MP

Une collection dirigée par
Sylvain Rondy

Fiches-méthodes

Maths

Exercices corrigés

Maxime Bailleul
Jean-Paul Bonnet
Franck Nguyen Van Sang
Denis Petrequin

ellipses

MP

Une collection dirigée
par **Sylvain Rondy**

Maths

Maxime Bailleul
Professeur au lycée Robespierre à Arras

Jean-Paul Bonnet
Professeur au lycée Wallon à Valenciennes

Franck Nguyen Van Sang
Professeur au lycée Raspail à Paris

Denis Petrequin
Professeur au lycée Chateaubriand à Rennes

ellipses

Sommaire

Algèbre générale

Algèbre linéaire

Réduction des endomorphismes

Fonctions convexes

Espaces vectoriels normés

Algèbre bilinéaire

Dénombrabilité et familles sommables

Séries numériques

Suites et séries de fonctions

Séries entières

Intégration

Compléments de probabilité

Exponentielle de matrices et équations différentielles

Calcul différentiel


Algèbre
générale

Reconnaitre un groupe, un anneau ou un corps par les axiomes

1

Quand on ne sait pas !

- On appelle groupe tout couple $(G,\star)$ où G est un ensemble et $\star$ est une loi de composition interne telle que
  - La loi est associative
  - Il existe un élément e appelé élément neutre de G tel que pour tout x de G,
  $$x \star e = e \star x = x$$
  - Pour tout élément x, il existe un élément y tel que $x \star y = y \star x = e$.
  L'élément y est le symétrique de x

  Si de plus, la loi $\star$ est commutative, on dit que $(G,\star)$ est un groupe commutatif ou un groupe abélien.
- On appelle anneau tout triplet $(A,+,\times)$ où A est un ensemble et $+$ et $\times$ des lois de composition internes telles que
  - $(A,+)$ soit un groupe abélien dont le neutre se note 0_A et s'appelle l'élément nul.
  - La loi $\times$ est associative
  - Il existe un élément 1_A tel que pour tout $x \in A$, $1_A \times x = x \times 1_A = x$
  - La multiplication est distributive par rapport à l'addition, c'est-à-dire :
  $$\forall (x,y,z) \in A^3, x\times(y+z) = (x\times y)+(x\times z) \text{ et } (y+z)\times x = (y\times x)+(z\times x)$$

  Si $(A,+,\times)$ est un anneau et que la loi $\times$ est commutative, on dit que c'est un anneau commutatif.
- On appelle corps tout anneau commutatif $(A,+,\times)$ tel que tout élément non nul x de A admette un inverse, c'est-à-dire, un élément y tel que $x \times y = 1_A$.

Que faire ?

- Quand on veut démontrer que $(G,\star)$ (ou $(A,+,\times)$) est un groupe (ou un anneau), la meilleure méthode est de démontrer que c'est un sous-groupe (ou un sous-anneau) d'un groupe (ou anneau) connu. Cela sera abordé dans la fiche 3.

- Pour montrer, en revenant aux axiomes que $(G, \star)$ est un groupe, il faut vérifier que la loi est associative (ce qui est souvent assez formel), trouver l'élément neutre de la loi et, pour tout élément x exhiber son symétrique.

  EXEMPLE 1 Rappelons un exemple du cours. On veut montrer que si X est un ensemble, l'ensemble S_X des bijections de X dans X est un groupe pour la composition.

  — On vérifie que la loi $\circ$ est une loi interne de S_X. En effet si f et g sont des bijections de X dans X alors $f \circ g$ aussi.

  — La loi $\circ$ est associative. En effet si f, g et h appartiennent à S_X,

  $$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$$

  — La fonction identité de X notée $\iota : X \to X$ est un élément neutre pour $\circ$ car, pour tout $x \in X$,

  $$(f \circ \iota)(x) = f(\iota(x)) = f(x) \text{ et } (\iota \circ f)(x) = \iota(f(x)) = f(x)$$

  — Toute fonction f de S_X admet un symétrique puisque, comme f est bijective, il existe une fonction g, elle même bijective vérifiant $f \circ g = g \circ f = \iota$. Il suffit de prendre pour g la bijection réciproque de f.

  On a bien montré que $(S_X, \circ)$ était un groupe. Notons que ce n'est pas un groupe abélien sauf si X a strictement moins de 3 éléments.

Conseils

Dans le cas des groupes, il ne faut pas se mélanger entre les notations additives et les notations multiplicatives. Plus précisément :

- quand on note un groupe additivement (le plus souvent dans le cas des groupe abéliens), l'élément neutre est noté 0 et le symétrique de x, que l'on appelle l'opposé se note $-x$. C'est le cas par exemple du groupe $(\mathbb{Z}, +)$.
- quand on note un groupe multiplicativement, l'élément neutre est noté 1 et le symétrique de x, que l'on appelle l'inverse se note x^{-1}. C'est le cas par exemple du groupe $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \times)$.

Exemple traité

On considère l'opération $\top$ sur $X = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ définie par

$$\forall (x, y) \in X^2, x \top y = x + y + xy$$

1 Montrer que pour tout (x, y) dans X^2, $x \top y = (1 + x)(1 + y) - 1$.

2 Montrer que $(\mathbb{R}, \top)$ est un groupe.

SOLUTION

1 Soit x, y dans X, $(1+x)(1+y) = 1+x+y+xy = 1+x\top y$. La relation voulue s'en déduit.

2 Montrons les axiomes des groupes.

- On commence par remarquer que la loi $\top$ est une loi interne à X. En effet si x et y appartiennent à X alors $(1+x) \neq 0$ et $(1+y) \neq 0$ donc $(1+x)(1+y) \neq 0$ et de ce fait, $x\top y \neq -1$.
- Montrons que la loi $\top$ est associative. Soit x, y et z dans X, en utilisant le calcul précédent,

$$\begin{aligned} (x\top y)\top z &= (1+x\top y)(1+z)-1 \\ &= (1+x)(1+y)(1+z)-1 \\ &= (1+x)(1+y\top z)-1 \\ &= x\top(y\top z) \end{aligned}$$

  La loi est bien associative

- On remarque que 0 est un élément neutre pour $\top$ car pour tout $x \in X$,

$$x\top 0 = 0\top x = x$$

- Pour $x \in X$, on cherche $y \in X$ tel que $x\top y = 0$. On est ramené à résoudre (en y) l'équation $x+y+xy = 0$. Elle est équivalente à $(1+x)y = -x$. Comme x est supposé dans X, $1+x \neq 0$ et ainsi l'unique solution est $y = -\frac{x}{1+x}$ qui appartient bien à X car $x \neq 1+x$. On vérifie de plus que, en posant $y = -\frac{x}{1+x}$, $y\top x = 0$. Finalement $y = -\frac{x}{1+x}$ est le symétrique de x pour la loi $\top$.

On a bien montré tous les axiomes du groupe donc $(X, \top)$ est un groupe (qui est abélien).

Exercices

EXERCICE 1.1 Soit A un ensemble, on considère $P = \mathcal{P}(A)$ l'ensemble des parties de l'ensemble A. Pour toutes parties X et Y de A, on appelle différence symétrique de X et Y et on note $X\Delta Y$ l'ensemble $(X \cup Y) \setminus (X \cap Y)$.
Si X est une partie de A, on note 1_X la fonction caractéristique de X :

$$\begin{array}{rccc} 1_X: & A & \mapsto & \{0,1\} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in X \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

On pourra utiliser le fait que pour deux parties X et Y de A, $X = Y$ si et seulement si $1_X = 1_Y$.

1 Soit X et Y dans P. Montrer que $1_{X\Delta Y} = 1_X + 1_Y - 2 \times 1_X 1_Y$.

2 En déduire que (P, Δ) est un groupe abélien.

3 Soit X et Y dans P. Montrer que $1_{X\cap Y} = 1_X 1_Y$.

4 En déduire que $(P, \Delta, \cap)$ est un anneau commutatif.

5 Montrer que si A n'a pas qu'un seul élément alors $(P, \Delta, \cap)$ n'est pas un corps.

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 1.1

1 On pourra, pour un élément x de A, séparer selon que $x \in A \cap B$, $x \in A \setminus B, \ldots$

2 Utiliser la question précédente pour montrer l'associativité de Δ.

3 Faire le calcul.

4 Utiliser les applications caractéristiques pour montrer la distributivité.

5 Il suffit de montrer que si $X \neq A$ et $X \neq \varnothing$ alors il n'existe pas Y tel que $X \cap Y$ soit le neutre pour $\cap$.

Solutions des exercices

EXERCICE 1.1

1 Soit $x \in A$.

- Si $x \in X \cap Y$ (c'est-à-dire que x est dans X et dans Y), $1_X(x) = 1_Y(x) = 1$ et donc
$$(1_X + 1_Y - 2 \times 1_X 1_Y)(x) = 1 + 1 - 2 = 0 = 1_{X\Delta Y}(x)$$
En effet, x n'appartient pas à $X\Delta Y$.
- Si $x \in X \setminus Y$ (c'est-à-dire que x est dans X et pas dans Y), $1_X(x) = 1$ et $1_Y(x) = 0$ et donc
$$(1_X + 1_Y - 2 \times 1_X 1_Y)(x) = 1 + 0 - 0 = 1 = 1_{X\Delta Y}(x)$$
En effet, x appartient à $X\Delta Y$.
- On traite de même les cas où $x \in Y \setminus X$ et les cas où x n'est ni dans X ni dans Y.

2 Montrons les axiomes des groupes.

- Il est clair que Δ est une loi interne sur P.
- Montrons l'associativité. Soit $(X, Y, Z) \in P^3$.
On veut montrer que $(X\Delta Y)\Delta Z = X\Delta(Y\Delta Z)$. Pour cela, il suffit de montrer que $1_{(X\Delta Y)\Delta Z} = 1_{X\Delta(Y\Delta Z)}$. Or, d'après la question précédente :
$$\begin{aligned}
1_{(X\Delta Y)\Delta Z} &= 1_{X\Delta Y} + 1_Z - 2 \times 1_{X\Delta Y} 1_Z \\
&= 1_X + 1_Y - 2 \times 1_X 1_Y + 1_Z - 2(1_X + 1_X - 2 \times 1_X 1_Y) 1_Z \\
&= 1_X + 1_Y + 1_Z - 2(1_X 1_Y + 1_Y 1_Z + 1_X 1_Z) + 4 \times 1_X 1_Y 1_Z
\end{aligned}$$

Il suffit alors de calculer $1_{X\Delta(Y\Delta Z)}$ et de vérifier que l'on trouve la même expression.

- Comme l'union et l'intersection sont commutatives, la différence symétrique aussi.
- Vérifions que $\varnothing$ est un élément neutre pour Δ. Soit $X \in P$,

$$X\Delta\varnothing = (X \cup \varnothing) \setminus (X \cap \varnothing) = X \setminus \varnothing = X$$

De même, $\varnothing\Delta X = X$ donc $\varnothing$ est bien un élément neutre pour Δ.

- Soit $X \in P$. On cherche son symétrique Y tel que $X\Delta Y = \varnothing$. On remarque que

$$X\Delta X = (X \cup X) \setminus (X \cap X) = X \setminus X = \varnothing$$

On vient donc de voir que le symétrique de X est X lui même.

On a bien montré que (P, Δ) est un groupe abélien.

3 Soit X et Y dans P et $x \in A$,

$$x \in X \cap Y \iff x \in X \text{ et } x \in Y \iff 1_X(x) = 1_Y(x) = 1 \iff (1_X 1_Y)(x) = 1$$

Cela prouve que $1_{X\cap Y} = 1_X 1_Y$.

4 On a déjà vu que (P, Δ) était un groupe abélien. Montrons les axiomes qui restent.

- On sait que la relation $\cap$ est associative et commutative (on peut aussi le démontrer en utilisant la question précédente).
- La partie A elle même est un élément neutre pour $\cap$ car pour tout $X \in P$,

$$X \cap A = A \cap X = X.$$

- Soit X, Y et Z dans P, on veut montrer que $X\Delta(Y \cap Z) = (X\Delta Y) \cap (X\Delta Z)$. Pour cela, on va passer par les applications caractéristiques.

$$\begin{aligned} 1_{X\cap(Y\Delta Z)} &= 1_X 1_{Y\Delta Z} \\ &= 1_X(1_Y + 1_Z - 2 \times 1_Y 1_Z) \\ &= 1_X 1_Y + 1_X 1_Z - 2 \times 1_X 1_Y 1_Z \end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} 1_{(X\cap Y)\Delta(X\cap Z)} &= 1_{X\cap Y} + 1_{X\cap Z} - 2 \times 1_{X\cap Y} 1_{X\cap Z} \\ &= 1_X 1_Y + 1_X 1_Z - 2 \times 1_X^2 1_Y 1_Z \\ &= 1_X 1_Y + 1_X 1_Z - 2 \times 1_X 1_Y 1_Z \end{aligned}$$

La dernière égalité venant du fait que 1_X étant à valeur dans $\{0, 1\}$, $1_X^2 = 1_X$.

Finalement $(P, \Delta, \cap)$ est bien un anneau commutatif.

5 Soit X qui n'est ni A, ni vide (qui existe bien car A n'a pas qu'un seul élément). Pour tout $Y \in P$, $(X \cap Y) \subset X \subsetneq A$. On en déduit que $(X \cap Y) \neq A$ et donc que X n'est pas inversible dans l'anneau $(P, \Delta, \cap)$. On a exhibé un élément non nul qui n'est pas inversible donc l'anneau considéré n'est pas un corps.

Solutions

2 Montrer qu'une application est un morphisme de groupe ou un morphisme d'anneaux

Quand on ne sait pas !

- Soit $(G, \star)$ et $(G', \top)$ deux groupes. Une application $f : G \to G'$ est un morphisme de groupes si pour tout $(g_1, g_2) \in G^2$, $f(g_1 \star g_2) = f(g_1) \top f(g_2)$.
- Soit $(A, +, \times)$ et $(A', +, \times)$ deux anneaux. Une application $f : A \to A'$ est un morphisme d'anneaux si
  — $\forall (x_1, x_2) \in A^2, f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$
  — $\forall (x_1, x_2) \in A^2, f(x_1 \times x_2) = f(x_1) \times f(x_2)$
  — $f(1_A) = f(1_B)$ où 1_A est l'élément neutre pour la multiplication de A et 1_B l'élément neutre pour celle de B.

Un morphisme de groupes (ou d'anneaux) est donc une application qui est compatible avec les opérations des ensembles de départ et d'arrivée.

Que faire ?

Dans la très grande majorité des cas, aussi bien dans le cas des groupes que dans le cas des anneaux, il suffit juste de vérifier les axiomes de la définition.

EXEMPLE 1 Soit $n \geq 2$. On considère le groupe S_n des permutations de n éléments. Soit σ une permutation de S_n, on considère $\varphi : S_n \to S_n$ définie par $\varphi : \tau \mapsto \sigma\tau\sigma^{-1}$. On veut montrer que φ est un morphisme de groupes.
Pour tout $(\tau_1, \tau_2) \in S_n^2$,

$$\varphi(\tau_1)\varphi(\tau_2) = \sigma\tau_1\sigma^{-1}\sigma\tau_2\sigma^{-1} = \sigma\tau_1\tau_2\sigma^{-1} = \varphi(\tau_1\tau_2)$$

On a bien montré que φ est un morphisme de groupes.

EXEMPLE 2 Soit $\mathbb{K}$ un corps et $\mathbb{K}[X]$ l'anneau des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.
Soit $\alpha \in \mathbb{K}$, on considère l'application ε d'évaluation en α.

$$\begin{array}{rccc} \varepsilon : & \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K} \\ & P & \mapsto & P(\alpha) \end{array}$$

On veut vérifier que ε_α est un morphisme d'anneaux.

- Soit $(P_1, P_2) \in (\mathbb{K}[X])^2$,
$$\varepsilon(P_1 + P_2) = (P_1 + P_2)(\alpha) = P_1(\alpha) + P_2(\alpha) = \varepsilon(P_1) + \varepsilon(P_2)$$
- Soit $(P_1, P_2) \in (\mathbb{K}[X])^2$,
$$\varepsilon(P_1 \times P_2) = (P_1 \times P_2)(\alpha) = P_1(\alpha) \times P_2(\alpha) = \varepsilon(P_1) \times \varepsilon(P_2)$$
- L'unité de $\mathbb{K}[X]$ est le polynôme constant égal à $1_{\mathbb{K}}$ que l'on va noter $\mathbf{1}$. On a alors,
$$\varepsilon(\mathbf{1}) = \mathbf{1}(\alpha) = 1_{\mathbb{K}}$$

On a bien montré que ε était un morphisme d'anneaux.

Conseils

Il faut faire attention aux opérations des ensembles de départ et d'arrivée. Par exemple le logarithme néperien est un morphisme de groupes de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ dans $(\mathbb{R}, +)$ car pour tout x, y réels strictement positifs, $\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$.

Exercices

EXERCICE 2.1

On considère les applications φ et ψ définies de $\mathbb{Z}$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ par
$$\varphi : n \mapsto \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \psi : n \mapsto \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1 **a.** Montrer que pour tout entier relatif n, $\varphi(n)$ est inversible.

b. Montrer que φ est un morphisme de groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ dans $(\mathrm{GL}_2(\mathbb{C}), \times)$.

2 L'application ψ est-elle un morphisme d'anneaux de $(\mathbb{Z}, +, \times)$ dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{C}), +, \times)$?

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 2.1

1 **a.** On pourra, par exemple, calculer le déterminant de $\varphi(n)$ pour $n \in \mathbb{Z}$.

b. Vérifier les axiomes d'un morphisme de groupes.

2 Bien penser à essayer de vérifier tous les axiomes d'un morphisme d'anneaux.

EXERCICE 2.1

1 **a.** Soit $n \in \mathbb{Z}$. On a

$$\det(\varphi(n)) = \begin{vmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

On en déduit que $\varphi(n)$ est inversible.

b. Soit n, m deux entiers relatifs,

$$\varphi(n) \times \varphi(m) = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n+m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \varphi(n+m)$$

Cela montre que φ est un morphisme de groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{C}), \times)$.

2 Un calcul simple montre que ψ vérifie les deux premiers axiomes des morphismes d'anneaux ; en effet pour n, m deux entiers relatifs

$$\psi(n) + \psi(m) = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \psi(n+m)$$

et

$$\psi(n) \times \psi(m) = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} nm & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \psi(nm)$$

Cependant, ce n'est pas un morphisme d'anneaux car $\psi(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq I_2$. Donc l'image par ψ du neutre pour la multiplication de $\mathbb{Z}$ n'est pas le neutre pour celle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Montrer qu'une partie d'un groupe (d'un anneau) est un sous-groupe (un sous-anneau)

3

Quand on ne sait pas !

- Soit $(G, \star)$ un groupe. Un sous-groupe de G est une partie H stable par la loi $\star$ et qui est un groupe pour la loi induite par $\star$.
- Soit $(A, +, \times)$ un anneau. Un sous-anneau de A est une partie B telle que $(B, +)$ soit un sous-groupe de $(A, +)$, qui contient 1_A et qui est stable par multiplication.

Que faire ?

Il y a deux méthodes principales pour montrer qu'une partie H est un sous-groupe d'un groupe G.

- On peut montrer qu'une partie H est un sous-groupe d'un groupe G en utilisant la caractérisation suivante : une partie H est un sous-groupe si H n'est pas vide et que pour x, y dans H, $xy^{-1} \in H$. Noter qu'ici, on a utilisé une notation multiplicative du groupe ; dans le cas d'un groupe noté additivement il faut montrer que si x et y appartiennent à H alors $x - y \in H$.

  EXEMPLE 1 Soit n un entier naturel non nul, on note $U_n = \{z \in \mathbb{C}\ ,\ z^n = 1\}$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité. On va montrer que c'est un sous-groupe du groupe $(\mathbb{C}^*, \times)$ où $\mathbb{C}^*$ est l'ensemble des nombres complexes non nuls.

  Il est clair que $U_n \subset \mathbb{C}^*$ puisque $0^n = 0 \neq 1$.

  On montre que U_n n'est pas vide car $1 \in U_n$ puisque $1^n = 1$.

  Maintenant, soit z_1, z_2 dans U_n,

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n = \frac{z_1^n}{z_2^n} = \frac{1}{1} = 1$$

  On a donc $z_1 z_2^{-1} \in U_n$ et de ce fait, $(U_n, \times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$

- On sait que si G et H sont deux groupes et $\varphi : G \to H$ un morphisme de groupes alors le noyau Ker (φ) est un sous-groupe de G et l'image Im (φ) est un sous-groupe de H. On peut donc, quand on cherche à montrer qu'une partie d'un groupe est un sous-groupe, essayer de l'écrire comme une image ou un noyau d'un morphisme de groupes.

EXEMPLE 2 Soit n un entier non nul. L'ensemble $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ des matrices de déterminant 1 est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. En effet, c'est le noyau de l'application déterminant

$$\det : (\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), \times) \to (\mathbb{C}, \times)$$

qui est un morphisme de groupes.

Conseils

- Quand on cherche à montrer qu'une partie H est un sous-groupe de G, pour vérifier qu'elle n'est pas vide, le plus simple est souvent de montrer que l'élément neutre de G appartient à H.
- Pour montrer qu'une partie est un sous-anneau, on ne peut pas, comme dans le cas des groupes, montrer que c'est le noyau d'un morphisme d'anneaux car un tel noyau a une structure d'idéal et non de sous-anneau - voir la fiche 5.

Exemple traité

Soit $n \geq 1$. On note T_n l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ on considère $E_{i,j}^*$ l'application linéaire définie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}$ qui associe à une matrice M son coefficient $[M]_{i,j}$ placé à la i-ème ligne et j-ème colonne.

1 Caractériser T_n à l'aide des application $E_{i,j}^*$. En déduire que T_n est un sous-groupe de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}), +)$

2 Montrer que T_n est un sous-anneau de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}), +, \times)$.

SOLUTION

1 Par définition, pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

$$M \in T_n \iff \forall i \in [\![2, n]\!], \forall j \in [\![1, i-1]\!], E_{i,j}^*(M) = 0.$$

On peut donc écrire que $T_n = \bigcap_{1 \leq j < i \leq n} \mathrm{Ker}\, E_{i,j}^*$.

Or, les applications $E_{i,j}^*$ sont linéaires donc ce sont des morphismes de groupes (pour la loi $+$). On en déduit que pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $\mathrm{Ker}\, E_{i,j}^*$ est un sous-groupe de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}), +)$. Une intersection de sous-groupes étant aussi un sous-groupe, T_n est un sous-groupe de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}), +)$.

2 Pour montrer que T_n est un sous-anneau de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}), +, \times)$, on doit de plus montrer que l'élément neutre (multiplicatif) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dans T_n et que T_n est stable par multiplication.

- L'élément neutre pour la multiplication est la matrice identité I_n qui est bien un élément de T_n.

- Soit M, N deux éléments de T_n. On veut montrer que $MN \in T_n$. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tels que $i > j$,

$$[MN]_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} [M]_{i,k}[N]_{k,j}$$

or, pour $k > j$, $[N]_{k,j} = 0$ et, pour $k \leq j < i$, $[M]_{i,k} = 0$. On obtient alors que $[MN]_{i,j} = 0$ et donc que $MN \in T_n$.

On a bien montré que T_n est un sous-anneau de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}), +, \times)$. Notons de fait, que c'est même une sous-algèbre.

Exercices

EXERCICE 3.1

Soit $(G, \star)$ un groupe d'élément neutre e. Pour (x,y) dans G^2, on notera xy pour $x \star y$. On appelle centre du groupe et on note $Z(G)$ l'ensemble défini par

$$Z(G) = \{x \in G, \forall y \in G, xy = yx\}$$

1 Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe en utilisant la caractérisation des sous-groupes.

2 **a.** Soit $y \in G$, montrer que $\varphi_y : G \to G$ défini par $\varphi_y : x \mapsto yxy^{-1}$ est un morphisme de groupes

b. Montrer que si f et g sont deux morphismes de groupes de G dans G alors

$$K = \{x \in G, f(x) = g(x)\}$$

est un sous-groupe de G.

c. En utilisant les deux questions précédentes, remontrer que $Z(G)$ est un sous-groupe de G.

EXERCICE 3.2

On considère l'ensemble $A = \mathbb{Z}[i]$ défini par

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + ib, (a,b) \in \mathbb{Z}^2\}$$

Montrer que A est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 3.1

1 Commencer en trouvant un élément de $Z(G)$

2 **a.** Revenir à la définition.

b. Utiliser la caractérisation classique des sous-groupes.

c. On pourra considérer l'application identité qui est un morphisme de G dans G.

EXERCICE 3.1

1 On remarque que $Z(G)$ n'est pas vide car l'élément neutre e de G appartient à $Z(G)$ puisque pour tout y dans G, $ey = ye = y$.
Maintenant si x et y appartiennent à $Z(G)$. Pour tout $z \in G$, on sait que $yz = zy$ et donc, en multipliant par y^{-1} à droite et à gauche des deux cotés, $zy^{-1} = y^{-1}z$. On en déduit que

$$xy^{-1}z = xzy^{-1} = zxy^{-1}$$

et donc $xy^{-1} \in Z(G)$.
En conclusion $Z(G)$ est un sous-groupe de G.

2 **a.** Soit $y \in G$, pour tous x, x' dans G,

$$\varphi_y(xx') = yxx'y^{-1} = yxy^{-1}yx'y^{-1} = \varphi_y(x)\varphi_y(x')$$

On a bien montré que φ_y est un morphisme de groupes.

b. Soit f et g deux morphismes de G dans G et notons $K = \{x \in G, f(x) = g(x)\}$.
On sait que $f(e) = e$, en effet, $f(e) = f(ee) = f(e)f(e)$.
On en déduit que $e \in K$ car $f(e) = e = g(e)$. De ce fait, $K \neq \varnothing$.
De plus, pour $(x, y) \in K^2$,

$$f(xy^{-1}) = f(x)f(y)^{-1} = g(x)g(y)^{-1} = g(xy^{-1})$$

donc $xy^{-1} \in K$. On a bien vérifié que K était un sous-groupe de G.

c. Soit $y \in G$, on regarde les morphismes de groupes φ_y et l'identité. On constate alors que $K_y = \{x \in G, \varphi_y(x) = \mathrm{id}_G(x)\} = \{x \in G, yxy^{-1} = x\}$ est un sous-groupe de G. Il suffit ensuite de réécrire que $K_y = \{x \in G, yx = xy\}$ et de voir que

$$Z(G) = \bigcap_{y \in G} K_y$$

pour conclure que $Z(G)$ est un sous-groupe de G comme intersection de sous-groupes de G.

EXERCICE 3.2

On vérifie pour commencer que $(A, +)$ est un sous-groupe abélien de $(\mathbb{C}, +)$.

- Comme $0 = 0 + 0i \in A$, $A \neq \varnothing$.
- Soit $x = a + ib$ et $x' = a' + ib'$ des éléments de A où a, a', b et b' sont des entiers relatifs, $x - x' = (a - a') + i(b - b') \in A$.

De plus l'élément neutre pour la multiplication de $\mathbb{C}$ appartient à A car $1 = 1 + 0i$. Pour finir, si x et x' appartiennent à A, en reprenant les notations ci-dessus,

$$xx' = (a + ib) \times (a' + ib') = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i \in A$$

On a bien montré que $(A, +, \times)$ était un sous-anneau de $(\mathbb{C}, +, \times)$.

Calculer et utiliser l'ordre d'un élément dans un groupe

Dans cette fiche $(G, \times)$ désigne un groupe. L'élément neutre sera noté e.

Quand on ne sait pas !

Soit x un élément de G.

- On dit que x est d'ordre fini s'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $x^n = e$.
- Si x est d'ordre fini, on appelle ordre de x le plus petit entier n strictement positif tel que $x^n = e$.
- Si x est d'ordre fini et d'ordre n, pour tout entier m, $x^m = e \iff n | m$.
- Le théorème de Lagrange affirme que, si G est fini, l'ordre de x divise le cardinal de G.

Que faire ?

- Pour déterminer l'ordre d'un élément x, il faut trouver un entier n tel que $x^n = e$ et que, pour tout entier k compris entre 1 et $n-1$, $x^k \neq e$.

  EXEMPLE 1 On considère le groupe multiplicatif $\mathbb{U}_6 = \{\exp(\frac{2ik\pi}{6})\ ,\ k \in [\![0, 5]\!]\}$ des racines 6-ièmes de l'unité dans $\mathbb{C}$. L'élément $j = \exp(\frac{2i\pi}{3})$ est d'ordre fini car $j^6 = 1$ (ici l'élément neutre pour $\times$ est 1) par définition. Cependant, j n'est pas d'ordre 6 car $j^3 = 1$. On en déduit que j est d'ordre 3 car $j \neq 1$ et $j^2 \neq 1$.

- On peut utiliser l'ordre d'un élément x pour calculer les puissances de x. En effet si x est d'ordre n, la valeur de x^m ne dépend que de la congruence modulo n de m.

  EXEMPLE 2 Si on reprend l'exemple de $j \in \mathbb{C}$. Il est d'ordre 3, de ce fait, j^m ne dépend que de la congruence de m modulo 3.

$$j^m = \begin{cases} 1 & \text{si } m \equiv 0\ [3] \\ j & \text{si } m \equiv 1\ [3] \\ j^2 & \text{si } m \equiv 2\ [3] \end{cases}$$

Conseils

- Pour déterminer l'ordre d'un élément x on peut commencer par trouver un entier m tel que $x^m = e$. On cherche alors l'ordre de x parmi les diviseurs de m.
- Pour déterminer l'ordre d'un élément x, on peut écrire x comme produit d'éléments **commutant entre eux**.

