; 2[$ tels que $a < b$, on a $f(a) > f(b)$.
L'ordre a changé, **donc f est décroissante sur l'intervalle $]-\infty; 2[$.**

Partie B

g est la fonction définie par $g(x) = \frac{x+2}{1-x}$.
Commençons par déterminer l'ensemble de définition de g :
Valeur interdite : $1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1$
Ainsi l'ensemble de définition de g est $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}\backslash\{1\} =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$.

Pour tous nombres réels a et b différents de 1, on a :

Pour soustraire ces deux fractions, il faut les réduire au même dénominateur.
Le dénominateur commun est $(1-b)(1-a)$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{g(b) - g(a)} &= \frac{b+2}{1-b} - \frac{a+2}{1-a} \\
&= \frac{(b+2)(1-a)}{(1-b)(1-a)} - \frac{(a+2)(1-b)}{(1-a)(1-b)} \\
&= \frac{b - ab + 2 - 2a}{(1-b)(1-a)} - \frac{a - ab + 2 - 2b}{(1-a)(1-b)} \\
&= \frac{(b - ab + 2 - 2a) - (a - ab + 2 - 2b)}{(1-b)(1-a)} \\
&= \frac{b - ab + 2 - 2a - a + ab - 2 + 2b}{(1-b)(1-a)} \\
&= \frac{3b - 3a}{(1-b)(1-a)} \\
&= \boldsymbol{3 \times \frac{b-a}{(1-b)(1-a)}}
\end{aligned}$$

a et b sont deux nombres de l'intervalle $]1; +\infty[$ vérifiant $a < b$. Alors :

- $b - a > 0$ (car $a < b$)
- $1 - a < 0$ (car $a \in]1; +\infty[$ donc $a > 1$)
- $1 - b < 0$ (car $b \in]1; +\infty[$ donc $b > 1$)

D'après la règle des signes d'un produit et d'un quotient, on en déduit que $g(b) - g(a) > 0$.
Cela signifie que $g(a) < g(b)$.
Ainsi, on a démontré que pour tous $a, b \in]1\,;+\infty[$ tels que $a < b$, on a $g(a) < g(b)$.
L'ordre a été conservé, **donc g est croissante sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$.**

a et b sont deux nombres de l'intervalle $]-\infty; 1[$ vérifiant $a < b$. Alors :

- $b - a > 0$ (car $a < b$)
- $1 - a > 0$ (car $a \in]-\infty; 1[$ donc $a < 1$)
- $1 - b > 0$ (car $b \in]-\infty; 1[$ donc $b < 1$)

D'après la règle des signes d'un produit et d'un quotient, on en déduit que $g(b) - g(a) > 0$.
Cela signifie que $g(a) < g(b)$.

Ainsi, on a démontré que pour tous $a, b \in]-\infty; 1[$ tels que $a < b$, on a $g(a) < g(b)$.
L'ordre a été conservé, **donc g est croissante sur l'intervalle** $]-\infty; \mathbf{1}[$.

On vérifie à l'aide de la calculatrice en traçant la représentation graphique de g :