Exemple traité

On considère dans S_9 la permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

1 Déterminer l'ordre de σ.

2 En déduire σ^{2000}.

SOLUTION

1 On commence en décomposant σ en produit de cycles **à supports disjoints**. On pose $\gamma_1 = (1, 7, 4)$, $\gamma_2 = (2, 5)$ et $\gamma_3 = (3, 9, 8, 6)$. On a alors $\sigma = \gamma_1 \circ \gamma_2 \circ \gamma_3$ où les trois cycles γ_1, γ_2 et γ_3 commutent car ils ont des supports deux à deux disjoints. De ce fait, pour tout entier m, $\sigma^m = \gamma_1^m \circ \gamma_2^m \circ \gamma_3^m$.

Maintenant, γ_1 est un 3-cycle, il est d'ordre 3, γ_2 est une transposition qui est d'ordre 2 et γ_3 est un 4-cycle qui est d'ordre 4. On en déduit finalement que, en notant id l'élément neutre de S_9,

$$\sigma^m = \mathrm{id} \iff (3|m \text{ et } 2|m \text{ et } 4|m) \iff (3 \vee 2 \vee 4)|m \iff 12|m$$

On obtient que σ est d'ordre 12.

2 On réalise la division euclidienne de 2000 par 12 : $2000 = 166 \times 12 + 8$. On en déduit que

$$\sigma^{2000} = \sigma^8 = \gamma_1^8 \circ \gamma_2^8 \circ \gamma_3^8 = \gamma_1^2$$

Finalement, $\sigma^{2000} = (1, 4, 7)$.

Exercices

EXERCICE 4.1

On considère dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

On note $u : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ l'endomorphisme canonique associé à J ainsi que $(e_0, \ldots, e_{n-1})$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

1. Soit $i \in [\![0, n-1]\!]$, calculer $u^n(e_i)$.
2. Déterminer alors l'ordre de J dans le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
3. En déduire que J est diagonalisable.

EXERCICE 4.2

On considère $(G, \times)$ un groupe commutatif. Soit x et y deux éléments de G. On suppose que x est d'ordre n et y est d'ordre m.

1. On suppose dans cette question que n et m sont premiers entre eux. Montrer que xy est d'ordre nm.
2. Montrer qu'il existe un élément d'ordre $n \vee m$.
3. Le résultat de la question 1. est-il encore vrai si le groupe n'est plus supposé commutatif ?

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 4.1

1. Commencer en calculant $u(e_0)$, $u^2(e_0) \ldots$
2. Déduire la valeur de J^n de la question précédente.
3. Utiliser un polynôme annulateur.

EXERCICE 4.2

1. Montrer que $(xy)^{nm} = e$ et que si k est un entier tel que $(xy)^k = e$ alors $n|k$ et $m|k$.
2. Commencer par montrer que, pour tout diviseur d de n ou de m, il existe un élément d'ordre d puis utiliser la décomposition en produit de nombres premiers de n et m.
3. On pourra travailler dans le groupe S_3 qui n'est pas commutatif.

EXERCICE 4.1

1 Avec les notations de l'énoncé, on a : $\forall i \in [\![0, n-1]\!]$, $u(e_i) = \begin{cases} e_{i-1} & \text{si } i \geq 1 \\ e_{n-1} & \text{si } i = 0 \end{cases}$

En recommençant, $u^2(e_i) = u(u(e_i)) = \begin{cases} e_{i-2} & \text{si } i \geq 2 \\ e_{n-2+i} & \text{sinon} \end{cases}$

En composant encore avec u plusieurs fois, on obtient, si $k \in [\![1, n-1]\!]$:

$$u^k(e_i) \begin{cases} e_{i-k} & \text{si } i \geq k \\ e_{n-k+i} & \text{sinon} \end{cases}$$

Finalement, $u^n(e_i) = e_{n-n+i} = e_i$.

2 La matrice J^n est la matrice de l'endomorphisme u^n dans la base canonique. Comme u^n est l'identité de $\mathbb{C}^n$, on obtient : $J^n = I_n$.

Pour justifier alors que l'ordre de J dans le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est égal à n, il reste à montrer que si $k \in [\![1, n-1]\!]$, la matrice J^k n'est pas égal à I_n, ce qui revient à montrer que u^k n'est pas l'endomorphisme identité. Il suffit pour cela de remarquer que $u^k(e_{n-1}) = e_{n-1-k} \neq e_{n-1}$.

Finalement J est une matrice d'ordre n.

3 D'après la question précédente, $J^n = I_n$. Cela signifie que le polynôme $X^n - 1$ annule la matrice J. On sait, en notant $\omega = \exp(\frac{2i\pi}{n})$ que $X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (X - \omega^k)$.

On a donc montré que J était annulé par un polynôme scindé à racines simples. Cela implique que J est diagonalisable.

EXERCICE 4.2

1 On commence par vérifier que $(xy)^{nm} = (x^n)^m \times (y^m)^n = e$ puisque le groupe G est supposé commutatif.

Maintenant, soit k un entier tel que $(xy)^k = e$. On a alors $x^k = y^{-k}$. De ce fait, $x^{km} = (y^m)^{-k} = e$ car y est d'ordre m. On en déduit, comme x est d'ordre n, que n divise km mais comme n et m sont premiers entre eux, $n|k$ d'après le lemme de Gauss.

Par symétrie, on montre aussi que $m|k$ et donc que $nm|k$ car n et m sont premiers entre eux.

Finalement, on en déduit que xy est d'ordre nm.

2 Soit d un diviseur de n. Par définition, il existe un entier k tel que $n = kd$. Montrons alors que $z = x^k$ est d'ordre d. En effet $z^d = (x^k)^d = x^{kd} = x^n = e$. De plus pour tout $d' \in [\![1, d-1]\!]$, $z^{d'} = x^{kd'} \neq e$ car $1 \leq kd' < kd = n$.

De même, si d est un diviseur de m, on peut trouver une puissance de y qui est d'ordre m.

Notons maintenant,

$$n = \prod_{i=1}^{s} p_i^{\alpha_i} \text{ et } m = \prod_{i=1}^{s} p_i^{\beta_i}$$

les décompositions en produit de nombres premiers de n et m où α_i et β_i appartiennent à $\mathbb{N}$ (on a $\alpha_i = 0$ si p_i ne divise pas n et de même $\beta_i = 0$ si p_i ne divise pas m).

On sait alors que $n \vee m = \prod\limits_{i=1}^{s} p_i^{\gamma_i}$ où $\gamma_i = \max(\alpha_i, \beta_i)$. Or, pour tout entier i compris entre 1 et s, $p_i^{\gamma_i}$ divise n ou m. Il existe donc un élément z_i de G d'ordre $p_i^{\gamma_i}$. En utilisant alors la question 1. et le fait que pour i et j distincts dans $[\![1, s]\!]$, $p_i^{\gamma_i}$ et $p_j^{\gamma_j}$ sont premiers entre eux, on en déduit que $z_1 \times z_2 \times \cdots \times z_s$ est d'ordre $n \vee m$.

3 Le résultat n'est plus vrai. Par exemple dans S_3, si on prend pour x la transposition $(1, 2)$ et pour y le 3-cycle, $(1, 2, 3)$ qui sont d'ordre 2 et 3 respectivement. Le calcul montre que $x \circ y$ est la transposition $(2, 3)$ qui est d'ordre 2 et non 6.

Solutions

5 Montrer qu'une partie d'un anneau est un idéal

Quand on ne sait pas !

Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif.

Une partie I de A est un idéal de A si

- $(I, +)$ est un sous-groupe de $(A, +)$.
- Pour tout $x \in I$ et tout $a \in A$, $ax \in I$ (ou si l'on veut $xa \in I$).

Que faire ?

- Pour montrer qu'une partie I d'un anneau est un idéal, on montre qu'elle vérifie les deux axiomes.

  EXEMPLE 1 Soit A l'anneau des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ muni des lois usuelles. Précisément, pour toutes fonctions f et g dans A, les fonctions $f+g$ et $f \times g$ sont définies par :

  $$\forall x \in \mathbb{R}, (f+g)(x) = f(x) + g(x) \text{ et } (f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$$

  On considère alors $\alpha \in \mathbb{R}$ et I_α l'ensemble des fonctions qui s'annulent en α. Montrons que c'est un idéal de A

  On vérifie pour commencer que c'est un sous-groupe (pour la loi $+$). En effet, $I_\alpha \neq \varnothing$ car la fonction nulle appartient à I_α. De plus, si f et g appartiennent à I_α, $f-g$ aussi, en effet :

  $$(f-g)(\alpha) = f(\alpha) - g(\alpha) = 0 - 0 = 0$$

  On vérifie alors la deuxième condition. Si $f \in I_\alpha$ et g est une fonction quelconque de A, $f \times g \in I_\alpha$ car

  $$(f \times g)(\alpha) = f(\alpha) \times g(\alpha) = 0 \times g(\alpha) = 0$$

  On a bien vérifié que I_α était un idéal de A.

- Si A et B sont deux anneaux et que $\varphi : A \to B$ est un morphisme d'anneaux, on peut vérifier aisément que le noyau $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{x \in A \ , \ \varphi(x) = 0_B\}$ est un idéal de A. De ce fait, pour montrer qu'une partie I de A est un idéal, on peut essayer d'exhiber un morphisme d'anneaux dont c'est le noyau.

EXEMPLE 2 Si on reprend les notations de l'exemple ci-dessus, on peut considérer l'application d'évaluation ε définie par

$$\begin{array}{rccc}\varepsilon : & A & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \mapsto & f(\alpha)\end{array}$$

Il est clair que $I_\alpha = \{f \in A\ ,\ f(\alpha) = 0\} = \mathrm{Ker}\,(\varepsilon)$. Comme ε est un morphisme d'anneaux, on retrouve que I_α est un idéal de A.

Conseils

Il est important de ne pas confondre idéal et sous-anneau (voir fiche 3). Dans les deux cas, ce sont des sous-groupes additifs de l'anneau, cependant :

- On impose une condition de stabilité pour la multiplication plus forte dans le cas de l'idéal, en effet, on demande qu'un produit soit un élément de l'idéal dès que l'un des deux éléments appartient à l'idéal.
- On impose que l'élément neutre de la multiplication de l'anneau (l'unité) appartienne au sous-anneau, ce qui n'est pas le cas pour les idéaux. De fait, il n'existe qu'un seul idéal qui contienne l'unité de l'anneau, c'est l'anneau dans sa totalité.

Exemple traité

Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif. Soit I et J deux idéaux de A.
Montrer que $I + J = \{a + b, (a, b) \in I \times J\}$ et $I \cap J$ sont des idéaux de A.

SOLUTION

- Montrons que $I + J$ est un idéal. Comme I et J ne sont pas vides, $I + J$ n'est pas vide. De plus soit $x_1 = a_1 + b_1$ et $x_2 = a_2 + b_2$ des éléments de $I + J$ où a_1, a_2 appartiennent à I et b_1, b_2 appartiennent à J,

  $$x_1 - x_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) \in I + J$$

  car $a_1 - a_2 \in I$ et $b_1 - b_2 \in J$.

  De plus, soit $x = a + b \in I + J$ et $c \in A$, $ca \in I$ et $cb \in J$ car ce sont des idéaux donc $cx \in I + J$.

  On a bien montré que $I + J$ était un idéal de A.
- Montrons que $I \cap J$ est un idéal. Comme $0 \in I$ et $0 \in J$ alors $0 \in I \cap J$ donc $I \cap J \neq \varnothing$. Soit x_1 et $x_2 \in I \cap J$, alors x_1 et x_2 appartiennent à I et donc $x_1 - x_2 \in I$. De même, $x_1 - x_2 \in J$. Finalement, $x_1 - x_2 \in I \cap J$.

  De plus, pour $x \in I \cap J$ et $c \in A$, $cx \in I$ et $cx \in J$ car I et J sont des idéaux et donc $cx \in I \cap J$.

  On a bien montré que $I \cap J$ était un idéal.

Exercices

EXERCICE 5.1

On considère l'anneau commutatif $(\mathbb{Z}, +, \times)$. On rappelle que pour tout idéal I de $\mathbb{Z}$, il existe un unique entier positif a tel que

$$I = a\mathbb{Z} = \{am, m \in \mathbb{Z}\}$$

1. Montrer que si I et J sont deux idéaux de $\mathbb{Z}$ alors $IJ = \{ab, (a,b) \in I \times J\}$ est un idéal.
2. Trouver deux idéaux I et J tels que $I \cup J$ ne soit pas un idéal.

EXERCICE 5.2

Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif. Soit I un idéal de A, on appelle radical de I et on note $\sqrt{I}$ l'ensemble

$$\sqrt{I} = \{x \in A, \exists n \in \mathbb{N}^*, x^n \in I\}$$

1. Montrer que $\sqrt{I}$ est un idéal.
2. En déduire que $N = \{x \in A, \exists n \in \mathbb{N}^*, x^n = 0\}$ l'ensemble des éléments nilpotents de A est un idéal.
3. Déterminer $\sqrt{I}$ dans le cas où $A = \mathbb{Z}$ et $I = 18\mathbb{Z}$.

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 5.1

1. On pourra commencer par écrire $I = a\mathbb{Z}$ et $J = b\mathbb{Z}$.
2. Considérer $2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$.

EXERCICE 5.2

1. Afin de montrer que $\sqrt{I}$ est un sous-groupe, on pourra utiliser la formule du binôme de Newton.
2. Déterminer un idéal I tel que $N = \sqrt{I}$.
3. Penser à la décomposition en facteurs premiers.

Solutions des exercices

EXERCICE 5.1

1. D'après la structure des idéaux de $\mathbb{Z}$, il existe des entiers a et b tels que $I = a\mathbb{Z}$ et $J = b\mathbb{Z}$. De ce fait, tout élément de IJ est de la forme $am \times am'$ où m et m' sont des entiers donc $IJ \subset ab\mathbb{Z}$. Réciproquement tout élément x de $ab\mathbb{Z}$ s'écrit sous la forme

$$x = abm = a(bm)$$

où $m \in \mathbb{Z}$. De ce fait, $x \in IJ$ car $a \in I$ et $bm \in J$.

Finalement, $IJ = ab\mathbb{Z}$ qui est un idéal.

2 On pose $I = 2\mathbb{Z}$ et $J = 3\mathbb{Z}$. L'ensemble $I \cup J$ est l'ensemble des éléments divisibles par 2 ou par 3. De ce fait, $2 \in I \cup J$ et $3 \in I \cup J$ mais $2 + 3 = 5 \notin I \cup J$. Donc $I \cup J$ n'est pas un idéal de $\mathbb{Z}$ car ce n'est pas un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$.

EXERCICE 5.2

1 On veut montrer que $\sqrt{I}$ est un idéal. On remarque d'abord que $\sqrt{I}$ est non vide car I est non vide et $I \subset \sqrt{I}$ (il suffit de prendre $n = 1$ dans la définition de $\sqrt{I}$).

Soit x, y dans $\sqrt{I}$, par définition il existe n_x et n_y des entiers naturels non nuls tels que $x^{n_x} \in I$ et $y^{n_y} \in I$. On peut poser N le maximum de n_x et de n_y de telle sorte que x^N et y^N appartiennent à I. On calcule alors à l'aide de la formule du binôme de Newton :

$$(x-y)^{2N} = \sum_{k=0}^{2N} (-1)^{2N-k} \binom{2N}{k} x^k y^{2N-k}$$

Si $k \geq N$, comme $x^N \in I$ alors $x^k = x^N x^{k-N} \in I$ puisque I est un idéal. Finalement, $\binom{2N}{k} x^k y^{2N-k}$ appartient à I. Par contre, si $k < N$ alors $2N - k \geq N$ et donc, en procédant de même, $y^{2N-k} \in I$ donc $\binom{2N}{k} x^k y^{2N-k} \in I$.

On en déduit que tous les termes de la somme appartiennent à I, donc $(x - y)^{2N} \in I$ ce qui implique que $(x - y) \in \sqrt{I}$. Donc $\sqrt{I}$ est un sous-groupe de $(A, +)$.

Soit $x \in \sqrt{I}$ et $a \in A$, il existe un entier naturel n non nul tel que $x^n \in I$, dès lors, en utilisant le fait que I est un idéal, $(ax)^n = a^n x^n \in I$ et donc $ax \in \sqrt{I}$.

Finalement, $\sqrt{I}$ est un idéal.

2 Il suffit de voir que $I = \{0\}$ est un idéal et que $N = \sqrt{I}$.

3 Soit $x \in \mathbb{Z}$ supposé non nul, on peut décomposer x en produit de facteurs premiers : $x = \pm \prod_{i=1}^{d} p_i^{\alpha_i}$, où $p_1, \ldots, p_d$ sont des nombres premiers (si $x = \pm 1$ on prend $d = 0$). Dès lors, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$x^n = \pm \prod_{i=1}^{d} p_i^{n\alpha_i}$$

On cherche des conditions pour qu'il existe un entier n tel que 18 divise x^n. Comme $18 = 2 \times 3^2$, il suffit que les nombres premiers 2 et 3 apparaissent dans la factorisation en facteurs premiers de x car dans ce cas, 18 divise x^2. On en déduit que $\sqrt{18\mathbb{Z}} = 6\mathbb{Z}$.

Faire des calculs dans Z/nZ

Quand on ne sait pas !

Soit n un entier strictement supérieur à 1.

- Les opérations de $\mathbb{Z}$ permettent de définir des opérations sur l'ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ des classes de congruences modulo n. Cela signifie que si x et y sont deux classes de congruences modulo n et si x_1, x_2 sont des représentants de x cet y_1, y_2 des représentants de y c'est-à-dire que x_1 est congru à x_2 et y_1 est congru à y_2 modulo n alors $x_1 + y_1$ et $x_2 + y_2$ ont la même classe de congruence modulo n. De même $x_1 \times y_1$ et $x_2 \times y_2$ ont la même classe.
- L'ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ muni des deux opérations $+$ et $\times$ a une structure d'anneau commutatif.
- Soit $m \in \mathbb{Z}$, la classe de m est inversible dans l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ si et seulement si n et m sont premiers entre eux. En particulier, il y a $\varphi(n)$ éléments inversibles dans l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ où φ est la fonction indicatrice d'Euler.
- Dans le cas où p est un nombre premier (et uniquement dans ce cas), $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +, \times)$ est un corps.

Afin de faire la différence entre les éléments de $\mathbb{Z}$ et ceux de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ on notera pour $x \in \mathbb{Z}$, $\dot{x}$ la classe de x dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ de sorte que si, par exemple, $n = 11$, alors $\dot{3} = \dot{25} = \dot{(-8)}$.
On représentera souvent une classe de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ par son unique représentant compris entre 0 et $n - 1$.

Que faire ?

- Pour calculer dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ on peut le plus souvent prendre des représentants pour les classes, faire l'opération dans $\mathbb{Z}$ et prendre la classe du résultat du calcul.

  EXEMPLE 1 On fixe $n = 14$. On veut calculer $f(x) = \dot{7}x^2 + \dot{3}$ pour $x = \dot{6}$. On fait le calcul dans $\mathbb{Z}$ en calculant $7 \times 6^2 + 3 = 7 \times 2 \times 3 \times 6 + 3 = 14 \times 18 + 3$. On a donc $f(x) = \dot{3}$.
- Pour calculer des puissances dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ on peut utiliser le fait que le groupe $((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times, \times)$ des éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un groupe fini et donc, que tout élément est d'ordre fini (divisant l'ordre du groupe d'après le théorème de Lagrange).

EXEMPLE 2 On fixe $n = 7$. On veut calculer $(\dot{5})^{2000}$. On peut calculer les première puissances de $x = 5$:

k	1	2	3	4	5	6
x^k	$\dot{5}$	$\dot{4}$	$\dot{6}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{1}$

On voit donc que $x^6 = \dot{1}$.

Il reste alors à faire la division euclidienne de 2000 par 6 : $2000 = 333 \times 6 + 2$. On obtient

$$x^{2000} = (x^6)^{333} \times x^2 = \dot{1} \times (\dot{5})^2 = \dot{4}.$$

Conseils

- L'ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ a n éléments. Dans le cas où n est petit on peut essayer de faire des calculs sur certaines, voire toutes les valeurs possibles.
- Il peut être intéressant d'utiliser le lemme chinois pour ramener les calculs dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ à des calculs dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ où $m < n$. Voir la fiche 7.

Exemple traité

On considère l'équation

$$x^2 - \dot{6}x + \dot{7} = \dot{0}$$

1 Montrer que pour tout $a \in \mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$, $a^2 \neq \dot{2}$. En déduire que l'équation n'a pas de solutions dans $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$.

2 Résoudre l'équation dans $\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$.

SOLUTION

1 Les éléments de $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ peuvent se noter $\{\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}, \ldots, \dot{10}\}$ ou $\{\dot{0}, \dot{1}, -\dot{1}, \dot{2}, -\dot{2}, \ldots, \dot{5}, -\dot{5}\}$. On calcule alors les carrés de ces éléments :

x	$\dot{0}$	$\pm\dot{1}$	$\pm\dot{2}$	$\pm\dot{3}$	$\pm\dot{4}$	$\pm\dot{5}$
x^2	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{4}$	$\dot{9}$	$\dot{5}$	$\dot{3}$

On voit que si a appartient à $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$, $a^2 \neq \dot{2}$.

On procède alors à une mise sous forme canonique,

$$x^2 - \dot{6}x + \dot{7} = (x - \dot{3})^2 - \dot{9} + \dot{7} = (x - \dot{3})^2 - \dot{2}$$

On a finalement

$$x^2 - \dot{6}x + \dot{7} = 0 \iff (x - \dot{3})^2 - \dot{2} = \dot{0} \iff (x - \dot{3})^2 = \dot{2}$$

D'après ce qui précède, cette équation n'a donc aucune solution.

2 Comme ci-dessus,

$$x^2 - \dot{6}x + \dot{7} = (x - \dot{3})^2 - \dot{9} + \dot{7} = (x - \dot{3})^2 - \dot{2}$$

On cherche alors dans $\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$ les éléments a tel que $a^2 = \dot{2}$. Les éléments de $\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$ peuvent se noter $\{\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}, \ldots, \dot{16}\}$ ou $\{\dot{0}, \dot{1}, -\dot{1}, \dot{2}, -\dot{2}, \ldots, \dot{8}, -\dot{8}\}$.
On calcule alors les carrés de ces éléments :

x	$\dot{0}$	$\pm\dot{1}$	$\pm\dot{2}$	$\pm\dot{3}$	$\pm\dot{4}$	$\pm\dot{5}$	$\pm\dot{6}$	$\pm\dot{7}$	$\pm\dot{8}$
x^2	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{4}$	$\dot{9}$	$\dot{16}$	$\dot{8}$	$\dot{2}$	$\dot{15}$	$\dot{13}$

On a finalement

$$\begin{aligned} x^2 - \dot{6}x + 7 = 0 &\iff (x - \dot{3})^2 - \dot{2} = \dot{0} \\ &\iff (x - \dot{3})^2 = \dot{2} \\ &\iff x - \dot{3} = \pm 6 \\ &\iff x = \dot{9} \text{ ou } x = -\dot{3} = \dot{14} \end{aligned}$$

Exercices

EXERCICE 6.1

On considère $\mathbb{Z}/26\mathbb{Z}$.

1 Combien il y a-t-il d'éléments inversibles dans $\mathbb{Z}/26\mathbb{Z}$?

2 Justifier que $\dot{7}$ est inversible et calculer son inverse dans $\mathbb{Z}/26\mathbb{Z}$.

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 6.1

1 On pourra utiliser l'indicatrice d'Euler.

2 On pourra chercher à calculer, après avoir justifié leur existence, des entiers u et v tels que $26u + 7v = 1$.

Solutions des exercices

EXERCICE 6.1

1 D'après le cours, le nombre d'éléments inversibles dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est $\varphi(n)$ où φ est la fonction indicatrice d'Euler. Or

$$\varphi(26) = \varphi(2 \times 13) = \varphi(2) \times \varphi(13) = 1 \times 12 = 12$$

Il y a 12 éléments inversibles dans $\mathbb{Z}/26\mathbb{Z}$.

2 Comme 7 est premier avec 26, $\dot{7}$ est inversible dans $\mathbb{Z}/26\mathbb{Z}$.
On sait alors qu'il existe une relation de Bézout de la forme $26u + 7v = 1$ avec u et v dans $\mathbb{Z}$. Pour les déterminer on met en place l'algorithme d'Euclide étendu. On commence avec les deux relations suivantes :

$$26 \times 1 + 7 \times 0 = 26 \tag{L$_1$}$$

$$26 \times 0 + 7 \times 1 = 7 \tag{L$_2$}$$

Par division euclidienne, $26 = 3 \times 7 + 5$ ce qui s'écrit aussi $5 = 1 \times 26 - 3 \times 7$. On réalise alors la combinaison linéaire $1 \times \mathrm{L}_1 - 3 \times \mathrm{L}_2$ et on obtient

$$26 \times 1 + 7 \times (-3) = 5 \tag{L$_3$}$$

Maintenant, $7 = 1 \times 5 + 2$ ce qui s'écrit aussi $2 = 1 \times 7 - 1 \times 5$. On réalise alors la combinaison linéaire $1 \times \mathrm{L}_2 - 1 \times \mathrm{L}_3$ et on obtient

$$26 \times (-1) + 7 \times 4 = 2 \tag{L$_4$}$$

En utilisant le fait que $5 = 2 \times 2 + 1$ ce qui s'écrit aussi $1 = 1 \times 5 - 2 \times 2$. On réalise alors la combinaison linéaire $1 \times \mathrm{L}_3 - 2 \times \mathrm{L}_4$ et on obtient

$$26 \times 3 + 7 \times (-11) = 1 \tag{L$_5$}$$

On en déduit, en prenant les classes de congruences modulo 26 que $\dot{7} \times (\dot{-11}) = \dot{1}$ donc $(\dot{-11}) = \dot{15}$ est l'inverse de $\dot{7}$ dans $\mathbb{Z}/26\mathbb{Z}$.

Solutions

7 Utiliser le théorème chinois

Quand on ne sait pas !

Soit n et m deux entiers premiers entre eux, l'application naturelle de $\mathbb{Z}/(nm)\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ est un isomorphisme d'anneau

L'application est définie en associant à la classe modulo nm d'un entier x le couple $(\dot{x}, \overline{x})$ où $\dot{x}$ est la classe de x modulo n et $\overline{x}$ est la classe de x modulo m.

Que faire ?

Soit n et m deux entiers premiers entre eux, on utilise souvent le théorème chinois pour, chercher les entiers relatifs x tels que

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & a\,[n] \\ x & = & b\,[m] \end{array}\right.$$

où a et b sont des entiers fixés.

Le théorème chinois affirme qu'il y a toujours des solutions et que l'ensemble des solutions est une unique classe de congruence modulo nm.

EXEMPLE 1

On cherche les entiers x tels que

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 0\,[7] \\ x & = & 2\,[5] \end{array}\right.$$

Il est clair que 7 est une solution. Comme 5 et 7 sont premiers entre eux, l'ensemble des solutions est la classe de 7 modulo 35. On a donc

$$S = \{7 + 35k\ ,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

Conseils

- Il est important de vérifier que n et m soient premiers entre eux.

- Dans l'exemple ci-dessus, il était simple de trouver une solution particulière, dans le cas général, on peut commencer, en utilisant la relation de Bézout, par déterminer des entiers x_1 et x_2 vérifiant les systèmes :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 & = & 1\,[n] \\ x_1 & = & 0\,[m] \end{array}\right. \quad ; \quad \left\{\begin{array}{rcl} x_2 & = & 0\,[n] \\ x_2 & = & 1\,[m] \end{array}\right.$$

On peut alors conclure par linéarité. Cela va être illustré dans l'exemple ci-dessous.

Exemple traité

On cherche les entiers x tels que

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 4\,[22] \\ x & = & 2\,[13] \end{array}\right.$$

1 Déterminer des entiers u et v tels que $22u + 13v = 1$.

2 En déduire des entiers x_1 et x_2 tels que

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 & = & 1\,[22] \\ x_1 & = & 0\,[13] \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{rcl} x_2 & = & 0\,[22] \\ x_2 & = & 1\,[13] \end{array}\right.$$

3 Résoudre l'équation initiale.

SOLUTION

1 On applique l'algorithme d'Euclide étendu. On sait que

$$22 \times 1 + 13 \times 0 = 22 \qquad (\mathrm{L}_1)$$

$$22 \times 0 + 13 \times 1 = 13 \qquad (\mathrm{L}_2)$$

Par division euclidienne, $22 = 1 \times 13 + 9$ ce qui s'écrit aussi $9 = 1 \times 22 - 1 \times 13$. On réalise alors la combinaison linéaire $1 \times \mathrm{L}_1 - 1 \times \mathrm{L}_2$ et on obtient

$$22 \times 1 + 13 \times (-1) = 9 \qquad (\mathrm{L}_3)$$

Maintenant, $13 = 1 \times 9 + 4$ ce qui s'écrit aussi $4 = 1 \times 13 - 1 \times 9$. On réalise alors la combinaison linéaire $1 \times \mathrm{L}_2 - 1 \times \mathrm{L}_3$ et on obtient

$$22 \times (-1) + 13 \times 2 = 4 \qquad (\mathrm{L}_4)$$

En utilisant le fait que $9 = 2 \times 4 + 1$ ce qui s'écrit aussi $1 = 1 \times 9 - 2 \times 4$. On réalise alors la combinaison linéaire $1 \times \mathrm{L}_3 - 2 \times \mathrm{L}_4$ et on obtient

$$22 \times 3 + 13 \times (-5) = 1 \qquad (\mathrm{L}_5)$$

On peut poser $u = 3$ et $v = -5$.

2 L'égalité L_5 affirme que si on pose $x_1 = -5 \times 13 = -65$ et $x_2 = 3 \times 22 = 66$ alors

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & 1\,[22] \\ x_1 & = & 0\,[13] \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x_2 & = & 0\,[22] \\ x_2 & = & 1\,[13] \end{array} \right.$$

3 On pose maintenant $x = 4 \times x_1 + 2 \times x_2 = -128$. Par linéarité, c'est une solution de notre équation.

On peut conclure en utilisant le théorème chinois, on sait que l'ensemble des solutions est une classe de congruence modulo $13 \times 22 = 286$. On en déduit que l'ensemble des solutions est

$$S = \{-128 + 286k\ ,\ k \in \mathbb{Z}\} = \{158 + 286k\ ,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

Exercices

EXERCICE 7.1

On veut déterminer les entiers x tels que

$$(S) \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 1\,[3] \\ x & = & 3\,[5] \\ x & = & 4\,[7] \end{array} \right.$$

1 Justifier que le système considéré est équivalent au système

$$(S') \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 13\,[15] \\ x & = & 4\,[7] \end{array} \right.$$

2 Résoudre le système.

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 7.1

1 Il suffit de résoudre le système composé des deux premières équations. Ici, il suffit de vérifier que la solution donnée convient.

2 Il suffit d'appliquer la méthode.

EXERCICE 7.1

1 Comme 3 et 5 sont premiers entre eux, d'après le théorème chinois, il existe un élément a dans $\mathbb{Z}$ (défini modulo 15) tel que

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1\,[3] \\ x & = & 3\,[5] \end{array}\right. \iff x = a[15]$$

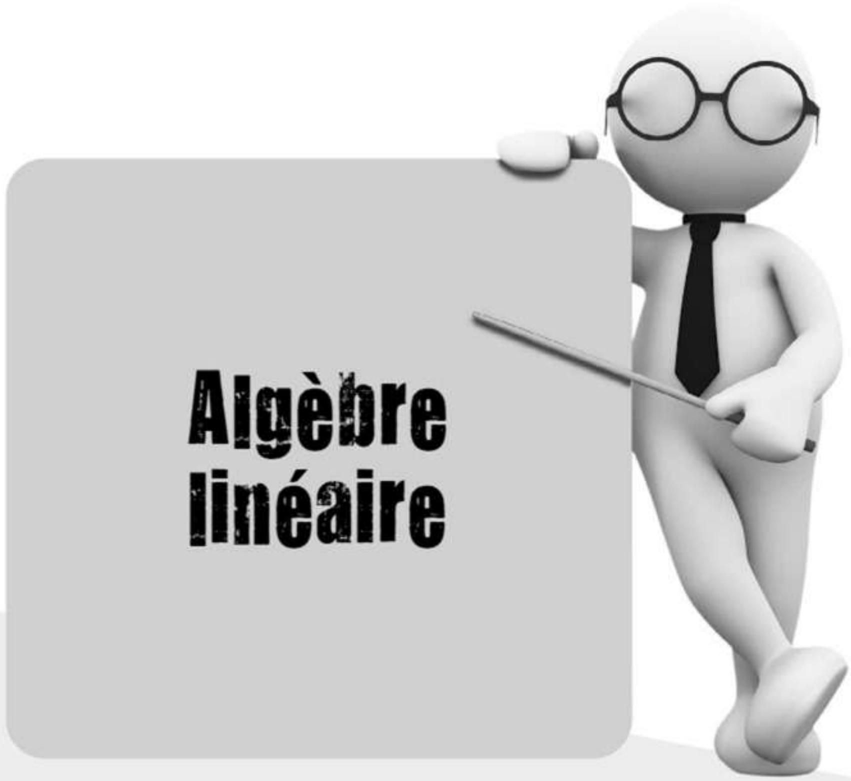
Il suffit de vérifier que 13 est bien congru à 1 modulo 3 et à 3 modulo 5 pour conclure que les deux systèmes (S) et (S') sont effectivement équivalents.

2 On applique la méthode précédente au système (S'). C'est possible car 15 et 7 sont premiers entre eux. On cherche des entiers u et v tels que $15u + 7v = 1$. Il n'est pas nécessaire ici d'écrire l'algorithme d'Euclide étendu, $u = 1$ et $v = -2$ conviennent. On en déduit que $x_1 = 15$ et $x_2 = -14$ vérifient

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 & = & 1\,[7] \\ x_1 & = & 0\,[15] \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{rcl} x_2 & = & 0\,[7] \\ x_2 & = & 1\,[15] \end{array}\right.$$

Par linéarité, $x = 13x_2 + 4x_1 = -122$ vérifie le système (S') et donc aussi le système (S). Finalement l'ensemble des solutions est

$$\{-122 + 105k\ ,\ k \in \mathbb{Z}\} = \{88 + 105k\ ,\ k \in \mathbb{Z}\}$$


Algèbre
linéaire

Montrer qu'une somme est directe

Quand on ne sait pas !

Soit $p \geq 2$ et $F_1, \cdots, F_p$ des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.

- **(Définition d'une somme directe)**

$$\left[\begin{array}{c} \text{La somme } \displaystyle\sum_{k=1}^{p} F_k \text{ est directe} \\ \text{et l'on note } \displaystyle\bigoplus_{k=1}^{p} F_k \end{array}\right] \iff \left[\begin{array}{c} \text{La décomposition de tout vecteur de } \displaystyle\sum_{k=1}^{p} F_k \\ \text{sous la forme } \displaystyle\sum_{k=1}^{p} u_k \text{, avec } u_k \in F_k \text{, est unique} \end{array}\right]$$

On dit alors que les sous-espaces $F_1, \cdots, F_p$ sont en somme directe.

- **(Caractérisation 1)**

$$\text{La somme } \sum_{k=1}^{p} F_k \text{ est directe} \iff \left[\begin{array}{c} \text{Si } 0_E = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} u_k \text{ avec } u_k \in F_k, \\ \text{alors tous les } u_k \text{ sont nuls} \end{array}\right]$$

- **(Caractérisation 2)**

$$\text{La somme } \sum_{k=1}^{p} F_k \text{ est directe} \iff \left[\begin{array}{c} \mathscr{B} = (\mathscr{B}_1, \cdots, \mathscr{B}_p) \text{ est une base de } \displaystyle\sum_{k=1}^{p} F_k \\ \text{où les } \mathscr{B}_k \text{ sont des bases de } F_k \end{array}\right]$$

- **(Caractérisation 3 - en dimension finie)**
On suppose de plus que $F_1, \cdots, F_p$ sont de dimension finie.

$$\text{La somme } \sum_{k=1}^{p} F_k \text{ est directe} \iff \dim\Big(\sum_{k=1}^{p} F_k\Big) = \sum_{k=1}^{p} \dim F_k$$

- **(Cas particulier important : $p = 2$)**

$$\text{La somme } F_1 + F_2 \text{ est directe} \iff F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$$

Que faire ?

- Pour montrer que les sous-espaces $F_1, \cdots, F_p$ sont en somme directe, on peut utiliser une des méthodes suivantes :
  - **Méthode 1 (en utilisant la caractérisation 1)**
    on suppose que $u_1 + \cdots + u_p = 0_E$ avec $u_k \in F_k$ pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, puis on exploite les propriétés des F_k pour montrer que tous les u_k sont nuls.
  - **Méthode 2 (en utilisant la caractérisation 2)**
    on commence par déterminer une base $\mathscr{B}_k$ de F_k pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, puis on montre que la famille concaténée $\mathscr{B} = (\mathscr{B}_1, \cdots, \mathscr{B}_p)$ est une base de la somme $F_1 + \cdots + F_p$.
  - **Méthode 3 (en utilisant la caractérisation 3 - valable en dimension finie)**
    on montre que la dimension de la somme des F_k est égale à la somme des dimensions des F_k.
  - **Méthode 4 (uniquement si $p = 2$)**
    on montre que l'intersection $F_1 \cap F_2$ est nulle.
    Dans le cas où $p \geq 3$, ce résultat ne se généralise pas aisément (cf exercice 1).

Conseils

- En pratique, on privilégie les méthodes 1 et 4 pour montrer qu'une somme est directe.
  La méthode 4 est illustrée dans la fiche 10 sur les sous-espaces supplémentaires.
  Les méthodes 1 à 3 sont comparativement illustrées dans la rubrique *Exemple traité*.

Exemple traité

Soit $Q \in \mathbb{K}[X]$ non nul et $p \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, on pose $F_k = \mathrm{Vect}(X^k Q)$.
Montrer que les sous-espaces $F_1, \cdots, F_p$ sont en somme directe.

SOLUTION

- **Méthode 1 (en utilisant la caractérisation 1)**
  Soit $(R_1, \cdots, R_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p$ tel que $R_1 + \cdots + R_p = 0_{\mathbb{K}[X]} \quad (\star)$.
  Montrons que $R_1 = \cdots = R_p = 0_{\mathbb{K}[X]}$.
  Pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, comme $R_k \in F_k$, il existe un scalaire λ_k tel que $R_k = \lambda_k (X^k Q)$.
  On en déduit alors les équivalences suivantes :

  $$(\star) \iff \lambda_1 XQ + \lambda_2 X^2 Q + \cdots + \lambda_p X^p Q = 0_{\mathbb{K}[X]} \underset{Q \neq 0_{\mathbb{K}[X]}}{\iff} \lambda_1 X + \lambda_2 X^2 + \cdots + \lambda_p X^p = 0_{\mathbb{K}[X]}$$

  Or la famille $(X^k)_{k \in [\![1,p]\!]}$ est libre, donc tous les λ_k sont nuls, a fortiori les R_k aussi.
- **Méthode 2 (en utilisant la caractérisation 2)**
  Pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, la famille $\mathscr{B}_k = (X^k Q)$ est génératrice de F_k et est libre (car

constituée d'un seul vecteur non nul), donc est une base de F_k. Par ailleurs,

$$\sum_{k=1}^{p} F_k = \sum_{k=1}^{p} \mathrm{Vect}(X^k Q) = \mathrm{Vect}((X^k Q)_{k\in[\![1,p]\!]})$$

La famille concaténée $\mathscr{B} = (X^k Q)_{k\in[\![1,p]\!]}$ est génératrice de $F_1 + \cdots + F_p$ et est libre (car constituée de polynômes non nuls de degrés échelonnés), donc est bien une base de $F_1 + \cdots + F_p$.

- **Méthode 3 (en utilisant la caractérisation 3 - valable en dimension finie)**
Pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, $\dim F_k = \mathrm{rg}(X^k Q) = 1$ (car Q est non nul). Par ailleurs,

$$\sum_{k=1}^{p} F_k = \sum_{k=1}^{p} \mathrm{Vect}(X^k Q) = \mathrm{Vect}((X^k Q)_{k\in[\![1,p]\!]}), \text{ d'où : } \dim(\sum_{k=1}^{p} F_k) = \mathrm{rg}((X^k Q)_{k\in[\![1,p]\!]})$$

Or la famille $(X^k Q)_{k\in[\![1,p]\!]}$ est constituée de polynômes non nuls de degrés échelonnés donc est libre, d'où :

$$\dim(\sum_{k=1}^{p} F_k) = \mathrm{rg}((X^k Q)_{k\in[\![1,p]\!]}) = \mathrm{Card}((X^k Q)_{k\in[\![1,p]\!]}) = p = \sum_{k=1}^{p} \dim F_k$$

Exercices

EXERCICE 8.1

Soit $p \geq 3$ et $F_1, \cdots, F_p$ des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.

1. On suppose que $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$, $F_1 \cap F_3 = \{0_E\}$ et $F_2 \cap F_3 = \{0_E\}$.
Les sous-espaces F_1, F_2 et F_3 sont-ils nécessairement en somme directe ?
2. Montrer l'équivalence suivante :

$$\text{la somme } \sum_{k=1}^{p} F_k \text{ est directe} \iff \forall k \in [\![1,p-1]\!],\ \Big(\sum_{i=1}^{k} F_i\Big) \cap F_{k+1} = \{0_E\}$$

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 8.1

1. Considérer trois droites judicieusement choisies de $E = \mathbb{R}^3$.
2. Utiliser la méthode 2 pour l'implication $\Leftarrow$.

EXERCICE 8.1

1 Considérons trois droites coplanaires et deux à deux distinctes de $E = \mathbb{R}^3$.

$$F_1 = \text{Vect}((1,0,0)) \quad \text{et} \quad F_2 = \text{Vect}((0,1,0)) \quad \text{et} \quad F_3 = \text{Vect}((1,1,0))$$

Ces trois espaces sont bien deux à deux en somme directe (car d'intersection deux à deux nulle). Par contre, ils ne sont pas en somme directe. En effet :

$$0_{\mathbb{R}^3} = \underbrace{(-1,0,0)}_{\in F_1} + \underbrace{(0,-1,0)}_{\in F_2} + \underbrace{(1,1,0)}_{\in F_3}$$

Ainsi, des sous-espaces qui sont deux à deux d'intersection nulle ne sont pas nécessairement en somme directe.

2 Montrons la double implication :

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que la somme $F_1 + \cdots + F_p$ est directe.
Soit $k \in [\![1, p-1]\!]$. Montrons l'égalité ensembliste demandée.

$\boxed{\supset}$ Cette inclusion est toujours vraie car une intersection d'espaces vectoriels est un espace vectoriel, donc contient l'élément neutre 0_E.

$\boxed{\subset}$ Soit $u \in \left(\sum_{i=1}^{k} F_i\right) \cap F_{k+1}$ i.e. $\begin{cases} \exists (u_1, \cdots, u_k) \in F_1 \times \cdots \times F_k,\ u = u_1 + \cdots + u_k \\ u \in F_{k+1} \end{cases}$

On en déduit l'égalité vectorielle suivante :

$$\underbrace{u_1}_{\in F_1} + \cdots + \underbrace{u_k}_{\in F_k} + \underbrace{(-u)}_{\in F_{k+1}} + \underbrace{0_E}_{\in F_{k+2}} + \cdots + \underbrace{0_E}_{\in F_p} = 0_E$$

Or la somme $F_1 + \cdots + F_p$ est directe, d'où $u_1 = \cdots = u_k = -u = 0_E$.
En particulier, $u = 0_E$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons $\left(\sum_{i=1}^{k} F_i\right) \cap F_{k+1} = \{0_E\}$ pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$.
Montrons que la somme $F_1 + \cdots + F_p$ est directe.
Soit $(u_1, \cdots, u_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p$ tel que $u_1 + \cdots + u_p = 0_E$.
On a alors l'équivalence suivante :

$$u_1 + \cdots + u_p = 0_E \Longleftrightarrow \underbrace{u_1 + \cdots + u_{p-1}}_{\in F_1 + \cdots + F_{p-1}} = \underbrace{-\,u_p}_{\in F_p}$$

D'où $u_1 + \cdots + u_{p-1} = -u_p \in (F_1 + \cdots + F_{p-1}) \cap F_p = \{0_E\}$, et on en déduit alors que $u_1 + \cdots + u_{p-1} = u_p = 0_E$.
Sachant que $u_1 + \cdots + u_{p-1} = 0_E$ et $(F_1 + \cdots + F_{p-2}) \cap F_{p-1} = \{0_E\}$, on montre par un raisonnement analogue au précédent que $u_{p-1} = 0_E$.
De proche en proche, on montre que tous les u_k sont nuls.

Ainsi, on a bien montré l'équivalence souhaitée.

9 Montrer que des sous-espaces sont supplémentaires en dimension quelconque

Quand on ne sait pas !

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

- **(Définition de la supplémentarité)**

$$\left[\ F \text{ et } G \text{ sont supplémentaires dans } E\ \right]$$

$$\Updownarrow$$

$$\left[\begin{array}{c} E = F \oplus G, \text{ c'est-à-dire tout vecteur } u \in E \\ \text{se décompose de manière unique comme la somme} \\ \text{d'un vecteur } u_F \text{ de } F \text{ et d'un vecteur } u_G \text{ de } G \end{array}\right]$$

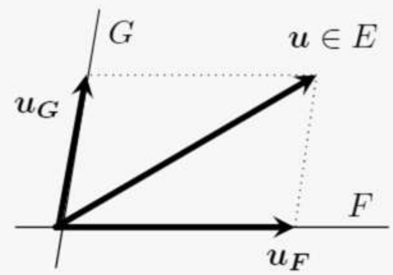


Figure illustrative

On dit aussi que F est $\boxed{\text{UN}}$ supplémentaire de G dans E ou que G est $\boxed{\text{UN}}$ supplémentaire de F dans E.

- **(Caractérisation de la supplémentarité)**

$$E = F \oplus G \iff \begin{cases} E = F + G & \leftarrow \textit{garantit l'existence d'une décomposition} \\ F \cap G = \{0_E\} & \leftarrow \textit{garantit son unicité sous réserve d'existence} \end{cases}$$

- **(Supplémentarité des éléments caractéristiques d'un projecteur/d'une symétrie)**
Soit p et s des endomorphismes de E.
  - SI p est un projecteur de E, ALORS : $\quad E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$.
  - SI s est une symétrie de E, ALORS : $\quad E = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$.

Que faire ?

- Pour montrer que $E = F \oplus G$ en dimension quelconque, on peut suivre une des méthodes suivantes énoncées par ordre de praticité :

  - **Méthode 1 (en utilisant la définition)**
    on procède par analyse-synthèse dont on rappelle le principe et la rédaction :

    - *Analyse (on suppose l'existence d'une décomposition et on montre l'unicité).*
      Soit $u \in E$. On suppose que $u = u_F + u_G$ avec $u_F \in F$ et $u_G \in G$.

      $$\left[\begin{array}{c}\textit{Raisonnement qui aboutit}\\ \textit{à un unique couple } (u_F, u_G)\end{array}\right]$$

      À l'issue de l'analyse, on trouve un unique couple (u_F, u_G) qui est CANDIDAT SOLUTION pour une telle décomposition.

    - *Synthèse (on montre l'existence d'une décomposition).*
      On vérifie que l'unique couple candidat solution trouvé est bien solution, c'est-à-dire $u_F \in F$, $u_G \in G$ et $u_F + u_G = u$.

  - **Méthode 2 (en utilisant la caractérisation)**
    on intuite l'existence d'une décomposition de $u \in E$ comme somme d'un vecteur u_F de F et d'un vecteur u_G de G, puis on montre l'unicité de cette décomposition en montrant que $F \cap G = \{0_E\}$, toute la difficulté résidant alors dans l'intuition de cette décomposition.

  - **Méthode 3 (en utilisant les propriétés des projecteurs et symétries)**
    on montre que F et G sont les éléments caractéristiques d'un certain projecteur p ou d'une certaine symétrie s à intuiter, toute la difficulté résidant alors dans l'intuition du projecteur ou de la symétrie.

EXEMPLE 1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$.

SOLUTION

Posons $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $F = \mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ et $G = \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$.
On considère l'application $s : E \longrightarrow E$ définie par :

$$\forall M \in E,\ s(M) = M^t$$

On montre aisément que s est un endomorphisme de E et $s^2 = \mathrm{Id}_E$. Donc s est une symétrie de E, et on déduit alors que :

$$E = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$$

Or on a les égalités ensemblistes suivantes :

$$\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) = \{M \in E,\ (s - \mathrm{Id}_E)(M) = 0_E\} = \{M \in E,\ M^t = M\} = F$$

$$\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E) = \{M \in E,\ (s + \mathrm{Id}_E)(M) = 0_E\} = \{M \in E,\ M^t = -M\} = G$$

Ainsi, on a bien montré que $E = F \oplus G$.

Conseils

- Ne pas hésiter à identifier les espaces E, F et G qui entrent en jeu et à préciser la nature des objets manipulés (uplets, polynômes, matrices, etc ...).
- Les méthodes présentées dans cette fiche sont valables en dimension quelconque, a fortiori en dimension finie.

Exemple traité

On note respectivement $\mathscr{P}$ et $\mathscr{I}$ les sous-espaces vectoriels des fonctions paires et impaires de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Montrer que $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \mathscr{P} \oplus \mathscr{I}$.

SOLUTION

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Montrons que f se décompose de manière unique sous la forme :

$$f = g + h \qquad \text{avec } g \text{ paire et } h \text{ impaire}$$

- *Analyse.* Supposons qu'il existe un couple (g, h) solution, c'est-à-dire vérifiant :

$$\begin{cases} g \text{ est paire} \\ h \text{ est impaire} \\ f = g + h \end{cases}, \quad \text{c'est-à-dire :} \quad \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, & g(-x) = g(x) & (i) \\ \forall x \in \mathbb{R}, & h(-x) = -h(x) & (ii) \\ \forall x \in \mathbb{R}, & f(x) = g(x) + h(x) & (iii) \end{cases}$$

Cherchons des conditions nécessaires sur le couple (g, h).
Soit $x \in \mathbb{R}$. Cherchons des conditions nécessaires sur le couple $\big(g(x), h(x)\big)$.
On a en particulier le système suivant :

$$\underset{\text{par } (iii)}{\begin{cases} f(x) = g(x) + h(x) \\ f(-x) = g(-x) + h(-x) \end{cases}} \underset{\text{par } (i) \text{ et } (ii)}{\iff} \begin{cases} f(x) = g(x) + h(x) \\ f(-x) = g(x) - h(x) \end{cases}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\iff} \begin{cases} f(x) = g(x) + h(x) \\ f(x) + f(-x) = 2g(x) \end{cases}$$

Après calculs, on en déduit : $\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} h(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2} \\ g(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2} \end{cases}$ *ces expressions déterminent un unique couple (g, h)*

$\boxed{\text{SI}}$ il existe un couple (g, h) solution du problème, $\boxed{\text{ALORS}}$ nécessairement il est unique et est composé des fonctions g et h définies par :

$$g : \left| \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad h : \left| \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & h(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2} \end{array} \right.$$

■ *Synthèse.* Vérifions que le couple (g,h) obtenu à l'issue de l'analyse est bien solution du problème, c'est-à-dire vérifie : $\begin{cases} g \text{ est paire} & (i') \\ h \text{ est impaire} & (ii') \\ f = g + h & (iii') \end{cases}$

- La condition (i') est bien vérifiée, en effet :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(-x) = \frac{f(-x)+f(x)}{2} = g(x)$$

- La condition (ii') est bien vérifiée, en effet :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h(-x) = \frac{f(-x)-f(x)}{2} = -\frac{f(x)-f(-x)}{2} = -h(x)$$

- La condition (iii') est bien vérifiée, en effet :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x)+h(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2} = f(x)$$

Ainsi, on a bien montré que $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \mathscr{P} \oplus \mathscr{I}$.

Exercices

EXERCICE 9.1

On considère les sous-espaces vectoriels suivants de $E = \mathbb{R}^3$:

$$F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x+y+2z = 0\right\} \quad \text{et} \quad G = \mathrm{Vect}((-1,-2,1)).$$

1. Montrer que $E = F \oplus G$.
2. En déduire l'expression du projecteur p sur F parallèlement à G.

EXERCICE 9.2

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier $\dfrac{\mathrm{Tr}(A)}{n} I_n + \left(A - \dfrac{\mathrm{Tr}(A)}{n} I_n\right)$ pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. En déduire que $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Vect}(I_n) \oplus \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$.

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 9.1

1. Faire un raisonnement par analyse-synthèse.
2. On rappelle que p est défini par :

$$\forall u = u_F + u_G \in E,\ p(u) = u_F$$

EXERCICE 9.2

1 Trivial.

2 Après avoir remarqué que :

$$\frac{\mathrm{Tr}(A)}{n} I_n \in \mathrm{Vect}(I_n) \quad \text{et} \quad A - \frac{\mathrm{Tr}(A)}{n} I_n \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$$

quelle égalité ensembliste peut-on en déduire ?

Solutions des exercices

EXERCICE 9.1

1 ■ *Analyse.* Soit $u = (x, y, z) \in E$. Supposons qu'il existe $(u_F, u_G) \in F \times G$ tel que $u = u_F + u_G$. Montrons que cette décomposition est unique.
Comme $u_F \in F$, il existe des réels x', y' et z' tels que $u_F = (x', y', z')$ et vérifiant $x' + y' + 2z' = 0$.
Comme $u_G \in G$, il existe un réel λ tel que $u_G = (-\lambda, -2\lambda, \lambda)$.
Pour montrer l'unicité de cette décomposition, il suffit de montrer que u_F et u_G s'expriment de manière unique en fonction de u, ce qui revient à montrer que x', y', z' et λ s'expriment de manière unique en fonction de x, y et z.
Or l'égalité $u = u_F + u_G$ permet d'écrire les équivalences suivantes :

$$\begin{cases} x = x' - \lambda \\ y = y' - 2\lambda \\ z = z' + \lambda \\ x' + y' + 2z' = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x' = x + \lambda \\ y' = y + 2\lambda \\ z' = z - \lambda \\ (x + \lambda) + (y + 2\lambda) + 2(z - \lambda) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x' = -y - 2z \\ y' = -2x - y - 4z \\ z' = x + y + 3z \\ \lambda = -x - y - 2z \end{cases}$$

Donc x', y', z' et λ s'expriment bien de manière unique en fonction de x, y et z.
Sous réserve d'existence d'une décomposition de u comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G, on a montré que la décomposition est unique.

■ *Synthèse.* Soit $u = (x, y, z) \in E$. Montrons qu'il existe $(u_F, u_G) \in F \times G$ tel que $u = u_F + u_G$.
En considérant les résultats trouvés lors de l'analyse, posons :

$$u_F = (-y - 2z, -2x - y - 4z, x + y + 3z) \quad \text{et} \quad u_G = (x + y + 2z, 2x + 2y + 4z, -x - y - 2z)$$

Il reste alors à vérifier que $u_F \in F$, $u_G \in G$ et $u_F + u_G = u$.
Ces trois vérifications sont aisées et laissées au lecteur.

Ainsi, on a bien montré que $E = F \oplus G$.

2 Le projecteur sur F parallèlement à G est défini par :

$$\forall (x, y, z) \in E,\ p(x, y, z) = (-y - 2z, -2x - y - 4z, x + y + 3z)$$

Solutions

EXERCICE 9.2

1 Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Calculons :

$$\frac{\mathrm{Tr}(A)}{n} I_n + \left(A - \frac{\mathrm{Tr}(A)}{n} I_n\right) = A$$

2 Il suffit de montrer que $\begin{cases} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Vect}(I_n) + \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}) & (i) \\ \mathrm{Vect}(I_n) \cap \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}) = \{\mathcal{O}_n\} & (ii) \end{cases}$

- Pour montrer la première égalité ensembliste (i), on montre la double inclusion :
  - $\boxed{\supset}$ Cette inclusion est toujours vraie car une somme de sous-espaces de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
  - $\boxed{\subset}$ Cette inclusion est une conséquence immédiate de la question 1.
    En effet, on y a montré que :

$$\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ A = \underbrace{\frac{\mathrm{Tr}(A)}{n} I_n}_{\in \mathrm{Vect}(I_n)} + \underbrace{\left(A - \frac{\mathrm{Tr}(A)}{n} I_n\right)}_{\in \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})\ (*)}$$

Sachant que la trace est linéaire, justifions $^{(*)}$:

$$\mathrm{Tr}\left(A - \frac{\mathrm{Tr}(A)}{n} I_n\right) = \mathrm{Tr}(A) - \frac{\mathrm{Tr}(A)}{n} \underbrace{\mathrm{Tr}(I_n)}_{=n} = 0_{\mathbb{R}}$$

- Pour montrer la seconde égalité ensembliste (ii), on montre la double inclusion :
  - $\boxed{\supset}$ Cette inclusion est toujours vraie car une intersection d'espaces vectoriels est un espace vectoriel, donc contient l'élément neutre $\mathcal{O}_n$.
  - $\boxed{\subset}$ Soit $A \in \mathrm{Vect}(I_n) \cap \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$ i.e. $\begin{cases} A \in \mathrm{Vect}(I_n) \\ A \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}) \end{cases}$ i.e. $\begin{cases} \exists \lambda \in \mathbb{R},\ A = \lambda I_n \\ \mathrm{Tr}(A) = 0_{\mathbb{R}} \end{cases}$
    Montrons que $A = \mathcal{O}_n$.
    On a les déductions suivantes :

$$\begin{array}{rrcll} & \mathrm{Tr}(A) & = & 0_{\mathbb{R}} & \\ & & & & \text{car } A = \lambda I_n \\ \text{d'où :} & \mathrm{Tr}(\lambda I_n) & = & 0_{\mathbb{R}} & \\ & & & & \text{car la trace est linéaire et } \mathrm{Tr}(I_n) = n \\ \text{d'où :} & \lambda \times n & = & 0_{\mathbb{R}} & \\ & & & & \text{car } n \neq 0 \\ \text{d'où :} & \lambda & = & 0_{\mathbb{R}} & \end{array}$$

On en déduit alors que $A = \lambda I_n = 0_{\mathbb{R}} \times I_n = \mathcal{O}_n$.

Ainsi, on a bien montré que $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Vect}(I_n) \oplus \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$.

10 Montrer que des sous-espaces sont supplémentaires en dimension finie

Quand on ne sait pas !

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie ($\mathbb{K}$ désignant $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

- **(Caractérisation de la supplémentarité 1)**

$$E = F \oplus G \underset{\substack{\uparrow \\ \textit{la plus utile}}}{\iff} \begin{cases} \dim E = \dim F + \dim G \\ F \cap G = \{0_E\} \end{cases} \underset{\substack{\uparrow \\ \textit{rarement utilisée}}}{\iff} \begin{cases} \dim E = \dim F + \dim G \\ F + G = E \end{cases}$$

- **(Caractérisation de la supplémentarité 2)**

$$E = F \oplus G \iff \left[\begin{array}{c} \text{la famille } \mathscr{B} = (\mathscr{B}_F, \mathscr{B}_G) \text{ est une base de } E, \\ \text{où } \mathscr{B}_F \text{ et } \mathscr{B}_G \text{ désignent des bases respectives} \\ \text{quelconques de } F \text{ et de } G \end{array} \right]$$

Que faire ?

- Pour montrer que $E = F \oplus G$ en dimension finie, on peut suivre une des méthodes suivantes :
  - **Méthode 1 (en utilisant la caractérisation 1) :**
    on montre une égalité de dimensions, à savoir $\dim E = \dim F + \dim G$, et une inclusion ensembliste, à savoir $F \cap G \subset \{0_E\}$ (l'autre inclusion étant toujours vraie).
  - **Méthode 2 (en utilisant la caractérisation 2) :**
    on détermine une base $\mathscr{B}_F$ de F et une base $\mathscr{B}_G$ de G, puis on montre que la famille concaténée $\mathscr{B} = (\mathscr{B}_F, \mathscr{B}_G)$ est une base de E.
    En fait, cette méthode n'est pas spécifique à la dimension finie, cependant elle est souvent utilisée dans ce contexte-là.

  Ces deux méthodes sont comparativement illustrées à travers l'exercice 1 de cette fiche.

Conseils

- En incluant les méthodes de la fiche précédente, l'abondance des méthodes pour montrer la supplémentarité peut dérouter. Il est bon de privilégier la méthode 1 de la présente fiche.
- Lorsque F et G sont des images ou des noyaux d'application linéaire, il peut-être utile de penser au théorème du rang pour établir une égalité de dimensions.

Exemple traité

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^3 = f$.
Montrer que $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$.

SOLUTION

Montrons que $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$ i.e. $\begin{cases} E = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f)) & (i) \\ \text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0_E\} & (ii) \end{cases}$

- L'égalité des dimensions (i) est assurée par le théorème du rang appliqué à f dont l'espace de départ E est de dimension finie.
- Pour montrer l'égalité ensembliste (ii), on montre la double inclusion :
  - $\boxed{\supset}$ Cette inclusion est toujours vraie car une intersection d'espaces vectoriels est un espace vectoriel, donc contient l'élément neutre 0_E.
  - $\boxed{\subset}$ Soit $u \in \text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f)$ i.e. $\begin{cases} u \in \text{Im}(f) \\ u \in \text{Ker}(f) \end{cases}$ i.e. $\begin{cases} \exists u' \in E,\ u = f(u') \\ f(u) = 0_E \end{cases}$

    Montrons que $u = 0_E$.
    On a les déductions suivantes :

$$\begin{array}{rrcll} & u & = & f(u') & \text{en composant par } f^2 \\ \text{d'où :} & f^2(u) & = & f^3(u') & \text{car } u \in \text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f)^2 \text{ et } f^3 = f \\ \text{d'où :} & 0_E & = & f(u') & \text{car } u = f(u') \\ \text{d'où :} & 0_E & = & u & \end{array}$$

Ainsi, on a bien montré que $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$.

Exercices

EXERCICE 10.1

On considère les sous-espaces vectoriels suivants de $E = \mathbb{R}^3$:

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y + 2z = 0\} \quad \text{et} \quad G = \text{Vect}((-1, -2, 1)).$$

1. Montrer que $E = F \oplus G$ à l'aide de la méthode 1.
2. Montrer que $E = F \oplus G$ à l'aide de la méthode 2.

3 Comparer au raisonnement par analyse-synthèse effectué dans l'exercice 1 de la fiche 9. Quels sont les avantage(s) et inconvénient(s) du raisonnement par analyse-synthèse ?

EXERCICE 10.2

Soit $n \geq 2$. Montrer que $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$.

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 10.2 Si besoin, commencer par déterminer une base de $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ et une base de $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ dans le cas où $n = 2$.

Solutions des exercices

EXERCICE 10.1

1 Montrons que $E = F \oplus G$ i.e. $\begin{cases} \dim E = \dim F + \dim G & (i) \\ F \cap G = \{0_E\} & (ii) \end{cases}$

- $\mathscr{B}_G = ((-1,-2,1))$ est génératrice de G et est libre (car constituée d'un seul vecteur non nul), donc est une base de G. Ainsi, $\dim G = \mathrm{Card}(\mathscr{B}_G) = 1$.
Par ailleurs, on a les égalités ensemblistes suivantes :

$$F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x = -y - 2z\right\} = \mathrm{Vect}((-1,1,0),(-2,0,1))$$

$\mathscr{B}_F = ((-1,1,0),(-2,0,1))$ est génératrice de F et est libre (car constituée de deux vecteurs non colinéaires), donc est une base de F. Ainsi, $\dim F = \mathrm{Card}(\mathscr{B}_F) = 2$.
Sachant que $\dim E = 3$, l'égalité des dimensions (i) est bien vérifiée.

- Pour montrer l'égalité ensembliste (ii), on montre la double inclusion :

$\boxed{\supset}$ Cette inclusion est toujours vraie car une intersection de sous-espaces vectoriels est un espace vectoriel, donc contient l'élément neutre 0_E.

$\boxed{\subset}$ Soit $u = (x,y,z) \in F \cap G$ i.e. $\begin{cases} u \in F \\ u \in G \end{cases}$ i.e. $\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ \exists \lambda \in \mathbb{R},\ u \underset{(\star)}{=} (-\lambda, -2\lambda, \lambda) \end{cases}$.

Montrons que $u = 0_E$.
On a les déductions suivantes :

$$x + y + 2z = 0_{\mathbb{R}} \underset{\text{par } (\star)}{\Longrightarrow} (-\lambda) + (-2\lambda) + 2(\lambda) = 0_{\mathbb{R}} \Longrightarrow \lambda = 0_{\mathbb{R}}$$

On en déduit alors que $u = 0_E$.

Ainsi, on a bien montré que $E = F \oplus G$.

2 Montrons que $E = F \oplus G$ i.e. $\mathscr{B} = (\mathscr{B}_F, \mathscr{B}_G)$ est une base de E.

Il suffit alors de montrer que $\begin{cases} \text{Card}(\mathscr{B}) = \dim E & (i) \\ \mathscr{B} \text{ est libre} & (ii) \end{cases}$

- Les bases $\mathscr{B}_F$ et $\mathscr{B}_G$ sont celles déterminées à la question précédente, et la condition (i) est bien vérifiée.
- Il reste à vérifier la condition (ii).
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1(-1,1,0)+\lambda_2(-2,0,1)+\lambda_3(-1,-2,1) = 0_E$ $(\star)$.
  Montrons que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
  On a les équivalences suivantes :

$$(\star) \iff \begin{cases} -\lambda_1 - 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\iff} \begin{cases} -\lambda_1 - 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ - 2\lambda_2 - 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow 2L_3 + L_2}{\iff} \begin{cases} -\lambda_1 - 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ - 2\lambda_2 - 3\lambda_3 = 0 \\ - \lambda_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Ainsi, on a bien montré que $E = F \oplus G$.

3 Le raisonnement par analyse-synthèse est nettement plus long à rédiger en règle générale. Cependant, il permet d'en déduire aisément l'expression des projecteurs et symétries d'éléments caractéristiques F et G.

EXERCICE 10.2

Montrons que $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ i.e. $\begin{cases} \dim(\mathscr{M}_n(\mathbb{K})) = \dim(\mathscr{S}_n(\mathbb{K})) + \dim(\mathscr{A}_n(\mathbb{K})) & (i) \\ \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \cap \mathscr{A}_n(\mathbb{K}) = \{\mathcal{O}_n\} & (ii) \end{cases}$

- La famille $(E_{ij} + E_{ji})_{1 \leq i \leq j \leq n}$ est une base de $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$, d'où $\dim(\mathscr{S}_n(\mathbb{K})) = n(n+1)/2$.
  La famille $(E_{ij} - E_{ji})_{1 \leq i < j \leq n}$ est une base de $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$, d'où $\dim(\mathscr{A}_n(\mathbb{K})) = n(n-1)/2$.
  On en déduit alors :

$$\dim(\mathscr{S}_n(\mathbb{K})) + \dim(\mathscr{A}_n(\mathbb{K})) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = n^2 = \dim(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))$$

- $\boxed{\supset}$ Cette inclusion est toujours vraie car une intersection d'espaces vectoriels est un espace vectoriel, donc contient l'élément neutre $\mathcal{O}_n$.
  $\boxed{\subset}$ Soit $M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \cap \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$. Montrons que $M = \mathcal{O}_n$.
  On a les équivalences suivantes :

$$M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \cap \mathscr{A}_n(\mathbb{K}) \iff \left[M^T = M \quad \text{ET} \quad M^T = -M \right] \iff M = \mathcal{O}_n$$

Ainsi, on a bien montré que $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$.


Réduction des
endomorphismes

Calculer un polynôme caractéristique

Dans cette fiche, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$ et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Quand on ne sait pas !

- Si A est une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La fonction définie sur $\mathbb{K}$ par $x \mapsto \det(xI_n - A)$ est polynomiale. On la note χ_A et on l'appelle le polynôme caractéristique de A. C'est un polynôme unitaire de degré n
- Soit u un endomorphisme de E. On définit de même le polynôme caractéristique de u noté χ_u comme la fonction définie sur $\mathbb{K}$ par $\chi_u : x \mapsto \det(x\,\mathrm{I}_E - u)$. C'est un polynôme unitaire de degré égal à la dimension de E.
- Si A est la matrice de u dans une base de E alors $\chi_u = \chi_A$.

Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme u (ou d'une matrice carrée A) sert en particulier à en déterminer le spectre. En effet le spectre de u (ou de A) est exactement l'ensemble des racines de χ_u (ou χ_A).

Que faire ?

- Le calcul du polynôme caractéristique d'une matrice A se ramène la plupart des temps au simple calcul du déterminant $\det(xI_n - A)$. Dans le cas d'un endomorphisme u, on commencera souvent par écrire la matrice de u dans un base bien choisie

EXEMPLE 1 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 5 \\ -2 & 2 & 1 \\ -11 & 3 & 9 \end{pmatrix}$. On veut calculer son polynôme caractéristique χ_A. Pour $x \in \mathbb{K}$,

$$\chi_A(x) = \det(xI_3 - A) = \begin{vmatrix} x+6 & -2 & -5 \\ 2 & x-2 & -1 \\ 11 & -3 & x-9 \end{vmatrix}$$

En utilisant la formule d'un déterminant de taille 3, on obtient après développement

$$\chi_A(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x-1)(x-2)^2.$$

On en déduit que les valeurs propres de A sont 1 et 2 ; la première est de multiplicité 1 et la deuxième de multiplicité 2.

- Dans la plupart des cas, on calcule le polynôme caractéristique pour en déduire les valeurs propres mais, plus rarement, on peut procéder dans l'autre sens. Si on sait que λ est une valeur propre d'un endomorphisme u (ou d'une matrice A) et que de plus le sous-espace propre associé est de dimension r, on en déduit que λ est une valeur propre de multiplicité **au moins** r et que, de ce fait, $(X-\lambda)^r$ divise χ_u (ou χ_A).

  EXEMPLE 2 Soit A la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

  où n est supposé supérieur ou égal à 2.

  On note $X = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

  On remarque pour commencer que c'est une matrice de rang 1 car son image est le sous-espace vectoriel engendré par le vecteur colonne X. De ce fait, le noyau de A (qui est aussi le sous-espace propre associé à la valeur propre 0) est de dimension $n-1$ d'après le théorème du rang. On en déduit que 0 est une valeur propre de multiplicité au moins $n-1$ et, de ce fait, que X^{n-1} divise χ_A.

  On remarque de plus que $AX = nX$. Cela implique que X est un vecteur propre pour la valeur propre n c'est-à-dire que n est une valeur propre de multiplicité au moins 1 de A. Par conséquence, $X-n$ divise χ_A.

  Finalement, comme χ_A est unitaire et de degré n, $\chi_A = X^{n-1}(X-n) = X^n - nX^{n-1}$.

Conseils

- Dans le cas d'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Le coefficient constant de χ_A (qui vaut $\chi_A(0)$) est égal à $(-1)^n \det(A)$. D'autre part, le coefficient d'ordre $n-1$ est égal à l'opposé de la trace de A. On a donc

$$\chi_A(X) = X^n - \operatorname{Tr}(A)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A)$$

  Cela permet en particulier de vérifier ses calculs.
- Quand on recherche le polynôme caractéristique d'une matrice A, on peut commencer par déterminer une matrice B semblable à A car deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique. En effet, si $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ vérifie $B = P^{-1}AP$, alors pour $x \in \mathbb{K}$,

$$\chi_B(x) = \det(xI_n - B) = \det(xI_n - P^{-1}AP) = \det(P^{-1}(xI_n - A)P)$$

  Par multiplicativité du déterminant,

$$\chi_B(x) = \det(P^{-1})\chi_A(x)\det(P) = \chi_A(x)$$

Exemple traité

Soit a_0, a_1, a_2 des éléments de $\mathbb{K}$, calculer le polynôme caractéristique de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \end{pmatrix}$$

SOLUTION

Pour $x \in \mathbb{K}$

$$\det(xI_n - A) = \begin{vmatrix} x & 0 & a_0 \\ -1 & x & a_1 \\ 0 & -1 & x + a_2 \end{vmatrix} = x^2(x + a_2) + a_0 + a_1 x = x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Ce calcul sera généralisé à l'exercice 3.

Exercices

EXERCICE 11.1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que A est inversible

1. Montrer que pour $x \neq 0$, $\chi_{A^{-1}}(x) = \det(A^{-1})(-x)^n \chi_A(\frac{1}{x})$.
2. En déduire que si on pose $\chi_A(X) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i X^i$ alors $\chi_{A^{-1}}(X) = \sum\limits_{i=0}^{n} b_i X^i$ où, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $b_i = \dfrac{(-1)^n}{\det(A)} a_{n-i}$.

EXERCICE 11.2

Soit n un entier naturel non nul, on pose

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On note alors P_n le polynôme caractéristique de A_n.

1. Calculer P_1, P_2 et P_3.
2. Montrer que pour $x \in \mathbb{K}$ et $n > 2$, $P_n(x) = xP_{n-1}(x) - P_{n-2}(x)$.

3 En déduire que pour tout entier naturel non nul n, $\det(A_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ impair} \\ (-1)^{\frac{n}{2}} & \text{si } n \text{ pair} \end{cases}$

EXERCICE 11.3

Soit $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ des éléments de $\mathbb{K}$. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 11.1

1 Écrire la définition de $\chi_{A^{-1}}(x)$ et factoriser par A^{-1}.

2 Commencer par montrer que si $x \neq 0$, $\chi_{A^{-1}}(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$ où les b_i sont les scalaires définis dans l'énoncé.

EXERCICE 11.2

1 Il suffit de faire le calcul

2 On pourra développer le déterminant définissant $\chi_{A_n}(x)$ par rapport à la première colonne.

3 Appliquer la relation précédente pour $x = 0$.

EXERCICE 11.3 On pourra développer $\det(xI_n - A)$ selon la dernière colonne.

Solutions des exercices

EXERCICE 11.1

1 Soit $x \neq 0$,

$$\chi_{A^{-1}}(x) = \det(xI_n - A^{-1}) = \det(A^{-1}(xA - I_n)) = \det(A^{-1})\det(xA - I_n)$$

On factorisant alors par $-x$, on obtient finalement,

$$\chi_{A^{-1}}(x) = \det(A^{-1})(-x)^n \det\left(\frac{1}{x}I_n - A\right) = \det(A^{-1})(-x)^n \chi_A\left(\frac{1}{x}\right)$$

2 On pose $\chi_A(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ et on obtient pour $x \neq 0$:

$$\chi_{A^{-1}}(x) = \det(A^{-1})(-x)^n \sum_{i=0}^{n} a_i x^{-i} = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^n}{\det(A)} a_i x^{n-i}$$

car $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

En réindexant la somme en posant $j = n - i$, on a $\chi_{A^{-1}}(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j$

où $b_j = \dfrac{(-1)^n}{\det(A)} a_{n-j}$.

Comme les fonctions polynomiales $\chi_{A^{-1}}$ et $\sum_{j=0}^{n} b_j X^j$ coïncident sur un ensemble infini (elles coïncident sur $\mathbb{K} \setminus \{0\}$), elles sont égales.

EXERCICE 11.2

1 On fait le calcul et on obtient, $P_1(X) = X$, $P_2(X) = X^2 - 1$ et $P_3(X) = X^3 - 2X$.

2 On développe le déterminant $\det(xI_n - A)$ selon la première colonne et on obtient $P_n(x) = x\Delta_1 - (-1)\Delta_2$, où Δ_i est le mineur relatif au coefficient de la ligne i de la première colonne. Il est évident que $\Delta_1 = P_{n-1}(x)$, il reste à calculer Δ_2. On a

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & x & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & x \end{vmatrix}$$

En développant selon la première ligne, il apparait que $\Delta_2 = -P_{n-2}(x)$. Finalement, $P_n(x) = xP_{n-1}(x) - P_{n-2}(x)$.

3 Soit n un entier naturel non nul, $P_n(0) = \chi_{A_n}(0) = \det(-A_n) = (-1)^n \det(A_n)$. Or la suite $(P_n(0))_{n\geq 1}$ vérifie, d'après les questions précédentes, $P_1(0) = 0$, $P_2(0) = -1$ et pour tout entier $n \geq 3$, $P_n(0) = -P_{n-2}(0)$.

On en déduit (par une récurrence immédiate) que si n est impair, $P_n(0) = 0$ et que si $n = 2k$ est pair, $P_n(0) = (-1)^{k-1}P_2(0) = (-1)^k$.

En utilisant la relation liant $P_n(0)$ à $\det(A_n)$,

$$\det(A_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ impair} \\ (-1)^{\frac{n}{2}} & \text{si } n \text{ pair} \end{cases}$$

EXERCICE 11.3

Pour $x \in \mathbb{K}$,

$$\chi_A(x) = \det(xI_n - A) = \begin{vmatrix} x & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & x & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & x + a_{n-1} \end{vmatrix}$$

En développant selon la dernière colonne, on a alors

$$\begin{aligned} \chi_A(x) &= (-1)^{n+1} a_0 \Delta_0 + \cdots + (-1)^{2n-1} a_{n-2} \Delta_{n-2} + (-1)^{2n} (x + a_{n-1}) \Delta_{n-1} \\ &= \sum_{i=0}^{n-2} (-1)^{n+i+1} a_i \Delta_i + (x + a_{n-1}) \Delta_{n-1} \end{aligned}$$

où Δ_i est le mineur obtenu en supprimant la dernière colonne et la $(i+1)$-ème ligne. On remarque alors que pour $i \in [\![0, n-1]\!]$, $\Delta_i = \begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{vmatrix}$, où A est un bloc de taille i triangulaire inférieur avec des x sur la diagonale et B est un bloc de taille $n-1-i$ triangulaire supérieur avec des -1 sur la diagonale. Par exemple pour $n = 5$ et $i = 2$ on a

$$\Delta_2 = \left| \begin{array}{cc|cc} x & 0 & 0 & 0 \\ -1 & x & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & x \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right|$$

On en déduit que $\Delta_i = (-1)^{n-1-i} x^i$ et donc

$$\begin{aligned} \chi_A(x) &= \sum_{i=0}^{n-2} (-1)^{n+1+i} (-1)^{n-1-i} a_i x^i + (x + a_{n-1}) x^{n-1} \\ &= \sum_{i=0}^{n-2} a_i x^i + x^n + a_{n-1} x^{n-1} \\ &= x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \end{aligned}$$

12 Déterminer le spectre d'une matrice carrée sans le polynôme caractéristique

Quand on ne sait pas !

La notation $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Si A est une matrice triangulaire, ses valeurs propres se lisent sur sa diagonale.

EXEMPLE 1 Soit $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, on lit sur la matrice que son spectre vaut $\{1, 2\}$.

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Le nombre λ est une valeur propre de A si et seulement si $\text{Rg}(A - \lambda I) < n$.
  L'entier $\dim \ker(A - \lambda I)$ est la dimension du sous-espace propre associé à λ.

EXEMPLE 2

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\text{Rg}(A - 2I) = 2 < 3$ donc 2 est une valeur propre de A, son sous-espace propre associé est de dimension 1. On peut vérifier par cette méthode que 3 est également une valeur propre de A.

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Le nombre λ est une valeur propre de A si, et seulement si, il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $X \neq 0$, tel que $AX = \lambda X$.

EXEMPLE 3

Soit $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $UX = 2X$ donc 2 est une valeur propre de U.

Que faire ?

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour déterminer les valeurs propres de A sans en calculer le polynôme caractéristique, on essaie de répondre aux questions suivantes :

- A est-elle diagonale ou triangulaire ? Dans ce cas, les valeurs sur sa diagonale sont les valeurs propres de A.

- $\mathrm{Rg}(A) < n$? Dans ce cas, 0 est une valeur propre de A.
- Pour chacune des lignes de A, on calcule la somme des coefficients de cette ligne. Le résultat est-il constant de valeur λ ? Dans ce cas, λ est une valeur propre de A et un vecteur propre associé est le vecteur dont tous les coefficients valent 1.

EXEMPLE 4

Soit $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$

La somme des coefficients de la première ligne vaut $1/2 + 1/2 = 1$; la somme de ceux de la seconde vaut $1/4 + 3/4 = 1$. Ces deux valeurs sont égales donc leur valeur commune 1 est une valeur propre, et un vecteur propre associé est $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Conseils

- Si l'on soupçonne que λ est une valeur propre de A, on peut le vérifier en calculant la valeur de $\det(A - \lambda I)$. Si le résultat vaut 0 alors λ est effectivement une valeur propre de A.
- Lorsqu'il ne reste plus qu'une seule valeur propre à trouver, il est bon de calculer la trace de A. En effet, ce nombre est égal à la somme de toutes les valeurs propres, comptées avec multiplicité, et permet donc de déterminer la dernière.

Exemple traité

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Déterminer le spectre de A sans calculer son polynôme caractéristique. Est-elle diagonalisable ?

SOLUTION

On remarque tout d'abord que $\mathrm{Rg}(A) = 2$, en effet la seconde colonne est l'opposée de la première, donc 0 est une valeur propre de A. De même,

$$A - 3I = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \mathrm{Rg}(A - 3I) = 2$$

car la troisième ligne est nulle. Ainsi 3 est également une valeur propre de A.
Il ne nous reste qu'une valeur propre λ à déterminer. On calcule alors la trace de A de deux façons. D'une part, la trace est la somme des coefficients diagonaux de A donc $\mathrm{Tr}(A) = 5$. D'autre part, c'est également la somme des valeurs propres de A (éventuellement comptées avec leur multiplicité) donc $\mathrm{Tr}(A) = 0 + 3 + \lambda$. Par identification, il vient que $\lambda = 2$. Finalement $\mathrm{Sp}(A) = \{0, 2, 3\}$.

Le spectre de A est donc constitué de 3 valeurs propres distinctes et comme il y a autant de valeurs propres distinctes que la taille de la matrice, A est donc diagonalisable.

Exercices

EXERCICE 12.1 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$. Étudier la diagonalisabilité de A.

➲ Source : ENSEA PC

EXERCICE 12.2 Soit $n \geqslant 2$, $a, b \in \mathbb{R}$ et M la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, définie par :

$$M = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix}$$

1 Déterminer les valeurs propres de M et montrer que M est diagonalisable.

2 Calculer M^2. En déduire que M^2 s'exprime sous la forme $\alpha M + \beta I$ où α et β sont des constantes réelles à déterminer et I désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3 Pour quelles valeurs de a et de b, M est-elle inversible ? Dans ces cas, déterminer M^{-1}.

➲ Source : TPE EIVP PSI

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 12.1 Remarquer que la matrice A est de rang 1 et considérer sa trace.

EXERCICE 12.2

1 Considérer le rang de la matrice $M - (a-b)I$.

2 Introduire la matrice J dont tous les coefficients valent 1. Vérifier que $J^2 = nJ$ et déterminer M en fonction de J et de I.

3 La première question permet de déterminer dans quels cas 0 est une valeur propre. La seconde permet de déterminer l'inverse de M comme polynôme en M et I.

EXERCICE 12.1 De $\mathrm{Rg}(A) = 1$ on déduit que 0 est une valeur propre de A et que la dimension du sous-espace propre associé vaut 3 ce qui implique que la multiplicité de 0 comme racine du polynôme caractéristique de A vaut au moins 3. Comme le polynôme caractéristique de A est de degré 4, il nous manque au plus une racine dont la multiplicité vaudrait au plus 1. On calcule donc la trace de A de deux façons en notant λ la valeur propre recherchée. On a alors $10 = \mathrm{Tr}(A) = 0 + 0 + 0 + \lambda$. On en déduit donc que $\lambda = 10$ est une valeur propre de A.
En résumé, $\mathrm{Sp}(A) = \{0, 10\}$, $\dim\ker(A - 0I) + \dim\ker(A - 10I) = 3 + 1 = \dim\mathbb{R}^4$ par suite A est diagonalisable.

EXERCICE 12.2

1 On remarque que M est une matrice symétrique réelle, elle est donc diagonalisable en base orthonormée d'après le théorème spectral.

D'une part, $\mathrm{Rg}\,(M - (a-b)I) = 1$ donc $a - b$ est une valeur propre de M et la dimension du sous-espace propre associé vaut $n - 1$.

D'autre part, comme M est diagonalisable et non scalaire, elle possède une seconde valeur propre que l'on note λ dans la suite. La dimension du sous-espace propre associé à λ vaut 1. En calculant la trace de M de deux façons, d'une part $\mathrm{Tr}(M) = na$, d'autre part, $\mathrm{Tr}(M) = (n-1)(a-b) + \lambda$ donc

$$\lambda = na - (n-1)(a-b) = a + (n-1)b.$$

2 En posant J la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1, on a

$$M = bJ + (a-b)I$$

Par ailleurs, $J^2 = nJ$, et, comme $J \times I = I \times J$, on peut appliquer le binôme de Newton :

$$\begin{aligned}
M^2 &= b^2J^2 + 2b(a-b)J + (a-b)^2I \\
&= (nb + 2(a-b))\,bJ + (a-b)^2I \\
&= (nb + 2(a-b))\,(M - (a-b)I) + (a-b)^2I \\
&= (nb + 2(a-b))\,M - (a-b)\,(nb + 2(a-b) - (a-b))\,I \\
&= (2a + (n-2)b)\,M - (a-b)(a + (n-1)b)I
\end{aligned}$$

donc $\alpha = 2a + (n-2)b$ et $\beta = -(a-b)\,(a + (n-1)b)$.

3 M est inversible si, et seulement si, $0 \notin \mathrm{Sp}(M)$ donc si, et seulement si, $a \neq b$ et $a \neq -(n-1)b$.
Sous ces conditions, $(a+(n-1)b)\,(a-b) \neq 0$ et le résultat de la question 2 donne

$$M \times \frac{-1}{(a+(n-1)b)\,(a-b)}\,(M-(2a+(n-2)b)\,I) = I$$

ce qui permet de conclure que $M^{-1} = \frac{-1}{(a+(n-1)b)(a-b)}\,(M-(2a+(n-2)b)\,I)$.

Solutions

13 Montrer qu'un sous espace vectoriel est stable par un endomorphisme

Dans cette fiche $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$ et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Quand on ne sait pas !

Soit u un endomorphisme de E et F un sous-espace vectoriel de E.

- On dit que F est stable par u si $u(F) \subset F$. On dit aussi que F est u-stable.
- Si F est un sous-espace vectoriel stable par u on peut alors définir l'endomorphisme induit par u sur F, noté $u_{|F}$. C'est l'endomorphisme de F défini par

$$u_{|F} : \begin{array}{ccc} F & \to & F \\ x & \mapsto & u(x) \end{array}$$

Que faire ?

On s'intéresse aux sous-espaces vectoriels stables car on peut alors définir l'endomorphisme induit. En effet si F est un sous-espace vectoriel de E, qui ne serait pas stable par u alors la restriction de u à F serait défini de F dans E (ou $u(F)$) mais pas dans F et ne serait donc pas un endomorphisme.

- Pour montrer qu'un sous-espace vectoriel F est stable par un endomorphisme u, on peut directement montrer que les images par u de tous les vecteurs de F appartiennent à F. Le plus souvent, on se contente de montrer que c'est les cas pour tous les vecteurs d'une base de F ce qui permet de conclure en utilisant la stabilité des sous-espaces vectoriels par combinaison linéaire.

  EXEMPLE 1 Soit $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  Soit $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ , \ x + y + z = 0\}$. Montrons que H est stable par u.
  On détermine une base de H. On sait que H est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$, il est donc de dimension 2. Pour déterminer une base, il suffit de considérer deux vecteurs de H qui ne soient pas colinéaires. On pose $v_1 = (1, -1, 0)$, $v_2 = (0, 1, -1)$.

On calcule $u(v_1)$ et $u(v_2)$ en faisant les produits :

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On voit donc que $u(v_1) = v_2$ et $u(v_2) = -v_1$. De ce fait H est stable par u.

- Si F est un sous-espace vectoriel stable par un endomorphisme u, on s'intéresse souvent à l'étude de l'endomorphisme induit par u sur F noté $u_{|F}$. On peut par exemple, chercher à déterminer une matrice de $u_{|F}$.

  EXEMPLE 2 On reprend l'endomorphisme u de l'exemple 1 ainsi que le sous-espace vectoriel H qui est stable par u. On cherche à déterminer une matrice de $u_{|H}$. Il est important de noter que l'on doit pour cela considérer une base de H (et pas de $\mathbb{R}^3$) car $u_{|H} \in \mathcal{L}(H)$. Reprenons la base $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ où $v_1 = (1, -1, 0)$ et $v_2 = (0, 1, -1)$ qui a été considérée à l'exemple 1. En reprenant les calculs précédents,

$$u_{|H}(v_1) = u(v_1) = v_2 \text{ et } u_{|H}(v_2) = u(v_2) = -v_1$$

  On en déduit que la matrice de $u_{|H}$ dans la base $\mathcal{B}$ de H est

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Conseils

- Quand on cherche à montrer qu'un sous-espace vectoriel F est stable par un endomorphisme u, on considère souvent une base $(x_1, \ldots, x_p)$ de F pour montrer que pour tout entier $i \in [\![1, p]\!]$, $u(x_i) \in F$.
- Pour réaliser ce qui précède, le plus simple est souvent d'exhiber des équations qui définissent l'espace vectoriel F. Par exemple si on connait $\ell_1, \ldots, \ell_q$ des formes linéaires telles que $F = \bigcap\limits_{j=1}^{q} \text{Ker}\,(\ell_j)$ il suffit donc, pour montrer que F est stable par u, de montrer que

$$\forall i \in [\![1, p]\!], \forall j \in [\![1, q]\!], \ell_i(u(x_i)) = 0$$

Exemple traité

Soit u un endomorphisme de E. On suppose que u est diagonalisable et que le spectre de u contient deux éléments a et b. On note E_a et E_b les deux sous-espaces propres. On considère un sous-espace vectoriel F stable par u et on pose $F_a = E_a \cap F$ et $F_b = E_b \cap F$.

1 Justifier que pour $x \in F$, il existe $(x_a, x_b) \in E_a \times E_b$ tel que $x = x_a + x_b$.

2 Exprimer x_a et x_b en fonction de x et de $u(x)$. En déduire que $x_a \in F_a$ et $x_b \in F_b$.

3 En déduire (sans utiliser le cours) que $u_{|F}$ est diagonalisable.

SOLUTION

1 Comme u est diagonalisable, $E = E_a \oplus E_b$ et donc, pour tout x dans E, il existe un couple $(x_a, x_b) \in E_a \times E_b$ tel que $x = x_a + x_b$. C'est donc, a fortiori, vrai pour tout élément x de F.

2 On calcule $u(x)$,

$$u(x) = u(x_a) + u(x_b) = ax_a + bx_b$$

On en déduit que x_a et x_b vérifient le système :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_a + x_b & = & x \\ ax_a + bx_b & = & u(x) \end{array} \right.$$

En résolvant, on obtient :

$$x_a = \frac{1}{b-a}(bx - u(x)) \text{ et } x_b = \frac{1}{a-b}(ax - u(x))$$

Maintenant, comme $x \in F$ et que F est stable par u, $u(x) \in F$ et ainsi x_a et x_b sont des éléments de F. Mais x_a est élément de E_a et x_b est élément de E_b, donc x_a est élément de F_a et x_b est élément de F_b.

3 On vient de montrer que $F = F_a + F_b$ car tout vecteur de x de F se décompose en une somme d'un vecteur de F_a et d'un vecteur de F_b. De plus, $F_a \cap F_b \subset E_a \cap E_b = \{0\}$ donc ils sont en somme directe. Finalement, $F = F_a \oplus F_b$ ce qui signifie que $u_{|F}$ est diagonalisable.

Notons que cela est juste un cas particulier du fait que si u est diagonalisable alors il existe un polynôme P scindé à racines simples tel que $P(u) = 0$ et donc $P(u_{|F}) = 0$ et de ce fait $u_{|F}$ est diagonalisable.

Exercices

EXERCICE 13.1

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{K}^3$ canoniquement associé à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{K}^3$.

1 Montrer que $F_1 = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ et $F_2 = \mathrm{Vect}(e_2, e_3)$ sont stables par u.

2 Calculer le polynôme caractéristique de u.

3 Soit F un plan stable par u. On note v l'endomorphisme induit par u sur F.

a. Montrer que $\chi_v = (X-1)(X-2)$ ou $(X-2)^2$.

b. Montrer que si $\chi_v = (X-1)(X-2)$ alors $F = F_1$.

c. Montrer que si $\chi_v = (X-2)^2$ alors $F = F_2$.

EXERCICE 13.2

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, u un élément de $\mathcal{L}(E)$ et H un hyperplan de E défini comme le noyau d'une forme linéaire $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ non nulle.

1 Montrer que l'ensemble des formes linéaires $\psi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ telles que $H \subset \mathrm{Ker}(\psi)$ est la droite vectorielle de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ engendrée par φ.

2 En déduire que H est stable par u, si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}, \varphi \circ u = \lambda\varphi$.

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 13.1

1 Il suffit de calculer $u(e_1), u(e_2)$ et $u(e_3)$.

2 Utiliser la formule $\chi_u(X) = \det(XI_3 - A)$.

3 a. Que dire du polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit par rapport au polynôme caractéristique de l'endomorphisme ?

b. Montrer que v est diagonalisable.

c. Utiliser le théorème de Cayley-Hamilton.

EXERCICE 13.2

1 On pourra considérer un vecteur $a \notin H$ et montrer que $\mathrm{Vect}(a)$ et H sont supplémentaires.

2 Procéder par double implication.

EXERCICE 13.1

1 Commençons par F_1. Par définition de A, $u(e_1) = e_1 \in F_1$ et $u(e_2) = 2e_2 \in F_1$ donc F_1 est stable par u. De même, $u(e_2) = 2e_2 \in F_2$ et $u(e_3) = e_2 + 2e_3 \in F_2$ donc F_2 est stable par u.

2 On a

$$\chi_u(X) = \begin{vmatrix} X-1 & 0 & 0 \\ 0 & X-2 & -1 \\ 0 & 0 & X-2 \end{vmatrix} = (X-1)(X-2)^2$$

3 **a.** Comme F est stable par u, χ_v divise χ_u. De plus, comme F est de dimension 2, χ_v est un polynôme de degré 2. On en déduit directement que

$$\chi_v = (X-1)(X-2) \text{ ou } \chi_v = (X-2)^2$$

b. On suppose que $\chi_v = (X-1)(X-2)$ qui est un polynôme scindé à racines simples. De ce fait, v est diagonalisable et donc $F = E_1(v) \oplus E_2(v)$ où $E_i(v)$ est le sous-espace propre pour v associé à la valeur propre i. On remarque alors que, comme v est un endomorphisme induit par u, $E_1(v) \subset E_1(u)$ et $E_2(v) \subset E_2(u)$. Cependant, d'après la matrice A, $E_1(u) = \mathrm{Vect}(e_1)$ et $E_2(u) = \mathrm{Vect}(e_2)$. On en déduit que $F \subset \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ puis, comme F est de dimension 2 que $F = F_1$.

c. On suppose que $\chi_v = (X-2)^2$. Cela implique, d'après le théorème de Cayley-Hamilton que $\chi_v(v) = 0$ c'est-à-dire $(v - 2\,\mathrm{I}_F)^2 = 0$. Cela signifie que pour tout élément x de F, $(v - 2\,\mathrm{I}_F)^2(x) = 0$ ce qui prouve que F est inclus dans $\mathrm{Ker}(u - 2\,\mathrm{I})^2$. Pour déterminer ce dernier sous-espace on calcule $(A - 2I_3)^2$:

$$(A - 2I_3)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il apparaît alors que $\mathrm{Ker}(u - 2\,\mathrm{I})^2 = F_2$. Là encore, comme F est de dimension 2, le fait que $F \subset F_2$ implique que $F = F_2$.

EXERCICE 13.2

1 On note $n = \dim E$.

Soit a un vecteur de E qui n'est pas dans H. Alors H et $\text{Vect}(a)$ sont en somme directe et la dimension de $H \oplus \text{Vect}(a)$ est égal $(n-1)+1 = n$.
On en déduit que $H \oplus \text{Vect}(a) = E$.
Soit ψ une forme linéaire telle que $H \subset \text{Ker}(\psi)$, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\psi(a) = \lambda\varphi(a)$, en effet, $\varphi(a) \neq 0$ par définition de a et donc on peut poser $\lambda = \frac{\psi(a)}{\varphi(a)}$.
Dès lors, pour tout $x \in E$, on peut écrire (grâce à la supplémentarité précédente), $x = h + ka$ où $h \in H$ et $k \in \mathbb{K}$. Comme $\varphi(h) = 0$ car H est le noyau de φ, on a alors

$$\psi(x) = \psi(h) + k\psi(a) = 0 + k\lambda\varphi(a) = \lambda(\varphi(h) + \varphi(ka)) = \lambda\varphi(x)$$

Réciproquement, s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\psi = \lambda\varphi$ alors pour tout $x \in H$, $\psi(x) = 0$ et donc $H \subset \text{Ker}(\psi)$.

2 On procède par double implication.

- On suppose que H est stable par u et on considère la forme linéaire $\varphi \circ u : E \to \mathbb{K}$. Pour tout $h \in H$,

$$(\varphi \circ u)(h) = \varphi(u(h)) = 0 \text{ (puisque } u(h) \in H = \text{Ker}(\varphi))$$

  On en déduit que $H \subset \text{Ker}(\varphi \circ u)$ et donc, en utilisant la question précédente, qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\varphi \circ u = \lambda\varphi$.

- On suppose réciproquement qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\varphi \circ u = \lambda\varphi$. Pour tout $h \in H$,

$$\varphi(u(h)) = \lambda\varphi(h) = 0$$

  Cela implique que $u(h) \in \text{Ker}(\varphi) = H$. Finalement, H est stable par u.

Solutions

14 Montrer qu'un endomorphisme (une matrice carrée) est diagonalisable « à la main »

Dans cette fiche, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$ et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Quand on ne sait pas !

- Si A est une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Elle est dite diagonalisable s'il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telle que $P^{-1}AP = D$.
- Soit u un endomorphisme de E. Il est diagonalisable s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ soit diagonale.

Soit u un endomorphisme de E et $\mathcal{B}$ une base de E. L'endomorphisme est diagonalisable si et seulement si la matrice de u dans cette base est diagonalisable.

Que faire ?

Il existe de nombreuses méthodes pour montrer qu'un endomorphisme (ou une matrice) est diagonalisable. Dans cette fiche, nous ne couvrons que les méthodes élémentaires, sans avoir recours à des théorèmes sophistiqués : voir les fiches suivantes pour aborder d'autres techniques.

Pour montrer qu'un endomorphisme u (ou une matrice A) est diagonalisable, nous allons chercher ses valeurs propres et vérifier que les sous-espaces propres engendrent tout l'espace, c'est-à-dire que

$$\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u) = E \quad \text{où} \quad \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} E_\lambda(A) = \mathbb{K}^n$$

Comme on sait que les sous-espaces propres sont en somme directe, on est ramené dans le cas où E est un espace vectoriel de dimension finie, a vérifier l'égalité des dimensions :

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim E_\lambda(u) = \dim E \quad \text{où} \quad \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \dim E_\lambda(A) = n$$

EXEMPLE 1 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On calcule son polynôme caractéristique χ_A. Pour $x \in \mathbb{K}$,

$$\chi_A(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = (x-1)^2(x-2)$$

On en déduit que les valeurs propres de A sont 1 et 2 ; la première est de multiplicité 2 et la deuxième de multiplicité 1.

On sait alors que $\dim E_2(A) = 1$, il reste à calculer $\dim E_1(A) = \mathrm{Ker}(A - I_3)$. Pour cela on étudie,

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Il apparait clairement que c'est une matrice de rang 1 (puisque les trois colonnes sont colinéaires entre elles). On en déduit, d'après le théorème du rang que

$$\dim E_1(A) = \dim \mathrm{Ker}(A - I_3) = 3 - \mathrm{Rg}(A - I_3) = 2$$

Finalement, on a bien $\dim E_1(A) + \dim E_2(A) = 3$ donc la matrice A est diagonalisable.

- Si un endomorphisme u (ou une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) a $\dim E$ valeurs propres (ou n valeurs propres) deux à deux distinctes alors il est diagonalisable. En effet, chaque sous-espace propre est de dimension 1 donc la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à la dimension de E (ou est égale à n).

EXEMPLE 2 Soit $n \geq 1$. On considère l'application $u : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ définie par $u : P \mapsto XP' + P''$. On remarque pour commencer que u est bien définie car si P est de degré au plus n alors $\deg(XP') \leq 1 + (n-1) = n$ et $\deg(P'') \leq n$. On peut donc en déduire que si P est de degré au plus n, $u(P)$ aussi. De plus, l'application P est linéaire puisque la dérivation est linéaire.

On cherche à savoir si u est diagonalisable. Pour cela, on va calculer sa matrice (dans la base canonique) afin de chercher ses valeurs propres. On obtient pour $k \in [\![0, n]\!]$,

$$u(X^k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k = 0 \\ X & \text{si } k = 1 \\ kX^k + k(k-1)X^{k-2} & \text{si } k \geq 2 \end{cases}$$

On en déduit que la matrice A de u dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$$

On s'aperçoit que la matrice A est triangulaire supérieure (ce qui était prévisible car si $k \leq n$ alors $\mathbb{R}_k[X]$ est stable par u). Cela implique que le spectre de u est $[\![0, n]\!]$. On voit alors que u a $n+1$ valeurs propres deux à deux distinctes et comme $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$, on obtient que u est diagonalisable.

Conseils

- La première chose à faire est d'essayer de calculer les valeurs propres de l'endomorphisme (ou de la matrice) ; par exemple en calculant le polynôme caractéristique. Si cela semble difficile, il faut s'orienter vers d'autres méthodes.
- Il ne sert à rien (au moins dans un premier temps) de calculer explicitement les vecteurs propres. Dans la majorité des cas, il suffit de connaitre la dimension des sous-espaces propres pour pouvoir conclure à la diagonalisabilité (ou la non-diagonalisabilité).

Exemple traité

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice non nulle. On considère l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ défini par

$$\Phi_A : M \mapsto \mathrm{Tr}(A)M + \mathrm{Tr}(M)A$$

1 Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer que si λ est une valeur propre de Φ alors $\lambda = \mathrm{Tr}(A)$ ou $\lambda = 2\mathrm{Tr}(A)$.

2 Montrer que si $\mathrm{Tr}(A) = 0$ alors Φ n'est pas diagonalisable.

3 Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel $H = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})\ , \mathrm{Tr}(M) = 0\}$. En déduire que, si $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$, alors Φ est diagonalisable.

SOLUTION

1 Soit λ une valeur propre de Φ et M un vecteur propre non nul associé à la valeur propre λ. Par définition, $\Phi(M) = \mathrm{Tr}(A)M + \mathrm{Tr}(M)A = \lambda M$.
On en déduit que $\mathrm{Tr}(M)A = (\lambda - \mathrm{Tr}(A))M$. De ce fait, $\lambda = \mathrm{Tr}(A)$ ou M est colinéaire à A. Dans ce deuxième cas, en posant $M = \mu A$ (avec $\mu \neq 0$) on obtient

$$\Phi(M) = \Phi(\mu A) = \mu\Phi(A) = 2\mu\mathrm{Tr}(A)A = 2\mathrm{Tr}(A)M.$$

Finalement λ vaut $\mathrm{Tr}(A)$ ou $2\mathrm{Tr}(A)$.

2 On suppose que $\mathrm{Tr}(A) = 0$. Dans ce cas, $\Phi : M \mapsto \mathrm{Tr}(M)A$. On a montré dans la question précédente que $\mathrm{Sp}(\Phi) \subset \{\mathrm{Tr}(A)\} = \{0\}$. La seule valeur propre possible est 0. Or, Φ n'est pas l'application nulle car A n'est pas nulle (par exemple $\Phi(I_n) = nA$). Donc

$$\dim E_0(\Phi) = \dim \mathrm{Ker}(\Phi) < n^2 = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

Cela implique que Φ n'est pas diagonalisable.

3 On considère $H = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})\ , \mathrm{Tr}(M) = 0\}$. Comme l'application Tr est une forme linéaire non nulle, le sous-espace vectoriel H, qui est son noyau, est un hyperplan. Il est de dimension $n^2 - 1$.
On suppose maintenant que $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$.
On voit que $\Phi(A) = 2\mathrm{Tr}(A)A$ donc $2\mathrm{Tr}(A)$ est une valeur propre de Φ ainsi

$$\dim E_{2\mathrm{Tr}(A)}(\Phi) \geq 1$$

De plus on a $\Phi(M) = \mathrm{Tr}(A)M$ si et seulement si $\mathrm{Tr}(M)A = 0$ et donc $E_{\mathrm{Tr}(A)}(\Phi) = H$. Il en résulte que

$$\dim E_{\mathrm{Tr}(A)}(\Phi) + \dim E_{2\mathrm{Tr}(A)} \geq (n^2 - 1) + 1 = n^2 = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

L'application Φ est diagonalisable.

Exercices

EXERCICE 14.1

On considère pour $m \in \mathbb{R}$ la matrice

$$A_m = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m+1 \end{pmatrix}$$

1. Determiner les valeurs propres de A_m.
2. Pour quelles valeurs de m la matrice A_m est-elle diagonalisable ?

EXERCICE 14.2

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On considère l'application

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ M & \mapsto & AM \end{array}$$

1. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer que si λ est une valeur propre de A alors λ est une valeur propre de Φ
2. Soit λ une valeur propre de A, donner une base du sous-espace propre $E_\lambda(\Phi)$.
3. Exprimer $\dim E_\lambda(\Phi)$ en fonction de $\dim E_\lambda(A)$ et en déduire que si A est diagonalisable alors Φ est diagonalisable.

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 14.1

1. La matrice A_m est triangulaire supérieure.
2. Commencer par chercher les valeurs de m telles que A_m ait trois valeurs propres distinctes.

EXERCICE 14.2

1. Soit M une matrice, exprimer les colonnes de $\Phi(M)$ en fonction des colonnes de M.
2. On pourra commencer par considérer une base $(X_1, \ldots, X_p)$ du sous-espace propre $E_\lambda(A)$ et regarder pour $i \in [\![1, n]\!]$ et $j \in [\![1, p]\!]$ les matrices
$$M_{i,j} = (0|\cdots|0|X_j|\,0|\cdots|0)$$
où la colonne X_j est en position i.

EXERCICE 14.1

1 La matrice A_m étant triangulaire supérieure, ses valeurs propres sont 1, m et $m+1$. On en déduit :

- Si $m \notin \{0,1\}$, $\mathrm{Sp}(A_m) = \{1, m, m+1\}$.
- Si $m = 0$, $\mathrm{Sp}(A_m) = \{0,1\}$.
- Si $m = 1$, $\mathrm{Sp}(A_m) = \{1,2\}$.

2 Si $m \notin \{0,1\}$, la matrice A_m a trois valeurs propres distinctes, elle est donc diagonalisable.
Si $m = 0$, on a

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On peut voir aisément que les vecteurs colonnes $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartiennent au sous-espace propre associé à la valeur propre 1 (car ce sont des vecteurs du noyau de $A_0 - I_3$) et donc, comme ce sont des vecteurs non colinéaires, $\dim E_1(A_0) \geq 2$. Comme $\dim E_0(A_0) \geq 1$, la matrice A_0 est diagonalisable.
Si $m = 1$, on a

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est le noyau de

$$A_1 - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice étant de rang 2 (puisque ses deux dernières colonnes ne sont pas colinéaires), $\dim E_1(A_1) = 1$.
De même, le sous-espace propre associé à la valeur propre 2 est le noyau de

$$A_1 - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette matrice étant de rang 2 (puisque ses deux premières colonnes ne sont pas colinéaires), $\dim E_2(A_1) = 1$.

Finalement, $\dim E_1(A_1) + \dim E_2(A_1) = 2 < 3$ donc A_1 n'est pas diagonalisable.
On a A_m diagonalisable si et seulement si $m \neq 1$.

EXERCICE 14.2

1 Soit M une matrice. On note $X_1, X_2, \dots, X_n$ les colonnes de M.
On pose alors $M = (X_1|X_2|\cdots|X_n)$. On a $\Phi(M) = AM = (AX_1|AX_2|\cdots|AX_n)$.
De ce fait, si λ est une valeur propre de A et si on note X un vecteur propre (non nul) de A associé à la valeur propre λ. Alors, en considèrant la matrice $M = (X|X|\cdots|X)$, le calcul précédent donne :

$$\Phi(M) = (AX|\cdots|AX) = (\lambda X|\cdots|\lambda X) = \lambda M$$

De ce fait M, qui est non nulle, est un vecteur propre de Φ associé à la valeur propre λ donc λ est une valeur propre de Φ.

2 Soit λ une valeur propre de A. Notons p la dimension du sous-espace propre $E_\lambda(A)$ et considérons $(X_1, \dots, X_p)$ une base de ce sous-espace. Soit $i \in [\![1, n]\!]$ et $j \in [\![1, p]\!]$ on pose

$$M_{i,j} = (0|\cdots|0|X_j|\,0|\cdots|0)$$

la matrice où la colonne X_j est en position i. On va montrer que les np matrices $M_{i,j}$ forment une base de $E_\lambda(\Phi)$.
On commence en remarquant que, pour $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$, $M_{i,j} \in E_\lambda(\Phi)$ d'après le calcul de la question précédente.
De plus, la famille $(M_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ est libre. En effet si $(\alpha_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ est une famille de scalaires telle que

$$\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} \alpha_{i,j} M_{i,j} = 0$$

En ne considérant que la i-ème colonne, on obtient, $\sum_{j=1}^{p} \alpha_{i,j} X_j = 0$. Comme la famille $(X_1, \dots, X_p)$ est libre, pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, $\alpha_{i,j} = 0$. Ceci étant vrai pour tous les i compris entre 1 et n, on a bien que la famille $(M_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ est libre.
Montrons maintenant que cette famille engendre $E_\lambda(\Phi)$. Soit $M \in E_\lambda(\Phi)$. On note $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de M. D'après le calcul de la question 1, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, C_i appartient à $E_\lambda(A)$ et de ce fait, il existe des scalaires $(\alpha_{i,j})_{j\in[\![1,p]\!]}$ tels que :

$$C_i = \sum_{j=1}^{p} \alpha_{i,j} X_j$$

Cela implique que

$$M = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} \alpha_{i,j} M_{i,j}$$

On a bien montré que la famille $(M_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ engendre $E_\lambda(\Phi)$ et donc que c'est une base de ce sous-espace propre.

Solutions

3 D'après la question précédente, $\dim E_\lambda(\Phi) = n \dim E_\lambda(A)$. Si on suppose que A est diagonalisable,

$$n = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \dim E_\lambda(A)$$

On en déduit que

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(\Phi)} \dim E_\lambda(\Phi) = n \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \dim E_\lambda(A) = n^2 = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

On obtient bien que Φ est diagonalisable.

Montrer qu'un endomorphisme (une matrice carrée) est trigonalisable et trigonaliser (cas n = 2 et n = 3)

Quand on ne sait pas !

La notation $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est trigonalisable si et seulement s'il existe une matrice triangulaire T de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ semblable à A.

- Une matrice est trigonalisable dans $\mathbb{K}$ si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{K}$.

EXEMPLE 1

La matrice $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est une matrice triangulaire (supérieure).

EXEMPLE 2

La matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & -17 & 25 \\ 2 & -9 & 16 \\ 1 & -5 & 9 \end{pmatrix}$ est trigonalisable dans $\mathbb{R}$.

En effet, en calculant le polynôme caractéristique de A on obtient :

$$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} t-5 & 17 & -25 \\ -2 & t+9 & -16 \\ -1 & 5 & t-9 \end{vmatrix} = t^3 - 5t^2 + 8t - 4 = (t-2)^2(t-1)$$

Ce polynôme est scindé dans $\mathbb{R}$ avec deux racines 2 (double) et 1 (simple).

Que faire ?

Pour montrer qu'une matrice A donnée dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable, on vérifie que le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$.
Pour déterminer une base de trigonalisation, on répète autant de fois que nécessaire les opérations suivantes :

- Pour $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$, on détermine une famille libre L_λ de vecteurs propres associés à λ.
- Si L_λ n'est pas de cardinal égal à la multiplicité de λ comme racine du polynôme caractéristique de A on cherche un vecteur V tel que $AV - \lambda V \in \mathrm{Vect}(\mathrm{L}_\lambda)$.

- On ajoute V à L_λ jusqu'à ce qu'elle ait un rang égal à la multiplicité de λ comme racine du polynôme caractéristique de A.

Conseils

- Le fait de choisir des vecteurs dans $\mathrm{Vect}\,(\mathrm{L}_\lambda)$ autorise plusieurs choix possibles de vecteurs. On choisira alors ceux dont les coordonnées sont les plus simples (le plus de 0 possible par exemple).
- Comme il y a plusieurs choix possibles pour compléter la famille libre L_λ, en général, la forme triangulaire à laquelle il faut aboutir est imposée par l'énoncé.
- Lorsqu'il ne reste plus qu'un seul vecteur à trouver, et que la forme de la matrice triangulaire n'est pas imposée par l'énoncé, n'importe quel vecteur complétant la famille en une base convient.
- Lorsque l'on construit la base de triangularisation, on place en premières positions les vecteurs propres associés aux valeurs propres pour lesquelles la dimension du sous-espace propre associé et la multiplicité de la racine sont égales.

Exemple traité

Trigonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

SOLUTION

On calcule le polynôme caractéristique de A :

$$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} t-2 & 0 & -1 \\ -1 & t-1 & 0 \\ 1 & -1 & t-3 \end{vmatrix} = t^3 + 6t^2 - 12t^2 + 8 = (t-2)^3$$

le polynôme est scindé donc la matrice est trigonalisable.

Soit $V_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un vecteur propre de A :

$$AV_1 = 2V_1 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{cl} z & = 0 \\ x - y & = 0 \\ -x + y + z & = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{cl} x & = y \\ z & = 0 \end{array} \right.$$

on peut donc choisir $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et poser $\mathrm{L}_2 = (V_1)$.

On pose alors $V_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et on doit avoir $AV_2 - 2V_2 \in \text{Vect}(V_1)$ or

$$AV_2 - 2V_2 = \begin{pmatrix} z \\ x-y \\ -x+y+z \end{pmatrix}$$

donc

$$AV_2 - 2V_2 \in \text{Vect}(V_1) \Leftrightarrow \begin{cases} z = x - y \\ -x+y+z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow z = x - y$$

on peut donc choisir $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ qui est un vecteur vérifiant la condition et non colinéaire à V_1. Comme la nouvelle famille $\mathrm{L}_2 = (V_1, V_2)$ n'est toujours pas une base de $\mathbb{R}^3$, en théorie, on devrait répéter l'opération. Toutefois, il ne manque plus qu'un seul vecteur et la forme de la matrice n'est pas imposée par l'énoncé donc on peut compléter la famille par tout vecteur V_3 tel que (V_1, V_2, V_3) forme une base de $\mathbb{R}^3$.

Par exemple, en prenant $V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$$\det(V_1, V_2, V_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

on a donc une base de $\mathbb{R}^3$ et comme

$$\begin{aligned} AV_1 &= 2V_1 \\ AV_2 &= 2V_2 + V_1 \\ AV_3 &= 2V_3 + V_2 \end{aligned}$$

dans cette nouvelle base, A est semblable à $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

On pouvait aussi appliquer la formule de changement de base mais c'est un peu plus long.

Exercices

EXERCICE 15.1

Montrer que $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ est semblable à une matrice triangulaire inférieure.

EXERCICE 15.2

Soit a un réel strictement positif. On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & a & -a \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1 Calculer le polynôme caractéristique de A et en déduire que A n'est pas diagonalisable.

2 Déterminer trois matrices colonnes V_1, V_2 et V_3 vérifiant

$$\begin{cases} AV_1 = -V_1 \\ AV_2 = V_1 - V_2 \\ AV_3 = V_1 + V_2 - V_3 \end{cases}$$

3 Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

➲ Source : D'après IMT

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 15.1 Trouver une base dans laquelle A est semblable à une matrice triangulaire supérieure et permuter les vecteurs de la base.

EXERCICE 15.2

1 Vérifier que le polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{R}$.

2 V_1 est un vecteur propre associé à la valeur propre -1.
Les vecteurs V_2 et V_3 s'obtiennent en résolvant les systèmes associés aux relations données. Leurs coordonnées peuvent dépendre du paramètre a.

3 Il s'agit de la traduction matricielle du changement de base.

Solutions des exercices

EXERCICE 15.1

Le calcul du polynôme caractéristique de A donne $\chi_A(t) = (t+1)^2$ donc la matrice est trigonalisable dans $\mathbb{R}^2$.

Soit $V_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur propre de A :

$$AV_1 = -V_1 \Leftrightarrow x + y = 0$$

on peut donc choisir $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Comme il ne nous manque qu'un seul vecteur, on complète (V_1) en une base avec, par exemple, $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. En suivant l'indication, on cherche la forme de la matrice semblable à A dans la base (V_2, V_1) :

$$\begin{aligned} AV_2 &= -\ V_2 + V_1 \\ AV_1 &= -\ V_1 \end{aligned}$$

Ainsi, A est semblable à $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 15.2

1 Soit $t \in \mathbb{R}$. En développant par rapport à la troisième colonne :

$$\begin{aligned} \chi_A(t) = \begin{vmatrix} t+1 & -a & a \\ -1 & t+1 & 0 \\ -1 & 0 & t+1 \end{vmatrix} &= a \begin{vmatrix} -1 & t+1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + (t+1) \begin{vmatrix} t+1 & -a \\ -1 & t+1 \end{vmatrix} \\ &= a(t+1) + (t+1)\left[(t+1)^2 - a\right] \\ &= (t+1)^3 \end{aligned}$$

Le polynôme obtenu est scindé, quelle que soit la valeur de a donc la matrice est semblable à une matrice triangulaire.
On peut remarquer qu'elle n'est pas diagonalisable car sinon elle serait semblable à $-\mathrm{I}$ qui n'est semblable qu'à elle-même.

2 Soit $V_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé à la seule valeur propre -1 :

$$AV_1 = -V_1 \Leftrightarrow \begin{cases} a(y-z) & = 0 \\ x & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y-z) & = 0 \\ x & = 0 \end{cases}$$

car $a > 0$ d'après l'énoncé. On peut donc choisir $V_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Soit $V_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. En traduisant la relation $AV_2 = -V_2 + V_1$ on obtient le système :

$$\begin{cases} a(y-z) & = 0 \\ x & = 1 \end{cases}$$

Solutions

Un vecteur simple vérifiant cette relation est, par exemple, $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Soit $V_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. En traduisant la relation $AV_3 = -V_3 + V_1 + V_2$ on obtient le système :

$$\begin{cases} a(y-z) & = 1 \\ \quad x & = 1 \end{cases}$$

Un vecteur simple vérifiant cette relation est, par exemple, car $a > 0$, $V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{a} \\ 0 \end{pmatrix}$.

On remarque que ce dernier vecteur dépend bien du paramètre a.

3 On vérifie tout d'abord que la famille (V_1, V_2, V_3) forme une base de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{1}{a} \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{a} > 0$$

car $a > 0$.
Ainsi, compte tenu de la question précédente, par changement de base, A est semblable à la matrice proposée.

Montrer qu'un endomorphisme (une matrice) est nilpotent(e) et l'utiliser

Quand on ne sait pas !

La notation E désigne un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension finie ou non.

- Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, u est nilpotent s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $u^p = 0$.
- Le plus petit indice p tel que $u^p = 0$ est appelé indice de nilpotence de u.
- Si la dimension de E vaut n alors nécessairement $p \leqslant n$.

EXEMPLE 1 On considère $E = \mathbb{R}_3[X]$ et $P \in E$. On définit alors l'endomorphisme u de E par $u(P) = P'$.

Cet endomorphisme est alors nilpotent car, pour tout $P \in E$, $u^4(P) = P^{(4)} = 0$ puisque P est de degré au plus 3.

Que faire ?

Pour prouver qu'un endomorphisme est nilpotent on peut essayer de vérifier un des points suivants :

- Calculer u^k (en prenant $k = \dim E$ lorsque E est de dimension finie).
- Trouver une base dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure stricte.
- Montrer que u n'admet qu'une seule valeur propre : 0.

Conseils

- En pratique lorsque $\dim E = n$, il arrive souvent que $\mathrm{Rg}(u) = n - 1$. Il faut alors trouver un élément $x \in E$ tel que $u^{n-1}(x) \neq 0$. Dès lors, on construit une base cyclique

$\left(u^{n-1}(x), u^{n-2}(x), \ldots, u(x), x\right)$ dans laquelle la matrice de u a la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Souvent la nilpotence intervient de façon indirecte. Lorsque l'on cherche à calculer A^n pour une matrice A non diagonalisable. On trouve alors une base dans laquelle A est semblable à $D + N$ où D est diagonale et N nilpotente telles que $D \times N = N \times D$ et on applique le binôme de Newton.

Exemple traité

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 9 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $(A - I)^2$, en déduire A^n.

SOLUTION

On vérifie facilement que $(A - I)^2 = 0$ donc $N = A - I$ est nilpotente et comme N et A commutent, on peut appliquer le binôme de Newton :

$$\begin{aligned} A^n = (I + N)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I^{n-k} N^k \\ &= \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} I^{n-k} N^k \\ &= I + nN \\ &= nA + (1 - n)I \end{aligned}$$

Exercices

EXERCICE 16.1 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente telle que $A^T A = A A^T$ où A^T désigne la transposée de A. On pose $B = A^T A$, montrer que B est symétrique et nilpotente.
En déduire que $A = 0$.

Source : D'après Centrale

EXERCICE 16.2 Soit E un espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^{n-1} \neq 0$ et $f^n = 0$.
On pose :

$$\mathcal{C} = \{g \in \mathcal{L}(E), \quad f \circ g = g \circ f\}$$

1 Montrer qu'il existe $a \in E$ tel que $\left(a, f(a), \ldots, f^{n-1}(a)\right)$ soit une base de E.

2 Montrer que $\left(Id, f, \ldots, f^{n-1}\right)$ est une base de $\mathcal{C}$.

➲ Source : D'après Centrale PC

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 16.1 Munir $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire usuel et calculer $||AX||_2^2$ pour un vecteur $X \in \mathbb{R}^n$.

EXERCICE 16.2

1 Exploiter l'hypothèse que $f^{n-1} \neq 0$ pour prouver l'existence de a. Supposer ensuite que la famille est liée, écrire la relation de dépendance linéaire et appliquer u^k pour une valeur de k judicieusement choisie.

2 Prouver que $\left(Id, f, \ldots, f^{n-1}\right)$ est une famille libre en évaluant une relation de dépendance linéaire en a. Pour $g \in \mathcal{C}$, prouver que la famille est génératrice en décomposant $g(x)$ dans la base cyclique précédente.

Solutions des exercices

EXERCICE 16.1

On montre tout d'abord la nilpotence. En posant p l'indice de nilpotence de A, du fait de la commutativité de A et de A^T, on a $B^p = (A^T)^p A^p = 0$ donc B est nilpotente.
On montre maintenant la symétrie, $B^T = (A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A = B$. Ainsi, B est symétrique réelle donc diagonalisable (en base orthonormée pour le produit scalaire usuel) d'après le théorème spectral. Or, puisque B est nilpotente, $\mathrm{Sp}(B) = \{0\}$ et par suite, B est la matrice nulle (car semblable à la matrice nulle).
On munit alors $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire usuel, pour $X \in \mathbb{R}^n$, on a alors

$$||AX||_2^2 = (AX)^T AX = X^T A^T AX = X^T BX = 0$$

d'où $AX = 0$ et ce, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ donc A est la matrice nulle.

Solutions

EXERCICE 16.2

1 Par hypothèse, $f^{n-1} \neq 0$ donc il existe $a \in E$ tel que $f^{n-1}(a) \neq 0$. On montre alors que $\left(a, f(a), \ldots, f^{n-1}(a)\right)$ est libre. On effectue pour cela un raisonnement par l'absurde. Soient $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{R}$, non tous nuls, tels que

$$\alpha_0 a + \alpha_1 f a) + \ldots + \alpha_{n-1} f^{n-1}(a) = 0$$

On pose alors $p = \min\left\{i \in [\![0, n-1]\!], \quad \alpha_i \neq 0\right\}$, on a donc

$$\alpha_p f^p(a) + \alpha_{p+1} f^{p+1}(a) + \ldots + \alpha_{n-1} f^{n-1}(a) = 0$$

on compose alors cette expression par f^{n-1-p}, dès lors on obtient

$$\alpha_p f^{n-1}(a) + 0 + \ldots + 0 = 0 \implies \alpha_p = 0$$

car $f^{n-1}(a) \neq 0$. La nullité de α_p constitue alors une contradiction. La famille est donc libre et comme elle a le cardinal d'une base de E, c'est une base de E.

2 On démontre tout d'abord que $\left(Id, f, \ldots, f^{n-1}\right)$ est une famille libre en raisonnant par l'absurde ; en effet, s'il existait des scalaires $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{R}$, non tous nuls, tels que $\alpha_0 Id + \alpha_1 f + \ldots + \alpha_{n-1} f^{n-1} = 0$ alors, en particulier, cette expression évaluée en a serait une relation de dépendance linéaire entre les vecteurs de la base obtenue à la question précédente, ce qui constitue une contradiction.

Nous disposons donc d'une famille libre d'éléments de $\mathcal{C}$ puisqu'il est évident que tous les éléments de cette famille commutent avec f. On montre alors que cette famille est génératrice.

Soit $g \in \mathcal{C}$, le vecteur $g(a)$ possède des coordonnées $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}$ dans la base cyclique de la question 1), c'est-à-dire :

$$g(a) = \alpha_0 a + \alpha_1 f(a) + \ldots + \alpha_{n-1} f^{n-1}(a)$$

dès lors, pour $i \in [\![0, n-1]\!]$, on a

$$\begin{aligned} g\left(f^i a)\right) = f^i\left(g(a)\right) &= f^i\left(\sum_{p=0}^{n-1} \alpha_p f^p(a)\right) \\ &= \sum_{p=0}^{n-1} \alpha_p f^{i+p}(a) \end{aligned}$$

en remarquant le fait que g et f^i commutent (ce qui se prouve par récurrence).

Ainsi, pour un $x \in E$ de coordonnées $\beta_0, \ldots, \beta_{n-1} \in \mathbb{R}$ dans la base cyclique, on a :

$$\begin{aligned}
g(x) = g\left(\sum_{i=0}^{n-1} \beta_i f^i(a)\right) &= \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i g\left(f^i(a)\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{p=0}^{n-1} \beta_i \alpha_p f^{p+i}(a) \\
&= \sum_{p=0}^{n-1} \alpha_p f^p\left(\sum_{i=0}^{p} \beta_i f^i(a)\right) \\
&= \sum_{p=0}^{n-1} \alpha_p f^p(x)
\end{aligned}$$

d'où $g = \sum\limits_{p=0}^{n-1} \alpha_p f^p \in \mathcal{C}$. La famille étant libre et génératrice, on en conclut donc que c'est une base de $\mathcal{C}$.

Solutions

17 Calculer le polynôme minimal d'un endomorphisme (d'une matrice carrée)

Dans cette fiche $\mathbb{K}$ désigne un corps et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Quand on ne sait pas !

Soit u un endomorphisme de E. L'ensemble I_u des polynômes P tels que $P(u) = 0$ est un idéal non réduit à $\{0\}$. On appelle polynôme minimal de u et on note μ_u l'unique polynôme unitaire qui engendre I_u.

- Par définition, $\mu_u(u) = 0$.
- Soit P un polynôme annulateur de u, c'est-à-dire un polynôme P tel que $P(u) = 0$, par définition μ_u divise P .

Si A est une matrice carrée. On définit de même I_A l'idéal des polynômes P tels que $P(A) = 0$. On appelle polynôme minimal de A et on note μ_A l'unique polynôme unitaire qui engendre I_A.

Que faire ?

- Pour déterminer le polynôme minimal d'un endomorphisme u d'un espace vectoriel E de dimension finie (ou d'une matrice carrée A), on peut commencer par déterminer un polynôme annulateur π de u (ou de A). Il suffit alors de déterminer parmi les polynômes P unitaires qui divisent π - qui sont en nombre fini - celui qui est encore un polynôme annulateur et de plus petit degré. Notons que du fait du théorème de Cayley-Hamilton, on sait que le polynôme caractéristique est un polynôme annulateur.

  EXEMPLE 1 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On commence en calculant $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. On peut alors déterminer une relation de dépendance linéaire entre I_2, A et A^2 soit « à l'oeil » soit en posant le système $\alpha A^2 + \beta A + \gamma I_2 = 0$. On trouve que $A^2 - A - 2I_2 = 0$. On pose dès lors $\pi = X^2 - X - 2$.

  Maintenant, il est clair que tout diviseur strict Q et unitaire de π est de la forme $Q = X + \lambda$. Un tel polynôme n'annule pas A car $Q(A) = \begin{pmatrix} 1+\lambda & 2 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} \neq 0$. On en déduit que le polynôme minimal de A est $\mu_A = X^2 - X - 2$.
- On peut aussi commencer par calculer les puissances de la matrice A (ou de l'endomorphisme u) pour déterminer des conditions sur les polynômes annulateurs de A. Cela sert en particulier quand A est définie par blocs.

EXEMPLE 2 Soit $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$. On considère la matrice $C \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ définie par blocs par

$$C = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right).$$

D'après les formules du produit par blocs, il est clair que pour $p \in \mathbb{N}$, $C^p = \left(\begin{array}{c|c} A^p & 0 \\ \hline 0 & B^p \end{array}\right)$.

De ce fait, si $P = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k X^k$ est un polynôme,

$$P(C) = \sum_{k=0}^{d} a_k C^k = \left(\begin{array}{c|c} P(A) & 0 \\ \hline 0 & P(B) \end{array}\right).$$

On en déduit que $P(C) = 0$ si et seulement si $P(A) = P(B) = 0$. Cela implique que l'idéal I_C des polynômes annulateurs de C est $I_A \cap I_B$. Par définition, μ_C est le PPCM de μ_A et μ_B.

Conseils

- Le polynôme minimal est toujours unitaire. Il faut éventuellement diviser par le coefficient dominant.
- Quand on recherche le polynôme minimal d'une matrice A, on peut commencer par déterminer une matrice B semblable à A car deux matrices semblables ont le même polynôme minimal. En effet, si P est un polynôme, le fait que $P(A)$ soit nul est équivalent au fait que $P(B)$ le soit.

Exemple traité

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer son polynôme minimal.

SOLUTION

On détermine pour commencer son polynôme caractéristique

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X-1 & 0 & -1 \\ 1 & X-2 & -1 \\ 0 & 0 & X-2 \end{vmatrix} = (X-1)(X-2)^2.$$

On en déduit que le spectre de A est $\{1,2\}$.
On sait que le polynôme minimal μ_A est un diviseur de χ_A. On sait aussi que les racines de μ_A sont exactement les valeurs propres de A. De ce fait, μ_A est soit égal à $(X-1)(X-2)$ soit égal à $(X-1)(X-2)^2$. Il suffit alors de vérifier que $(A - I_3)(A - 2I_3) = 0$ pour obtenir que $\mu_A = (X-1)(X-2)$.

Exercices

EXERCICE 17.1

Soit u un endomorphisme de E. On notera n la dimension de E. On suppose qu'il existe x_0 dans E tel que la famille $(x_0, u(x_0), \ldots, u^{n-1}(x_0))$ soit libre.

1 Montrer que $\deg(\mu_u) = n$.

2 Justifier qu'il existe $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tels que $u^n(x_0) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i u^i(x_0)$. Montrer alors que

$$\mu_n = X^n - \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i.$$

EXERCICE 17.2

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On considère la matrice $B \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ définie par blocs par

$$B = \left(\begin{array}{c|c} A & I_n \\ \hline 0 & B \end{array}\right).$$

1 Montrer que μ_A divise μ_B

2 En déduire que si B est diagonalisable alors A l'est.

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 17.1

1 Soit P un polynôme non nul de degré strictement inférieur à n, montrer que $P(u)(x_0) \neq 0$.

2 Pour tout entier k compris entre 0 et $n-1$, on pourra calculer

$$(u^n - \sum_{i=0}^{n-1} a_i u^i)(u^k(x_0)).$$

EXERCICE 17.2

1 Commencer par exprimer B^p en fonction de A puis $P(B)$ en fonction de $P(A)$ et $P'(A)$.

EXERCICE 17.1

1 Soit P un polynôme non nul de degré strictement inférieur à n. Posons $P = \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$ (où $a_{n-1} = a_{n-2} = \cdots = a_{d+1} = 0$ si $\deg(P) = d < n-1$). Supposons par l'absurde que P est un polynôme annulateur de u. En particulier $P(u)(x_0) = 0$ et donc

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i u^i(x_0) = 0$$

ce qui est absurde car la famille $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ est libre et que les coefficients a_i ne sont pas tous nuls puisque P n'est pas le polynôme nul. On en déduit finalement que tout polynôme P non nul tel que $P(u) = 0$ est de degré au moins n. Comme on sait que $\deg(\mu_u) \leq n = \dim E$ on obtient finalement que $\deg(\mu_u) = n$.

2 Par hypothèse la famille $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ est libre. Comme c'est une famille libre de n vecteurs dans un espace vectoriel de dimension n, c'est une base de E. On peut donc décomposer le vecteur $u^n(x_0)$ dans cette base. Il existe alors $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tels que $u^n(x_0) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i u^i(x_0)$.

Posons maintenant $P = X^n - \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$. Pour tout entier k compris entre 0 et $n-1$,

$$P(u)(u^k(x_0)) = u^k(P(u)(x_0))$$

car u^k et $P(u)$ commutent (ce sont deux polynômes en u). En particulier, comme $P(u)(x_0) = 0$ par définition de P, $P(u)(u^k(x_0)) = 0$.

On en déduit que l'endomorphisme $P(u)$ s'annule sur tous les vecteurs de la base $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ et donc $P(u) = 0$. De ce fait, $\mu_u | P$, comme ils sont tous les deux unitaires et de même degré, $\mu_u = P$.

EXERCICE 17.2

1 On a $B^2 = \left(\begin{array}{c|c} A^2 & 2A \\ \hline 0 & A^2 \end{array}\right)$. De même, $B^3 = \left(\begin{array}{c|c} A^2 & 3A^2 \\ \hline 0 & A^3 \end{array}\right)$. Par récurrence immédiate, pour $p \in \mathbb{N}$, $B^p = \left(\begin{array}{c|c} A^p & pA^{p-1} \\ \hline 0 & A^p \end{array}\right)$.

De ce fait, par linéarité, pour tout polynôme P,

$$P(B) = \left(\begin{array}{c|c} P(A) & P'(A) \\ \hline 0 & P(A) \end{array}\right).$$

Solutions

Par définition,

$$\mu_B(B) = \left(\begin{array}{c|c} \mu_B(A) & \mu'_B(A) \\ \hline 0 & \mu_B(A) \end{array}\right) = 0.$$

On en déduit que $\mu_B(A) = 0$. De ce fait, μ_B est un polynôme annulateur de A et donc $\mu_A |\, \mu_B$.

2 Si B est diagonalisable, on sait que son polynôme minimal μ_B est scindé à racines simples. Comme $\mu_B(A) = 0$ alors A est annulé par un polynôme scindé à racines simples. De ce fait, A est aussi diagonalisable.

Utiliser un polynôme annulateur d'un endomorphisme (d'une matrice carrée)

18

Dans cette fiche E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie ; u est un endomorphisme de E et A est une matrice carrée de taille n.

Quand on ne sait pas !

Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est dit annulateur de u (resp. de A) si $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ (resp. $P(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$). On peut s'en servir notamment pour :

- Justifier que u (resp. A) est inversible (ou pas) et, le cas échéant, calculer son inverse
- Calculer les puissances de u.
- Trouver des informations sur les valeurs propres et les sous-espaces propres.
- Montrer que u (resp. A) est diagonalisable (voir fiche 14).

Que faire ?

- Il faut souvent commencer par déterminer un polynôme annulateur.

  On peut utiliser le polynôme caractéristique χ_u (ou χ_A) car d'après le théorème de Cayley-Hamilton $\chi_u(u) = 0$ (ou $\chi_A(A) = 0$).

  On peut aussi, dans le cas des matrices, calculer A^2, A^3 et essayer de l'exprimer en fonctions des puissances de A précédentes.

  EXEMPLE 1

  Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 & 0 \\ 0 & X & -1 & 0 \\ 0 & 0 & X & -1 \\ -1 & 0 & 0 & X \end{vmatrix} = X \begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ 0 & X & -1 \\ 0 & 0 & X \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ X & -1 & 0 \\ 0 & X & -1 \end{vmatrix}$$

  en développant selon la première ligne. On obtient donc $\chi_A(X) = X^4 - 1$.

  On pouvait aussi calculer A^2, A^3 puis constater que $A^4 = I_4$.

- Quand on a un polynôme annulateur, on sait que les valeurs propres λ de u (ou de A) vérifient $P(\lambda) = 0$. Cela permet de déterminer une condition nécessaire pour qu'un scalaire soit une valeur propre.

  EXEMPLE 2 En reprenant l'exemple précédent, on en déduit que si λ est une valeur propre de A alors $\lambda^4 = 1$.

Conseils

- Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $x \in E$, il est important de bien comprendre le sens de $P(u)(x)$ pour $P \in \mathbb{K}[X]$. En particulier il ne faut **jamais** écrire $P(u(x))$ qui n'a aucun sens puisque, $u(x)$ est un élément de E et qu'il n'existe pas de multiplication dans E. De ce fait, $u(x)^k$ n'existe pas. Si $P = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k X^k$, alors :

$$P(u)(x) = \sum_{k=0}^{d} a_k u^k(x)$$

- Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $x \in E$ et Q et R deux polynômes. On pose $P = QR$. Alors $R(u)(x) = 0$ implique $P(u)(x) = 0$. Il est important de savoir le justifier.

$$P(u)(x) = (QR)(u)(x) = (Q(u) \circ R(u))(x) = Q(u)(R(u)(x)) = Q(u)(0_E) = 0_E.$$

En particulier, ne pas écrire $P(u)(x) = Q(u)(x) \times R(u)(x)$ qui ne veut rien dire.

Exemple traité

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Trouver un polynôme annulateur $P \in \mathbb{R}_2[X]$ de A. En déduire une formule pour A^n. On pourra former la division euclidienne de X^n par P.

SOLUTION

- On commence par calculer $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. On cherche alors $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que $A^2 = \alpha A + \beta I_n$. En regardant tous les coefficients de la matrice A, on est ramené au système.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2\alpha + \beta & = & 3 \\ \alpha & = & 2 \\ \beta & = & -1 \\ \alpha + \beta & = & 1 \end{array} \right.$$

Finalement, $A^2 = 2A - I_3$ donc on pose $P = X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$.

- Soit $n \geq 0$, on cherche alors à écrire la division euclidienne de X^n par P. Elle s'écrit

$$X^n = Q_n P + R_n \tag{E}$$

où $\deg(R_n) < \deg(P) = 2$. On pose donc $R_n = a_n X + b_n$.

En utilisant $P(1) = 0$, on obtient en évaluant (E) en 1 que $1^n = 0 + R_n(1)$ et donc $a_n + b_n = 1$.

Pour utiliser que 1 est racine double de P, on dérive la relation (E). On obtient alors l'égalité $nX^{n-1} = Q_n P' + Q_n' P + R_n'$.

En évaluant en 1, on obtient $n = 0 + 0 + R_n'(1) = a_n$, puisque $P(1) = P'(1) = 0$.

Finalement : $R_n = nX + 1 - n$.

Il suffit alors d'évaluer encore (E) avec la matrice A en n'oubliant pas que $P(A) = 0$:

$$A^n = Q_n(A)P(A) + R_n(A) = nA + (1-n)I_3$$

On obtient donc

$$A^n = \begin{pmatrix} n+1 & n & 0 \\ -n & 1-n & 0 \\ -n & -n & 1 \end{pmatrix}$$

On peut notamment vérifier que la formule est correcte pour $n = 0, n = 1$ et $n = 2$.

Exercices

EXERCICE 18.1

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit u un automorphisme de E. Montrer qu'il existe un polynôme P tel que $u^{-1} = P(u)$.

EXERCICE 18.2

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 + A^2 + A = 0$.

1. Quelles peuvent être les valeurs propres complexes de A ?
2. En déduire que $\mathrm{Tr}(A)$ est un entier.

EXERCICE 18.3

Soit $M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ telle que pour tout i et tout j dans $[\![1, r]\!]$, $m_{ij} = 1$. Soit α et β des réels avec $\beta \neq 0$, on pose $A = \alpha I_r + \beta M$.

1. Déterminer en fonction de α, β et n, des réels p et q tels que $A^2 = pA + qI_r$.
2. En déduire qu'il existe des suites (u_n) et (v_n) telles que pour tout entier naturel n, $A^n = u_n A + v_n I_r$. On exprimera en particulier u_{n+1} et v_{n+1} en fonction de u_n et v_n.
3. Déterminer le terme général des suites (u_n) et (v_n) et en déduire une formule pour A^n.

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 18.1 Commencer par justifier qu'il existe un polynôme Q tel que $Q(u) = 0$ et $Q(0) \neq 0$.

EXERCICE 18.2

1. Quel est le lien entre les valeurs propres de A et un polynôme annulateur ?
2. Utiliser le fait que A est à coefficients réels.

EXERCICE 18.3

1. Commencer par exprimer M^2 en fonction de M.
2. Procéder par récurrence.
3. Se ramener à des suites récurrentes linéaires d'ordre 2.

Solutions des exercices

EXERCICE 18.1 Considérons $Q = \chi_u$, le polynôme caractéristique de u. On sait que $\chi_u(u) = 0$. De plus, comme u est un automorphisme, 0 n'est pas valeur propre de u donc $\chi_u(0) \neq 0$. En posant $\chi_u = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$, avec $a_0 \neq 0$, on obtient :

$$u^n + a_{n-1}u^{n-1} + \cdots + a_1 u = -a_0 \operatorname{Id}_E$$

On en déduit que $u \circ v = \operatorname{Id}_E$, où l'on a posé $v = -\frac{1}{a_0}\left(u^{n-1} + a_{n-1}u^{n-2} + \cdots + a_1 \operatorname{Id}_E\right)$. Comme E est de dimension finie, cela implique que $v = u^{-1}$. On en déduit que $u^{-1} = P(u)$, avec $P = -\frac{1}{a_0}\left(X^{n-1} + a_{n-1}X^{n-2} + \cdots + a_1\right)$.

EXERCICE 18.2

1. On pose $P = X^3 + X^2 + X$. Comme $P(A) = 0$, les valeurs propres de A sont nécessairement des solutions de l'équation $P(x) = 0$. On factorise alors le polynôme P et on obtient $P = X(X - j)(X - \overline{j})$ où $j = \exp(\frac{2i\pi}{3})$. On en déduit finalement que $\operatorname{Sp}(A) \subset \{0, j, \overline{j}\}$.
2. En voyant A comme une matrice complexe, elle est trigonalisable. Notons $r_0, r_j, r_{\overline{j}}$ les multiplicités (éventuellement nulles) de 0, j et $\overline{j}$ en tant que valeurs propres de A. On a alors :

$$\operatorname{Tr}(A) = r_j \times j + r_{\overline{j}} \times \overline{j} = -\frac{1}{2}(r_j + r_{\overline{j}}) + i\frac{\sqrt{3}}{2}(r_j - r_{\overline{j}})$$

Cependant, on sait que la trace de A est réelle car A est une matrice réelle. On en déduit que $r_j = r_{\overline{j}}$ et ainsi : $\operatorname{Tr}(A) = -r_j \in \mathbb{Z}$.

EXERCICE 18.3

1 On remarque $M^2 = rM$. De ce fait,

$$A^2 = (\alpha I_r + \beta M)^2 = \alpha^2 I_r + 2\alpha\beta M + \beta M^2 = \alpha^2 I_r + \beta(2\alpha + r\beta)M.$$

En utilisant $\beta M = A - \alpha I_r$, on obtient alors $A^2 = (-\alpha^2 - r\alpha\beta)I_r + (2\alpha + r\beta)A$. On pose donc $q = -\alpha(\alpha + r\beta)$ et $p = 2\alpha + r\beta$.

2 Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, il existe des réels notés u_n et v_n tels que $A^n = u_n A + v_n I_r$.

- Initialisation : Pour $n = 0$, il suffit de poser $u_0 = 0$ et $v_0 = 1$.
- Hérédité : On suppose que pour un entier naturel n, il existe des réels u_n et v_n tels que $A^n = u_n A + v_n I_r$.
  On a alors
  $$A^{n+1} = u_n A^2 + v_n A = (pu_n + v_n)A + qu_n I_r$$
  On pose donc $u_{n+1} = pu_n + v_n$ et $v_{n+1} = qu_n$.

Par récurrence, on a bien montré que pour tout entier naturel n, il existe $(u_n, v_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que $A^n = u_n A + v_n I_r$. De plus, ces réels vérifient $u_{n+1} = pu_n + v_n$ et $v_{n+1} = qu_n$.

3 Soit n un entier naturel, $u_{n+2} = pu_{n+1} + v_n = pu_{n+1} + qu_n$. On en déduit que (u_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

Son équation caractéristique est $X^2 - pX - q = 0$. On cherche ses racines. Le discriminant vaut

$$\Delta = p^2 + 4q = 4\alpha^2 + 4r\alpha\beta + r^2\beta^2 - 4\alpha^2 - 4r\alpha\beta = (r\beta)^2$$

On a donc $\Delta > 0$. Les deux racines sont

$$x_1 = \frac{2\alpha + r\beta + r\beta}{2} = \alpha + r\beta \text{ et } x_2 = \frac{2\alpha + r\beta - r\beta}{2} = \alpha$$

De ce fait, il existe des constantes λ, μ telles que pour tout entier naturel n :

$$u_n = \lambda(\alpha + r\beta)^n + \mu\alpha^n$$

En utilisant $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$, on obtient le système

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda(\alpha + r\beta) + \mu\alpha = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = -\mu = \frac{1}{r\beta}.$$

Cela nous donne $u_n = \dfrac{(\alpha + r\beta)^n - \alpha^n}{r\beta}$. Maintenant, pour $n \geq 1$,

$$v_n = qu_{n-1} = -\alpha(\alpha + r\beta)\frac{(\alpha + r\beta)^{n-1} - \alpha^{n-1}}{r\beta} = \frac{-\alpha(\alpha + r\beta)^n + (\alpha + r\beta)\alpha^n}{r\beta}.$$

La formule est encore correcte pour $n = 0$.

Solutions

19 Montrer qu'un endomorphisme est diagonalisable en utilisant des polynômes annulateurs

Dans cette fiche, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie ; u est un endomorphisme de E et A est une matrice carrée de taille n.

Quand on ne sait pas !

- Un endomorphisme u (une matrice carrée A) est diagonalisable si et seulement si u (ou A) possède un polynôme annulateur **scindé** et **à racines simples**
- Un endomorphisme u (une matrice carrée A) est diagonalisable si et seulement si le polynôme minimal μ_u (μ_A) est scindé à racines simples.
- Un endomorphisme u est diagonalisable si et seulement si le polynôme $\prod\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda)$ annule u. De même pour une matrice carrée A.

Que faire ?

- Pour montrer que u (ou A) est diagonalisable (ou ne l'est pas), on peut commencer par chercher ses valeurs propres (via le calcul du polynôme caractéristique par exemple) afin de voir si $\prod\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda)$ annule u (ou A).

EXEMPLE 1 On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Il est immédiat que $\chi_A = \det(XI_3 - A) = (X-1)^2(X-2)$ et donc $\mathrm{Sp}(A) = \{1, 2\}$. De ce fait, A est diagonalisable si et seulement si $(X-1)(X-2)$ annule A.
Il ne reste plus qu'à calculer

$$(A - I_3)(A - 2I_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

La matrice A n'est pas diagonalisable.

Notons que l'on pouvait aussi calculer le sous-espace propre $E_1(A)$ associé à la valeur propre 1 et se rendre compte que sa dimension vaut 1 et qu'elle est donc strictement inférieure à la multiplicité.

- On peut chercher directement un polynôme annulateur. Si on en trouve un qui est scindé à racines simples alors u (ou A) est diagonalisable.

  EXEMPLE 2 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que A est une matrice de rang 1. On note alors $Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ un vecteur non nul qui engendre $\mathrm{Im}(A)$. Dès lors, si on note $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes de A, pour tout i compris entre 1 et n, il existe $y_i \in \mathbb{K}$ tel que $C_i = y_i Z$. Si on note $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ on a donc $A = ZY^T$. On en déduit que

$$A^2 = ZY^T ZY^T = kZY^T = kA$$

  où $k = Y^T Z$. En effet k est un scalaire.
  De ce fait $X^2 - kX = X(X-k)$ est un polynôme annulateur de A.
  En particulier, si $k \neq 0$, A est annulée par un polynôme scindé à racines simples et elle est donc diagonalisable.
  Si $k = 0$, on en déduit que $A^2 = 0$ et donc son polynôme minimal est égal à X ou à X^2. Comme A n'est pas nulle, X n'est pas un polynôme annulateur. Finalement le polynôme minimal $\mu_A = X^2$ n'est pas à racines simples donc A n'est pas diagonalisable.

Conseils

- Le fait de trouver un polynôme annulateur qui n'est pas scindé à racines simples (par exemple le polynôme caractéristique) n'implique pas que u (ou A) n'est pas diagonalisable. Par contre, si on montre que le polynôme minimal n'est pas scindé à racines simples alors on peut conclure que u (ou A) n'est pas diagonalisable.
- Il peut être intéressant de calculer les puissances de u (ou de A) afin de trouver des polynômes annulateurs.

Exemple traité

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On pose

$$\varphi_A : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ B & \mapsto & AB \end{array}$$

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, montrer que $P(\varphi_A) = \varphi_{P(A)}$. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur A pour que φ_A soit diagonalisable.

SOLUTION

Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\varphi_A^2(B) = \varphi_A(\varphi_A(B)) = \varphi_A(AB) = A^2B$. On démontre par récurrence que pour tout entier k, $\varphi_A^k(B) = A^kB$.

Maintenant, si P est un polynôme que l'on note $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, on trouve, par linéarité, que pour toute matrice B,

$$P(\varphi_A)(B) = \sum_{k=0}^{d} a_k \varphi_A^k(B) = \sum_{k=0}^{d} a_k A^k B = \left(\sum_{k=0}^{d} a_k A^k\right) B = \varphi_{P(A)}(B).$$

Cela signifie que $P(\varphi_A) = \varphi_{P(A)}$.
On remarque alors que φ_A est l'endomorphisme nul de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si A est nul. En effet, si A est nul, il est clair que $\varphi_A = 0$. Réciproquement, si φ_A est nul, pour toute matrice élémentaire E_{i1}, $\varphi_A(E_{i1}) = 0$. En remarquant que la première colonne de la matrice $\varphi_A(E_{i1}) = AE_{i1}$ est la i-ème colonne de la matrice A, on en déduit que A est bien la matrice nulle.
Finalement, on obtient $P(\varphi_A) = 0 \iff P(A) = 0$.
De ce fait,

$$\begin{aligned} A \text{ diagonalisable} \quad &\iff \quad \exists P \in \mathbb{K}[X], P(A) = 0 \\ &\iff \quad \exists P \in \mathbb{K}[X], P(\varphi_A) = 0 \\ &\iff \quad \varphi_A \text{ diagonalisable} \end{aligned}$$

Exercices

EXERCICE 19.1

Soit A, B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = BA$.
On pose $M \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ définie par blocs par

$$M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & A \end{array}\right).$$

1 Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, exprimer $P(M)$ en fonction de $P(A), P'(A)$ et B.

2 En déduire que M est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable et $B = 0$.

EXERCICE 19.2

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$M^T = M^2 - I_n.$$

1 Montrer que M est diagonalisable.

2 Que peut-on en déduire sur les valeurs propres de M ?

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 19.1

1 On pourra commencer par calculer M^k pour $k \in \mathbb{N}$

2 Si P est un polynôme annulateur scindé à racines simples de A, montrer que $P(A)$ est une matrice inversible.

EXERCICE 19.1

1 Déterminer un polynôme annulateur de M de degré 4.

Solutions des exercices

EXERCICE 19.1

1 D'après le calcul des matrices par blocs,

$$M^2 = \left(\begin{array}{c|c} A^2 & 2AB \\ \hline 0 & A^2 \end{array}\right) \text{ puis } M^3 = \left(\begin{array}{c|c} A^3 & 3A^2B \\ \hline 0 & A^3 \end{array}\right).$$

Par une récurrence, on montre alors que pour $k \geq 0$, $M^k = \left(\begin{array}{c|c} A^k & kA^{k-1}B \\ \hline 0 & A^k \end{array}\right)$.

De ce fait, en posant $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ un polynôme,

$$P(M) = \left(\begin{array}{c|c} \sum_{k=0}^{d} a_k A^k & \sum_{k=0}^{d} k a_k A^{k-1} B \\ \hline 0 & \sum_{k=0}^{d} a_k A^k \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} P(A) & P'(A)B \\ \hline 0 & P(A) \end{array}\right).$$

2 Procédons par double implication.

- On suppose que A est diagonalisable et que $B = 0$. Il existe alors un polynôme P scindé à racines simples tel que $P(A) = 0$. La question ci-dessus, nous donne alors

$$P(M) = \left(\begin{array}{c|c} P(A) & P'(A)B \\ \hline 0 & P(A) \end{array}\right) = 0.$$

  Donc il existe un polynôme P scindé à racines simples tel que $P(M) = 0$. Cela implique que M est diagonalisable.

- Réciproquement, on suppose que M est diagonalisable. Il existe alors un polynôme P scindé à racines simples tel que $P(M) = 0$. D'après la question 1, on obtient que $P(A) = P'(A)B = 0$. Le fait que A soit annulé par un polynôme scindé à racines simples nous dit que A est alors diagonalisable. On sait que P' est scindé (comme polynôme de $\mathbb{C}[X]$). On le note $P' = \prod_{i=1}^{d-1}(X-\mu_i)$. Les racines $\mu_1, \dots, \mu_{d-1}$ de P' ne sont pas des racines de P car sinon ce serait des racines doubles de P. On en déduit que pour tout i compris entre 1 et $d-1$, $A - \mu_i I_n$ est inversible (car μ_i n'est pas dans le spectre de A) et donc $P'(A)$ est inversible. Cela permet d'obtenir que $P'(A)B = 0$ implique $B = 0$. On a bien montré que A était diagonalisable et $B = 0$.

EXERCICE 19.2

1 On sait que $M^T = M^2 - I_n$ donc, en élevant au carré :

$$(M^2)^T = (M^T)^2 = (M^2 - I_n)^2 = M^4 - 2M^2 + I_n$$

D'autre part, $(M^2)^T = (M^T + I_n)^T = M + I_n$. En utilisant ces deux égalités, on obtient alors $M + I_n = M^4 - 2M^2 + I_n$. C'est-à-dire que $P = X^4 - 2X^2 - X$ annule M. On factorise ce polynôme, en voyant que 0 et -1 sont des racines évidentes :

$$P = X^4 - 2X^2 - X = X(X+1)(X^2 - X - 1) = X(X+1)(X-\varphi)(X-\breve{\varphi})$$

où $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\breve{\varphi} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. Le polynôme P est donc scindé et à racines simples ce qui implique que M est diagonalisable.

2 Comme le polynôme $P = X(X+1)(X-\varphi)(X-\breve{\varphi})$ annule M, on sait que les valeurs propres de M appartiennent à $\{0, -1, \varphi, \breve{\varphi}\}$.

Mettre en œuvre le lemme de décomposition des noyaux

Dans cette fiche, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$ et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Quand on ne sait pas !

Rappelons l'énoncé du lemme de décomposition des noyaux dans le cas des endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie.

Soit u un endomorphisme de E. Soit $P_1, \dots P_d$ des polynômes **deux à deux premiers entre eux** et $P = P_1 \times \cdots \times P_d$, on a :

$$\operatorname{Ker}(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^{d} \operatorname{Ker}(P_i(u))$$

En particulier si P est un polynôme annulateur de u

$$E = \bigoplus_{i=1}^{d} \operatorname{Ker}(P_i(u))$$

Le lemme de décomposition des noyaux s'exprime aussi dans le cas des matrices carrées.

Soit A une matrice carrée de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$. Soit $P_1, \dots P_d$ des polynômes **deux à deux premiers entre eux** et $P = P_1 \times \cdots \times P_d$, on a :

$$\operatorname{Ker}(P(A)) = \bigoplus_{i=1}^{d} \operatorname{Ker}(P_i(A))$$

En particulier si P est un polynôme annulateur de A

$$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) = \bigoplus_{i=1}^{d} \operatorname{Ker}(P_i(A))$$

Que faire ?

Le lemme de décomposition des noyaux s'utilise pour obtenir une décomposition de l'espace vectoriel E (dans le cas où on travaille avec un polynôme P annulateur de u) ou d'un sous-espace vectoriel de E en une somme directe de sous-espaces.

Pour utiliser le lemme de décomposition des noyaux, il est important de repérer le polynôme avec lequel on veut travailler (le polynôme P de l'énoncé) qui sera la plupart du temps un polynôme annulateur de u (ou de A). Il faut ensuite écrire P comme un produit de polynômes **deux à deux premiers entre eux**.

EXEMPLE 1 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -4 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

On veut montrer que les espaces vectoriels $F_1 = \text{Ker}(A - I_3)$ et $F_2 = \text{Ker}(A - 2I_3)^2$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On vérifie par le calcul que $P = X^3 - 5X^2 + 8X - 4 = (X-1)(X-2)^2$ est un polynôme annulateur de A (de fait c'est son polynôme caractéristique et donc $P(A) = 0$ d'après le théorème de Cayley-Hamilton). Comme $X - 1$ et $(X - 2)^2$ sont premiers entre eux, on obtient directement d'après le lemme des noyaux que

$$F_1 \oplus F_2 = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$$

Notons que l'on peut obtenir le même résultat en calculant explicitement F_1 et F_2.

Conseils

- Le lemme de décomposition des noyaux permet d'écrire l'espace vectoriel E ou $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ comme une somme directe de sous-espaces vectoriels presque sans calculs. Il est donc intéressant même dans les cas (comme l'exemple ci-dessus) où l'on peut arriver à la même conclusion par le calcul.
- Le lemme de décomposition des noyaux permet d'obtenir des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel E qui sont stables par l'endomorphisme considéré. En effet, pour tout polynôme P, le sous-espace vectoriel $\text{Ker}(P(u))$ est stable par u car si $x \in \text{Ker}(P(u))$ alors $u(x)$ aussi puisque, comme u et $P(u)$ commutent, on a :

$$P(u)(u(x)) = u(P(u)(x)) = u(0_E) = 0_E$$

Exemple traité

Soit u un endomorphisme de E. On suppose qu'il existe un entier naturel p supérieur ou égal à 1, $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ des scalaires deux à deux distincts et $r_1, \ldots, r_p$ des entiers non nuls tels que $P = \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{r_i}$ soit un polynôme scindé annulant u. On note pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $P_i = (X - \lambda_i)^{r_i}$ et $C_i = \text{Ker}(P_i(u))$.

1 Justifier que pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, les sous-espaces vectoriels C_i sont stables par u et que $E = \bigoplus_{i=1}^{p} C_i$.

2 Montrer que pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, l'endomorphisme $u_{|C_i} - \lambda_i \,\text{Id}_{C_i}$ est nilpotent où $u_{|C_i}$ désigne l'endomorphisme induit par u sur C_i.

3 En déduire qu'il existe deux endomorphismes d et n de E tels que d soit diagonalisable, n soit nilpotent, $u = d + n$ et $dn = nd$.

SOLUTION

1 On utilise le lemme de décomposition des noyaux. Les polynômes $P_1, \ldots, P_p$ sont premiers entre eux de ce fait, comme $P = P_1 \times \cdots \times P_p$ est un polynôme annulateur de u,

$$E = \operatorname{Ker}(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^{p} \operatorname{Ker}(P_i(u)) = \bigoplus_{i=1}^{p} C_i$$

De plus, les sous-espaces vectoriels C_i sont stables par u (voir la justification ci-dessus dans la rubrique « Conseils »).

2 Soit $i \in [\![1,p]\!]$. Par définition du sous-espace vectoriel C_i, pour tout x dans C_i, on a : $(u - \lambda \operatorname{Id})^{r_i}(x) = 0_E$. L'application $u_{|C_i} - \lambda_i \operatorname{Id}_{C_i}$ est donc nilpotente.

3 Comme on a vu à la question 1 que $E = \bigoplus\limits_{i=1}^{p} C_i$ on peut définir les endomorphismes d et n par leurs restrictions sur les sous-espaces vectoriels C_i. Dès lors on pose d et n définis par

$$\forall i \in [\![1,p]\!]\,, d_{|C_i} = \lambda_i \operatorname{Id} \;\text{ et }\; n_{|C_i} = u_{|C_i} - \lambda_i \operatorname{Id}_{C_i}\,.$$

On peut alors vérifier que n et d conviennent :

- Si on considère une base $\mathcal{B}$ associée à la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^{p} C_i$, c'est-à-dire que $\mathcal{B}$ est obtenue en concaténant des bases de chaque C_i, la matrice de d dans la base $\mathcal{B}$ est diagonale donc d est un endomorphisme diagonalisable.
- On pose α le maximum des multiplicités dans P, c'est-à-dire $\alpha = \max\limits_{i \in [\![1,p]\!]} r_i$. Pour tout $i \in [\![1,p]\!]$,
$$n_{|C_i}^{\alpha} = (u_{|C_i} - \lambda_i \operatorname{Id}_{C_i})^{\alpha} = 0$$
De ce fait, $n^{\alpha} = 0$ donc n est nilpotent.
- Pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $d_{|C_i}$ et $n_{|C_i}$ commutent car $d_{|C_i}$ est une homothétie. On en déduit que $nd = dn$.
- Pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $d_{|C_i} + n_{|C_i} = u_{|C_i}$ donc $d + n = u$.

Exercices

EXERCICE 20.1 Soit u un endomorphisme de E. On suppose que $u^2 - 3u + 2\operatorname{Id}_E = 0$. On note $E_1 = \operatorname{Ker}(u - \operatorname{Id}_E)$ et $E_2 = \operatorname{Ker}(u - 2\operatorname{Id}_E)$. On souhaite montrer que $E = E_1 \oplus E_2$.

1 Dans cette question on n'utilisera pas le lemme de décomposition des noyaux

a. Montrer que E_1 et E_2 sont en somme directe.

b. À l'aide d'un raisonnement par analyse-synthèse, montrer que E_1 et E_2 sont supplémentaires.

2 Retrouver le résultat précédent en utilisant le lemme de décomposition des noyaux.

EXERCICE 20.2 Soit n un entier naturel non nul et u un endomorphisme de $\mathbb{K}^{3n}$ tel que $u^3 = -u$ et $\mathrm{Rg}(u) = 2n$.

1 Justifier que $F = \mathrm{Ker}(u)$ est de dimension n.

2 Montrer que F admet un supplémentaire G stable par u tel que la restriction u_G de u à G vérifie $u_G^2 + \mathrm{Id}_G = 0$.

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 20.1

1 a. Étudier les éléments de $E_1 \cap E_2$.

b. Considérer un élément x de E et, pour l'analyse, supposer que x se décompose sous la forme $x = x_1 + x_2$ où $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$.

2 Bien penser à vérifier les hypothèses du lemme de décomposition des noyaux.

EXERCICE 20.2

1 Appliquer le théorème du rang.

2 Utiliser le lemme de décomposition des noyaux.

Solutions des exercices

EXERCICE 20.1

1 a. Soit $x \in E_1 \cap E_2$. Par définition, $u(x) = x$ car $x \in E_1$ et $u(x) = 2x$ car $x \in E_2$. On en déduit que $x = 2x$ ce qui implique que $x = 0$. Finalement $E_1 \cap E_2 = \{0\}$ ce qui implique que E_1 et E_2 sont en somme directe.

b. On veut montrer que $E = E_1 \oplus E_2$. Comme on a vu que E_1 et E_2 sont en somme directe, il suffit de montrer que $E = E_1 + E_2$. Pour ce faire, on considère un élément x dans E et on va chercher $x_1 \in E_1, x_2 \in E_2$ tels que $x = x_1 + x_2$. On procède par analyse-synthèse.

- *Analyse* : on suppose qu'il existe $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$ tels que $x = x_1 + x_2$. On applique alors l'endomorphisme u :

$$u(x) = u(x_1) + u(x_2) = x_1 + 2x_2$$

On voit donc que nécessairement (x_1, x_2) vérifie le système

$$\begin{cases} x_1 + x_2 &= x \\ x_1 + 2x_2 &= u(x) \end{cases}$$

Cela implique que $x_1 = 2x - u(x)$ et $x_2 = -x + u(x)$.

- *Synthèse* : considérons $x_1 = 2x - u(x)$ et $x_2 = u(x) - x$.
Il est clair que $x_1 + x_2 = x$. Il nous faut vérifier que $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$.
On a, en utilisant la relation $u^2 = 3u - 2\,\mathrm{Id}_E$,

$$u(x_1) = 2u(x) - u^2(x) = 2u(x) - (3u(x) - 2x) = -u(x) + 2x = x_1$$

Cela prouve que $x_1 \in E_1$.
De même,

$$u(x_2) = u^2(x) - u(x) = (3u(x) - 2x) - u(x) = 2u(x) - 2x = 2x_2$$

Ceci prouve que $x_2 \in E_2$.
Finalement, on a bien montré que $E_1 \oplus E_2 = E$.

2 Retrouvons le résultat avec le lemme de décomposition des noyaux.

Le polynôme $P = X^2 - 3X + 2$ est un polynôme annulateur de u. Il se factorise en $P = P_1P_2$ où $P_1 = (X - 1)$ et $P_2 = (X - 2)$ avec P_1 et P_2 premiers entre eux. D'après le lemme des décomposition des noyaux :

$$E = \mathrm{Ker}(P(u)) = \mathrm{Ker}(P_1(u)) \oplus \mathrm{Ker}(P_2(u)) = E_1 \oplus E_2$$

EXERCICE 20.2

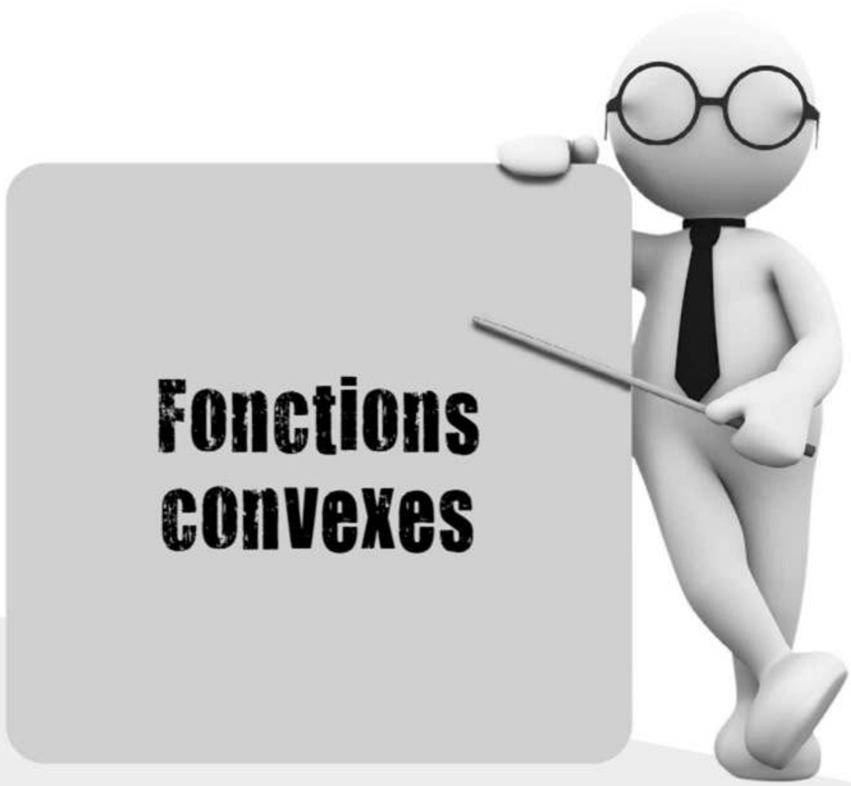
1 On applique le théorème du rang à l'endomorphisme u :

$$\dim \mathrm{Ker}(u) = \dim \mathbb{K}^{3n} - \mathrm{Rg}(u) = 3n - 2n = n.$$

2 Le polynôme $P = X^3 + X$ annule u. Il se factorise en $P = X(X^2 + 1)$. Comme X et $X^2 + 1$ sont premiers entre eux (cela peut se justifier en exhibant une relation de Bézout : $1 \times (X^2 + 1) - X \times X = 1$), on peut appliquer le lemme de décomposition des noyaux.

$$\mathbb{K}^{3n} = \mathrm{Ker}(P(u)) = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Ker}(u^2 + \mathrm{Id})$$

On pose alors $G = \mathrm{Ker}(u^2 + \mathrm{Id})$. Il est bien stable par u comme cela a été prouvé dans la section « Conseils ». De plus, si on note u_G l'endomorphisme induit par u sur le sous-espace vectoriel G, $u_G^2 + \mathrm{Id}_G = 0$ par définition de G.


Fonctions
convexes

21 Montrer qu'une fonction est convexe

Quand on ne sait pas !

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe si :

$$\forall (x, y) \in I^2,\ \forall \lambda \in [0, 1],\ f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

On dit qu'une fonction f est concave si $-f$ est convexe (l'inégalité de la définition est dans l'autre sens).

Que faire ?

- Si f est dérivable sur I, f est convexe si et seulement si f' est croissante sur I.
- Si f est deux fois dérivable sur I, f est convexe si et seulement si f'' est positive sur I.

Conseils

- On utilise très rarement la définition pour montrer qu'une fonction est convexe.
- Ne pas oublier de préciser que f est dérivable ou deux fois dérivable pour utiliser une des caractérisations.

Exemple traité

Soit $f :]1, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\forall x > 1,\ f(x) = -\ln(\ln(x))$$

Montrer que f est convexe sur $]1, +\infty[$.

SOLUTION

La fonction logarithme népérien est à valeurs strictement positives sur $]1, +\infty[$ donc la fonction f est deux fois dérivable par composition de fonctions deux fois dérivables. On a pour tout réel $x > 1$,

$$f'(x) = -\frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)} = -\frac{1}{x\ln(x)}$$

et

$$f''(x) = \frac{\ln(x) + 1}{(x\ln(x))^2} > 0$$

car $\ln(x) > 0$ si $x > 1$. Ainsi, f est convexe sur $]1, +\infty[$.

Exercices

EXERCICE 21.1

Déterminer les intervalles sur lesquels la fonction sinus est convexe.

EXERCICE 21.2

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f : I \to J$ une fonction convexe et $g : J \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et croissante. Montrer que $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe.

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 21.1 Il suffit de connaitre le signe de la fonction sinus.

EXERCICE 21.2 Partir de la définition de la convexité de f puis utiliser que g conserve l'ordre des inégalités.

Solutions des exercices

EXERCICE 21.1

La fonction sinus est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$\sin''(x) = -\sin(x)$$

La fonction sinus est négative sur les intervalles de la forme $[(2k+1)\pi, (2k+2)\pi]$ où $k \in \mathbb{Z}$ donc la dérivée seconde de la fonction sinus est positive sur ces intervalles ce qui implique que la fonction sinus est convexe sur ces intervalles.

EXERCICE 21.2

Soient $(x, y) \in I^2$ et $\lambda \in [0, 1]$. La fonction f est convexe sur I donc :

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

On sait que f est à valeurs dans J donc $f(\lambda x + (1 - \lambda)y)$, $f(x)$ et $f(y)$ sont des éléments de J. De plus, J est un intervalle donc convexe ce qui implique (sachant que $\lambda \in [0, 1]$) que $\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$ appartient aussi à J. La fonction g étant croissante sur J, on déduit de l'inégalité précédente que :

$$g(f(\lambda x + (1 - \lambda)y)) \leq g(\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y))$$

puis par convexité de g sur J :

$$g(f(\lambda x + (1 - \lambda)y)) \leq \lambda g(f(x)) + (1 - \lambda)g(f(y))$$

ce qui s'écrit aussi :

$$(g \circ f)(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda(g \circ f)(x) + (1 - \lambda)(g \circ f)(y)$$

Ainsi, $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe.

22 Utiliser les fonctions convexes pour démontrer des inégalités

Quand on ne sait pas !

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Si une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe, alors :

$$\forall (x,y) \in I^2,\ \forall \lambda \in [0,1],\ f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

Cette inégalité peut-être généralisée, c'est ce que l'on appelle l'inégalité de Jensen :

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in I^n$ et tout pour tous réels positifs λ_1, …, λ_n, de somme égale à 1, on a :

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

On a aussi les deux résultats géométriques suivants :

- Si f est convexe sur I alors sa courbe $\mathcal{C}_f$ est « en dessous de ses cordes » (une corde est un segment reliant deux points de la courbe). Plus précisément : si f est convexe sur I alors pour tout $(a,b) \in I^2$ avec $a < b$ et $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$ deux points de $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_f$ est en dessous de $[AB]$ sur l'intervalle $[a,b]$.
- La fonction f est convexe sur I si et seulement $\mathcal{C}_f$ est au dessus de ses tangentes sur I.

Que faire ?

- Pour vérifier qu'une fonction est convexe, on utilise une des deux caractérisations usuelles (voir la fiche 21).
- On adapte les résultats précédents si la fonction est concave.

Conseils

- En utilisant la convexité de la fonction exponentielle, on montre l'inégalité très classique suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geq 1 + x$$

- En utilisant la concavité de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ sur $]-1,+\infty[$, on montre l'inégalité très classique suivante :

$$\forall x > -1,\ \ln(1+x) \leq x$$

Exemple traité

Montrer que pour tout réel x, $e^x \geq x+1$.

SOLUTION

La fonction exponentielle est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x, on a $\exp''(x) = \exp(x) > 0$, donc la fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$. Sa tangente au point d'abscisse 0 a pour équation :

$$y = e^0(x-0) + e^0 = x+1$$

Par convexité, on en déduit que pour tout réel x,

$$e^x \geq x+1$$

Exercices

EXERCICE 22.1

Montrer que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\frac{2}{\pi}x \leq \sin(x) \leq x$.

EXERCICE 22.2

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \ldots, a_n$ des réels strictement positifs. Montrer que :

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 22.1	Utiliser l'exercice 1 de la fiche 21 et utiliser les résultats liés aux cordes et aux tangentes.
EXERCICE 22.2	Utiliser la concavité de la fonction logarithme népérien et l'inégalité de Jensen

EXERCICE 22.1

D'après l'exercice 1 de la fiche 21, la fonction sinus est concave sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. La tangente à la courbe de la fonction sinus au point d'abscisse 0 a pour équation :

$$y = \sin'(0)(x-0) + \sin(0) = x$$

Par concavité, on en déduit que pour tout réel $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

$$\sin(x) \leq x$$

Toujours par concavité, la courbe de la fonction sinus est située au dessus de la corde joignant $(0, \sin(0)) = (0, 0)$ à $(\frac{\pi}{2}, \sin(\frac{\pi}{2})) = (\frac{\pi}{2}, 1)$. La droite passant par ces deux points passe par l'origine et son coefficient directeur vaut $\frac{2}{\pi}$ donc son équation est $y = \frac{2}{\pi}x$. Ainsi, pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

$$\frac{2}{\pi}x \leq \sin(x)$$

On a donc prouvé l'inégalité souhaitée.

EXERCICE 22.2

La fonction logarithme népérien est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout réel $x > 0$,

$$\ln''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$$

Ainsi, la fonction logarithme népérien est concave sur $\mathbb{R}_+^*$. Posons :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = \frac{1}{n}$$

Ces réels sont positifs et de somme égale à 1 donc d'après l'inégalité de Jensen, on en déduit que :

$$\ln\left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right) \geq \frac{\ln(a_1) + \cdots + \ln(a_n)}{n} = \frac{\ln(a_1 \cdots a_n)}{n}$$

Par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, on en déduit que :

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \geq \exp\left(\frac{\ln(a_1 \cdots a_n)}{n}\right) = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

On a donc prouvé l'inégalité souhaitée.


Espaces
vectoriels
normés

Montrer qu'une partie d'un espace vectoriel est convexe

23

Quand on ne sait pas !

Soit C une partie d'un espace vectoriel E. On dit que C est convexe si :

$$\forall \lambda \in [0,1],\ \forall (x,y) \in C^2,\ \lambda x + (1-\lambda)y \in C$$

Géométriquement, un ensemble C est convexe si pour tout couple de vecteurs de celui-ci, le « segment » formé par ces vecteurs est inclus dans C.

Que faire ?

- Pour montrer qu'une partie est convexe, il suffit souvent de revenir à la définition.

Conseils

- Savoir que tout sous-espace vectoriel, d'un espace vectoriel E, est un convexe de E.
- Savoir que les intervalles de $\mathbb{R}$ sont des convexes de $\mathbb{R}$.

Exemple traité

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}_+$. On note $B(a,r)$ la boule ouverte de centre a et de rayon r. Montrer que $B(a,r)$ est un convexe de E.

SOLUTION

Soient $(x,y) \in B(a,r)^2$ et $\lambda \in [0,1]$. On a :

$$\begin{aligned}
\|\lambda x + (1-\lambda y) - a\| &= \|\lambda x + (1-\lambda)y - (\lambda + (1-\lambda))a\| \\
&= \|\lambda(x-a) + (1-\lambda)(y-a)\| \\
&\leq \|\lambda(x-a)\| + \|(1-\lambda)(y-a)\|
\end{aligned}$$

d'après l'inégalité triangulaire. Or λ et $1-\lambda$ sont positifs donc on en déduit que :

$$\|\lambda x + (1-\lambda y) - a\| \leq \lambda\|x-a\| + (1-\lambda)\|y-a\|$$

Sachant que x et y appartiennent à $B(a,r)$, on obtient finalement que :

$$\|\lambda x + (1-\lambda y) - a\| < \lambda r + (1-\lambda)r = 1$$

Ainsi $\lambda x + (1-\lambda y) \in B(a,r)$. On a donc bien montré que $B(a,r)$ était convexe.

Exercices

EXERCICE 23.1

On dit qu'une matrice carrée est stochastique si ses coefficients appartiennent à $[0,1]$ et si la somme des coefficients de chacune de ses lignes vaut 1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{S}$, constitué des matrices stochastiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, est un convexe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

EXERCICE 23.2

Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, n'est pas un ensemble convexe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

EXERCICE 23.3

Soient E et F deux espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application linéaire. Montrer que si C est un convexe de E alors $f(C)$ est un convexe de F.

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 23.1 Revenir à la définition.

EXERCICE 23.2 Trouver un exemple simple de deux matrices inversibles A et B telles que $\dfrac{1}{2}(A+B)$ ne soit pas inversible.

EXERCICE 23.3 Un élément de $f(C)$ s'écrit sous la forme $f(c)$ où c appartient à C.

Solutions des exercices

EXERCICE 23.1

Montrons que $\mathcal{S}$ est convexe, c'est-à-dire :

$$\forall (A,B) \in \mathcal{S}^2,\ \forall \lambda \in [0,1],\ \lambda A + (1-\lambda)B \in \mathcal{S}$$

Soient $(A,B) \in \mathcal{S}^2$ et $\lambda \in [0,1]$. En notant $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$, on a :

$$\lambda A + (1-\lambda)B = (\lambda a_{i,j} + (1-\lambda)b_{i,j})$$

Les coefficients $a_{i,j}$ et $b_{i,j}$ sont dans $[0,1]$ qui est convexe donc les réels $\lambda a_{i,j} + (1-\lambda)b_{i,j}$ aussi. Par définition de $\mathcal{S}$, on sait que pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} b_{i,j} = 1$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}(\lambda a_{i,j} + (1-\lambda)b_{i,j}) &= \lambda \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} + (1-\lambda)\sum_{j=1}^{n} b_{i,j}\\ &= \lambda + 1 - \lambda\\ &= 1\end{aligned}$$

donc $\lambda A + (1-\lambda)B$ appartient à $\mathcal{S}$. On en déduit que $\mathcal{S}$ est convexe.

EXERCICE 23.2

La matrice identité I_n est inversible, son opposé aussi. Si par l'absurde, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ était un ensemble convexe, la matrice $\frac{1}{2}(I_n - I_n)$ devrait être inversible. C'est faux car la matrice nulle n'est pas inversible. Ainsi, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas un ensemble convexe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

EXERCICE 23.3

Soient y_1, y_2 deux éléments de $f(C)$ et $\lambda \in [0,1]$. Montrons que :

$$\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 \in f(C)$$

Par définition, il existe deux éléments de C, c_1 et c_2, tels que $f(c_1) = y_1$ et $f(c_2) = y_2$. Ainsi :

$$\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 = \lambda f(c_1) + (1-\lambda)f(c_2) = f(\lambda c_1 + (1-\lambda)c_2)$$

car f est linéaire. Or C est convexe et c_1, c_2 sont deux éléments de C donc $\lambda c_1 + (1-\lambda)c_2$ appartient à C ce qui implique que :

$$\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 = f(\lambda c_1 + (1-\lambda)c_2) \in f(C)$$

Ainsi, $f(C)$ est un convexe de F.

24 Montrer qu'une application est une norme

Quand on ne sait pas !

La notation E désigne un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie ou non.
Une norme est une application $N : E \to \mathbb{R}$ vérifiant :

- (Positivité) $\forall v \in E, \quad N(v) \geqslant 0$
- (Séparation) $N(v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$
- (Homogénéité) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall v \in E, \quad N(\lambda v) = |\lambda|\, N(v)$
- (Inégalité Triangulaire) $\forall (v, w) \in E^2, \quad N(v + w) \leqslant N(v) + N(w)$

EXEMPLE 1

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $N\left((x, y)\right) = \max\{|x|\,, |y|\}$ définit une norme.

Que faire ?

- Pour prouver l'inégalité triangulaire, il faut parfois démontrer des inégalités du type

$$\max\{|x_1 + a_1|\,, |x_2 + a_2|\} \leqslant \max\{|x_1|\,, |x_2|\} + \max\{|a_1|\,, |a_2|\}$$

  pour cela on justifie que, pour $i \in \{1, 2\}$,

$$|x_i + a_i| \leqslant |x_i| + |a_i| \leqslant \max\{|x_1|\,, |x_2|\} + \max\{|a_1|\,, |a_2|\}$$

  puis on utilise la définition du max.
  Le principe est le même si la norme est définie à l'aide d'un sup.
- Pour prouver l'homogénéité, il faut parfois démontrer que $N(\lambda v) \leqslant |\lambda|\, N(v)$ (par exemple en raisonnant comme à l'item précédent) puis, pour $\lambda \neq 0$, on utilise

$$N(v) = N\left(\frac{\lambda}{\lambda} v\right) \leqslant \frac{1}{|\lambda|} N(\lambda v)$$

  pour conclure (voir l'exercice 24.1).

Conseils

- Certaines normes sont définies par des intégrales. Il est bon de se souvenir que si l'intégrale d'une fonction **continue**, **positive** est nulle alors cette fonction est nulle sur l'intervalle d'intégration.
- Lorsque l'expression définissant la norme comporte des termes élevés au carré (et des racines carrées), il peut s'agir d'une norme euclidienne.
  Dans ce cas là, on forme, par la « règle du dédoublement » la forme bilinéaire associée et on cherche à prouver qu'il s'agit d'un produit scalaire.

  EXEMPLE 2

  Montrer que $N((x, y, z)) = \sqrt{x^2 + 2y^2 + 3z^2}$ définit une norme sur $\mathbb{R}^3$.

  SOLUTION

  On définit la forme bilinéaire $\varphi((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) = x_1x_2 + 2y_1y_2 + 3z_1z_2$. On vérifie alors qu'elle définit un produit scalaire (voir fiche 37).

  Par suite, $N(((x, y, z)) = \sqrt{\varphi((x, y, z), (x, y, z))}$ est la norme associée à ce produit scalaire.

Exemple traité

On rappelle que deux normes N_1 et N_2 définies sur un espace vectoriel normé E sont équivalentes s'il existe $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^+$ tels que

$$\forall v \in E, \qquad \alpha_1 N_1(v) \leqslant N_2(v) \leqslant \alpha_2 N_1(v)$$

Soient, dans $E = \mathrm{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$, deux applications N_1 et N_2 de E dans $\mathbb{R}$ définies par

$$N_1(f) = |f(0)| + 2\int_0^1 \left|f'(t)\right| \mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad N_2(f) = 2\,|f(0)| + \int_0^1 \left|f'(t)\right| \mathrm{d}t$$

Montrer que ce sont des normes et qu'elles sont équivalentes.

SOLUTION

On pose par commodité, pour $i \in \{1, 2\}$,

$$N_i(f) = a_i\,|f(0)| + b_i \int_0^1 \left|f'(t)\right| \mathrm{d}t$$

avec $(a_1, b_1) = (1, 2)$ et $(a_2, b_2) = (2, 1)$.
Positivité : Il est tout d'abord clair que $|f(0)| \geqslant 0$ et, par positivité de l'intégrale,

$$\int_0^1 \left|f'(t)\right| \mathrm{d}t \geqslant 0$$

donc $N_i(f) \geqslant 0$ (car $a_i \geqslant 0$ et $b_i \geqslant 0$).

Séparation : Il est clair que $N_i(0)=0$. Soit $f \in E$:

$$N_i(f)=0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} |f(0)|=0 \\ \int_0^1 |f'(t)|\,\mathrm{d}t=0 \end{array} \right.$$

Comme f est de classe C^1, f' est continue, dès lors $t \mapsto |f'(t)|$ est positive, continue, d'intégrale nulle, d'où $t \mapsto f'(t)$ est nulle sur $[0,1]$. Ainsi, $t \mapsto f(t)$ est constante égale à $f(0)=0$. Il s'agit donc de la fonction nulle.
Homogénéité : En utilisant le fait que la valeur absolue est une norme et la linéarité de l'intégration on a, pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in E$:

$$\begin{aligned} N_i(\lambda f) &= a_i\,|\lambda f(0)| + b_i \int_0^1 \left|(\lambda f)'(t)\right| \mathrm{d}t \\ &= a_i\,|\lambda|\,|f(0)| + b_i \int_0^1 |\lambda| \left|f'(t)\right| \mathrm{d}t \\ &= a_i\,|\lambda|\,|f(0)| + b_i\,|\lambda| \int_0^1 \left|f'(t)\right| \mathrm{d}t = |\lambda|\,N_i(f) \end{aligned}$$

ce qui établit le résultat.
Inégalité triangulaire : En utilisant le fait que la valeur absolue vérifie l'inégalité triangulaire et que l'intégrale est croissante et linéaire, pour $(f,g) \in E^2$:

$$\begin{aligned} N_i(f+g) &= a_i\,|(f+g)(0)| + b_i \int_0^1 \left|(f+g)'(t)\right| \mathrm{d}t \\ &\leqslant a_i\,|f(0)| + a_i\,|g(0)| + b_i \int_0^1 \left(\left|f'(t)\right| + \left|g'(t)\right|\right) \mathrm{d}t \\ &\leqslant a_i\,|f(0)| + a_i\,|g(0)| + b_i \int_0^1 \left|f'(t)\right| \mathrm{d}t + b_i \int_0^1 \left|g'(t)\right| \mathrm{d}t = N_i(f) + N_i(g) \end{aligned}$$

ce qui établit le résultat attendu.
Enfin, ces deux normes sont équivalentes, puisque, pour $f \in E$,

$$\frac{1}{2} N_1(f) \leqslant N_2(f) \leqslant 2 N_1(f)$$

Exercices

EXERCICE 24.1 Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose

$$||A|| = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}|$$

Montrer que $||\cdot||$ est une norme et que :

$$\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2, \quad ||AB|| \leqslant ||A|| \times ||B||$$

➲ Source : D'après Mines-Pont MP

EXERCICE 24.2 Soit $(E, ||\cdot||)$ un $\mathbb{R}-$espace vectoriel normé et $f \in \mathcal{L}(E)$.
On définit l'application N sur E en posant $N(x) = ||f(x)||$.
Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que N définisse une norme sur E.

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 24.1 Majorer les expressions sans le maximum, puis utiliser le fait que le maximum est, par définition, le plus petit des majorants.

EXERCICE 24.2 Remarquer que la linéarité de f donne deux des axiomes sur quatre.

Solutions des exercices

EXERCICE 24.1 On vérifie les axiomes.

Positivité : $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $\sum\limits_{i=1}^{n} |a_{i,j}| \geqslant 0$ et comme le maximum d'une partie positive est positive $||A|| \geqslant 0$.
Séparation : Clairement $||0|| = 0$. Réciproquement, si $||A|| = 0$ alors, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $\sum\limits_{i} |a_{i,j}| = 0$, or une somme de nombres positifs est nulle si et seulement chacun des termes l'est. Par suite, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j} = 0$ d'où $A = 0$.
Homogénéité : Si $\lambda = 0$, $||\lambda A|| = ||0|| = 0 = |\lambda|\,||A||$. Soit maintenant $\lambda \in \mathbb{R}^*$, clairement $\forall j \in [\![1,n]\!]$,

$$\sum_{i=1}^{n} |\lambda a_{i,j}| = |\lambda| \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}| \leqslant |\lambda|\,||A||$$

et par définition du maximum, il vient $||\lambda A|| \leqslant |\lambda|\,||A||$. Ensuite, on peut écrire

$$||A|| = \left|\left|\frac{\lambda}{\lambda} A\right|\right| \leqslant \frac{1}{\lambda}\,||\lambda A|| \quad \text{d'où} \quad \lambda\,||A|| \leqslant ||\lambda A||$$

ce qui prouve l'égalité par double inégalité.

Solutions

Inégalité triangulaire : soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$, $\forall j \in [\![1, n]\!]$,

$$\sum_{i=1}^{n} |a_{i,j} + b_{i,j}| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}| + \sum_{i=1}^{n} |b_{i,j}| \leqslant ||A|| + ||B||$$

par suite, par définition du maximum, $||A + B|| \leqslant ||A|| + ||B||$.
Finalement, $||\cdot||$ définit bien une norme.
En notant, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $c_{i,j}$ le coefficient correspondant dans le produit AB, on a, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} |c_{i,j}| = \sum_{i=1}^{n} \left|\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}\right| &\leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} |a_{ik} b_{kj}| \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n} |b_{kj}| \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ik}|\right) \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n} |b_{kj}|\, ||A|| \\ &\leqslant ||A|| \sum_{k=1}^{n} |b_{kj}| \leqslant ||A|| \times ||B||\end{aligned}$$

et par définition du maximum, il s'ensuit que $||AB|| \leqslant ||A|| \times ||B||$ comme annoncé.

EXERCICE 24.2 On vérifie les différents axiomes.
Tout d'abord pour $x \in E$, $f(x) \in E$ d'où $N(x) = ||f(x)|| \geqslant 0$ ce qui assure la positivité.
Soit $x \in E$, $N(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ donc il est nécessaire que $f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$, c'est-à-dire que f soit injective pour obtenir l'axiome de séparation.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in E$, $N(\lambda x) = ||f(\lambda x)|| = ||\lambda f(x)|| = |\lambda|\, ||f(x)|| = |\lambda|\, N(x)$. L'homogénéité est donc vérifiée.
Soit $(x, y) \in E^2$,

$$N(x + y) = ||(f(x + y))|| = ||(f(x) + f(y))|| \leqslant ||f(x)|| + ||f(y)|| = N(x) + N(y)$$

ce qui assure l'inégalité triangulaire.
En conclusion, la seule condition nécessaire est l'injectivité de f et elle est également suffisante.

Montrer qu'une suite d'éléments d'un espace vectoriel normé converge ou diverge

25

Quand on ne sait pas !

On considère un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E muni d'une norme notée $||.||$.

- Soit (u_n) une suite d'éléments de E et ℓ un élément de E, on dit que (u_n) tend vers ℓ si, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe N tel que pour $n \geq N$, $||u_n - \ell|| \leq \varepsilon$.

  On note alors $(u_n) \longrightarrow \ell$ ou $\lim(u_n) = \ell$.

  Cela revient au fait que la suite réelle $(||u_n - \ell||)$ tende vers 0.
- Si l'espace vectoriel E est de dimension finie, on peut tester la convergence d'une suite « coordonnée par coordonnée ». Précisément, en gardant les notations précédentes et en posant $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E, si on note pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = u_n(1)e_1 + \cdots + u_n(p)e_p$$

  et si on note $\ell = \ell(1)e_1 + \cdots + \ell(p)e_p$, la suite (u_n) tend vers ℓ si et seulement si, pour tout i compris entre 1 et p, la suite scalaire $(u_n(i))$ tend vers $\ell(i)$.

Que faire ?

- Dans le cas général (c'est-à-dire si l'espace vectoriel E n'est pas de dimension finie), pour montrer qu'une suite (u_n) converge, il faut déterminer la limite ℓ de la suite puis montrer que la suite réelle $(||u_n - \ell||)$ tend vers 0. La plupart du temps cela se fait par majoration de ce terme.

  EXEMPLE 1 On considère l'espace vectoriel E des fonctions continues sur $[0, 1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On considère la norme $||.||_1$ définie par

$$\forall f \in E,\ ||f||_1 = \int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t$$

  On considère la suite (f_n) d'éléments de E définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, f_n : t \mapsto \frac{1}{1+t^n}$$

  On veut montrer que (f_n) tend vers $h : t \mapsto 1$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$||f_n - h||_1 = \int_0^1 \left| \frac{1}{1+t^n} - 1 \right| \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n} \mathrm{d}t \leq \int_0^1 t^n \mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}$$

On en déduit que $\lim_{n \to +\infty} ||f_n - h||_1 = 0$ et donc $(f_n) \longrightarrow h$.

- Dans le cas où l'espace vectoriel E est de dimension finie, on peut procéder comme ci-dessus mais on peut aussi se servir d'une base de E et montrer la convergence coordonnée par coordonnée : voir l'exemple traité

Conseils

- Comme on l'a déjà dit, il est important de regarder si on travaille dans un espace vectoriel de dimension finie ou pas car les méthodes à utiliser peuvent alors être différentes.
- Dans le cas où E n'est pas de dimension finie, il faut faire attention à la norme choisie. En effet, il se peut qu'une suite converge vers un élément ℓ pour une norme mais pas pour une autre. Si on reprend l'exemple 1 ci-dessus mais que l'on remplace la norme par la norme infinie $||.||_\infty$ définie par

$$\forall f \in E,\ ||f||_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$$

alors la suite (f_n) ne converge plus vers h. En effet pour tout entier $n \geq 0$:

$$||f_n - h||_\infty \geq |f_n(1) - h(1)| = \frac{1}{2}$$

Exemple traité

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = \alpha I_2 + N$, où $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On veut étudier la convergence de la suite $(A^n)_{n \geq 1}$.

1 Soit $n \geq 1$, calculer A^n.

2 En déduire une condition sur α pour que la suite $(A^n)_{n \geq 1}$ converge.

SOLUTION

1 On remarque que $N^2 = 0$ et donc pour tout entier $p \geq 2$, $N^p = 0$.
Comme αI_2 et N commutent, pour tout entier $n \geq 2$,

$$A^n = (\alpha I_2 + N)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \alpha^{n-p} I_2 N^p = \alpha^n I_2 + n\alpha^{n-1} N$$

C'est-à-dire

$$A^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1} \\ 0 & \alpha^n \end{pmatrix}$$

Cette formule est encore vérifiée pour $n = 1$.

2 En travaillant avec la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on obtient que $(A^n)_{n\geq 1}$ converge si et seulement si $(\alpha^n)_{n\geq 1}$ et $(n\alpha^{n-1})_{n\geq 1}$ convergent. Finalement :

- Si $\alpha \geq 1$, la suite $(A^n)_{n\geq 1}$ diverge.
- Si $\alpha < 1$, la suite $(A_n)_{n\geq 1}$ converge vers la matrice nulle.

Exercices

EXERCICE 25.1

Soit E un espace vectoriel de dimension finie muni d'une norme notée $||.||$. Soit u un endomorphisme de E. On suppose que pour tout vecteur $x \in E$, $||u(x)|| \leq ||x||$.
Pour tout entier naturel k non nul, on considère l'endomorphisme

$$r_k = \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{k-1} u^l = \frac{1}{k}(\mathrm{id}_E + u + u^2 + \cdots + u^{k-1})$$

où id_E représente l'endomorphisme identité de E.

1 Soit $x \in \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$. Déterminer $\lim\limits_{k\to+\infty} r_k(x)$.

2 Soit $x \in \mathrm{Im}(u - \mathrm{id}_E)$. Montrer que $\lim\limits_{k\to+\infty} r_k(x) = 0_E$.

3 En déduire que $E = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Im}(u - \mathrm{id}_E)$.

4 Soit x un vecteur quelconque. Montrer que la suite $(r_k(x))_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un vecteur de E, que l'on caractérisera géométriquement.

EXERCICE 25.2

On travaille dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ et on considère la norme $||.||$ définie par

$$\left|\left|\sum_{k\geq 0} a_k X^k\right|\right| = \max\left\{|a_k|\ ,\ k \in \mathbb{N}\right\}$$

Pour tout entier n, on pose

$$P_n = 1 + X + \frac{1}{2!}X^2 + \cdots + \frac{1}{n!}X^n$$

Montrer que la suite (P_n) diverge.

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 25.1

1. Pour $x \in \text{Ker}(u - \text{id}_E)$ et $l \in \mathbb{N}$, calculer $u^l(x)$.
2. Faire apparaitre un téléscopage.
3. Montrer que $\text{Ker}(u - \text{id}_E) \cap \text{Im}(u - \text{id}_E) = \{0_E\}$.
4. Utiliser la décomposition démontrée à la question précédente.

EXERCICE 25.2 Raisonner par l'absurde. Supposer que la suite (P_n) tend vers un polynôme Q et minorer $||P_n - Q||$.

Solutions des exercices

EXERCICE 25.1

1 Soit $x \in \text{Ker}(u - \text{id}_E)$. Par définition, $u(x) = x$ et donc, par une récurrence immédiate, pour tout $l \in \mathbb{N}$, $u^l(x) = x$. On en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$r_k(x) = \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{k-1} u^l(x) = \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{k-1} x = x$$

La suite $(r_k(x))_{k\geq 1}$ est donc constante. On en déduit que $\lim\limits_{k\to+\infty} r_k(x) = x$.

2 Soit $x \in \text{Im}(u - \text{id}_E)$. Par définition, il existe $y \in E$ tel que $x = u(y) - y$. Pour tout $l \in \mathbb{N}$ on a alors $u^l(x) = u^{l+1}(y) - u^l(y)$. De ce fait, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$r_k(x) = \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{k-1} u^l(x) = \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{k-1}\Big(u^{l+1}(y) - u^l(y)\Big) = \frac{1}{k}\Big(u^k(y) - y\Big)$$

La dernière égalité étant un téléscopage. Par hypothèse, $||u(y)|| \leq ||y||$ et, par récurrence, on obtient que pour tout entier $k \geq 1$, $||u^k(y)|| \leq ||y||$. Cela implique que

$$||r_k(x) - 0_E|| = ||r_k(x)|| \leq \frac{1}{k}||u^k(y) - y|| \leq \frac{1}{k}\Big(||u^k(y)|| + ||y||\Big) \leq \frac{2}{k}||y||$$

On en déduit que $\lim\limits_{k\to+\infty} ||r_k(x) - 0_E|| = 0$ et donc $(r_k(x)) \longrightarrow 0_E$.

3 Soit $x \in \text{Ker}(u - \text{id}_E) \cap \text{Im}(u - \text{id}_E)$. D'après les deux questions précédentes, la suite $(r_k(x))_{k\geq 1}$ tend vers x (car $x \in \text{Ker}(u - \text{id}_E)$) et elle tend aussi vers 0_E (car $x \in \text{Im}(u - \text{id}_E)$).
Par unicité de la limite, $x = 0_E$. Cela montre que $\text{Ker}(u - \text{id}_E) \cap \text{Im}(u - \text{id}_E) = \{0_E\}$ ce qui implique que $\text{Ker}(u - \text{id}_E)$ et $\text{Im}(u - \text{id}_E)$ sont en somme directe.

Comme de plus, d'après le théorème du rang,

$$\dim\left(\operatorname{Ker}(u-\mathrm{id}_E)\right)+\dim\left(\operatorname{Im}(u-\mathrm{id}_E)\right)=\dim E$$

on obtient que $\operatorname{Ker}(u-\mathrm{id}_E)\oplus\operatorname{Im}(u-\mathrm{id}_E)=E$.

4 Soit x un vecteur de E. D'après la question précédente, il existe $\alpha\in\operatorname{Ker}(u-\mathrm{id}_E)$ et $\beta\in\operatorname{Im}(u-\mathrm{id}_E)$ tels que $x=\alpha+\beta$. Pour tout $k\geq 1$, $r_k(x)=r_k(\alpha)+r_k(\beta)$ car r_k est linéaire. On a vu que $(r_k(\alpha))\longrightarrow\alpha$ et $(r_k(\beta))\longrightarrow 0_E$. Par addition, on en déduit que $\lim\limits_{k\to+\infty} r_k(x)=\alpha$. C'est-à-dire que la suite $(r_k(x))_{k\geq 1}$ converge vers la projection de x sur $\operatorname{Ker}(u-\mathrm{id}_E)$ parallèlement à $\operatorname{Im}(u-\mathrm{id}_E)$.

EXERCICE 25.2

Supposons par l'absurde que la suite (P_n) converge vers un polynôme noté $Q=\sum\limits_{k=0}^{d} q_k X^k$ où d est le degré de Q. Pour tout entier $n\geq d$,

$$P_n-Q=\sum_{k=0}^{d}\left(\frac{1}{k!}-q_k\right)X^k+\sum_{k=d+1}^{n}\frac{1}{k!}X^k$$

En particulier, le coefficient de degré $d+1$ de P_n-Q est $\frac{1}{(d+1)!}$.
On en déduit que pour tout entier $n\geq d$, $||P_n-Q||\geq\frac{1}{(d+1)!}$. Cela contredit la convergence de la suite (P_n) vers Q.

Solutions

26

Montrer que des normes sont équivalentes

Quand on ne sait pas !

On considère un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

Soit N_1 et N_2 deux normes sur E. On dit que N_1 et N_2 sont équivalentes s'il existe deux réels strictement positifs α et β tels que :

$$\forall x \in E, \alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_2(x)$$

- Notons que l'équivalence des normes est une relation d'équivalence
- La notion de normes équivalentes est importante car si N_1 et N_2 sont des normes équivalentes alors si (u_n) est une suite d'éléments de E et si ℓ est un élément de E alors (u_n) tend vers ℓ pour N_1 si et seulement si (u_n) tend vers ℓ pour N_2. On en déduit que les notions d'ouvert, de fermé, de partie dense, etc sont les mêmes pour les deux normes.

Que faire ?

- La première chose à vérifier est de regarder si l'espace vectoriel sur lequel on travaille est de dimension finie. En effet, si E est de dimension finie alors toutes les normes sont équivalentes. Il n'y a donc rien à faire....
- Supposons que E n'est pas un espace vectoriel de dimension finie. Pour montrer que deux normes N_1 et N_2 sont équivalentes, il faut trouver des constantes strictement positives α et β telles que :

$$\forall x \in E, \alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_2(x)$$

Pour cela on considère un élément x de E et on essaye de majorer $N_1(x)$ en fonction de $N_2(x)$ puis on essaye de majorer $N_2(x)$ en fonction de $N_1(x)$.

EXEMPLE 1 On considère $E = \mathbb{R}^n$ et on étudie les normes $||.||_1$ et $||.||_\infty$ définies par :

$$\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in E, \ \ ||x||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \text{ et } ||x||_\infty = \max\{|x_i|\ ,\ i \in [\![1, n]\!]\}$$

Comme E est de dimension finie, on sait que ces normes sont équivalentes. Essayons quand même de le montrer « à la main » c'est-à-dire sans utiliser ce théorème.

Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in E$,

$$||x||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq \sum_{i=1}^{n} ||x||_\infty \leq n||x||_\infty$$

De même,

$$||x||_\infty = \max\{|x_i|\ ,\ i \in [\![1, n]\!]\} \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| = ||x||_1$$

On en déduit que

$$||x||_\infty \leq ||x||_1 \leq n||x||_\infty$$

ce qui montre bien que les deux normes sont équivalentes.

- Supposons que E n'est pas un espace vectoriel de dimension finie. Pour montrer que deux normes N_1 et N_2 **ne sont pas équivalentes**, il faut montrer que l'on ne peut pas trouver $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in E$, $\alpha N_1(x) \leq N_2(x)$ ou que l'on ne peut pas trouver $\beta > 0$ tel que pour tout $x \in E$, $N_2(x) \leq \beta N_1(x)$.

  On peut remarquer que l'existence d'un réel α strictement positif tel que pour tout x dans E, $\alpha N_1(x) \leq N_2(x)$ implique que, quand x varie dans $E \setminus \{0_E\}$, $\frac{N_1(x)}{N_2(x)}$ est majoré (par $\frac{1}{\alpha}$) et le fait qu'il existe $\beta > 0$ tel que pour tout x dans E, $N_2(x) \leq \beta N_1(x)$ implique que, quand x varie dans $E \setminus \{0_E\}$, $\frac{N_2(x)}{N_1(x)}$ est majoré (par β).

  Pour montrer que deux normes ne sont pas équivalentes, il suffit donc de montrer que la quantité $\frac{N_1(x)}{N_2(x)}$ ou la quantité $\frac{N_2(x)}{N_1(x)}$ n'est pas majorée. Cela peut se montrer en exhibant une suite (x_n) d'éléments de E tels que $\left(\dfrac{N_1(x_n)}{N_2(x_n)}\right)$ tende vers $+\infty$ ou telle que $\left(\dfrac{N_2(x_n)}{N_1(x_n)}\right)$ tende vers $+\infty$.

  Notons que quitte à échanger N_1 et N_2 dans ce qui précède, on peut se ramener à montrer que des quantités ne sont pas minorées ou qu'elles tendent vers 0.

Conseils

On peut aussi utiliser d'autres méthodes plus évoluées. Comme expliqué à la fin du premier paragraphe, si N_1 et N_2 sont équivalentes alors toutes les notions de convergence, continuité, ouvert, fermé, etc sont les mêmes pour les deux normes. Si on sait montrer par exemple qu'une partie X de E est ouverte pour N_1 et pas pour N_2 alors cela signifie que N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes.

Exemple traité

Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.
On considère les normes $||.||_1$ et $||.||_\infty$ définies par

$$\forall f \in E,\ ||f||_1 = \int_0^1 |f| \text{ et } ||f||_\infty = \sup\{|f(t)|\ ,\ t \in [0,1]\}$$

Pour tout entier n, on pose $f_n : t \mapsto t^n$.

1 Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $||f_n||_1$ et $||f_n||_\infty$.

2 Les normes $||.||_1$ et $||.||_\infty$ sont-elles équivalentes ?

SOLUTION

1 Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$||f_n||_1 = \int_0^1 t^n \mathrm{d}t = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

et $||f_n||_\infty = |f_n(1)| = 1$ car $|f_n|$ est croissante.

2 Les normes ne sont pas équivalentes car $\dfrac{||f_n||_\infty}{||f_n||_1} = n+1$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ et donc n'est pas majoré.

On vient de montrer qu'il n'existe pas de constante β telle que $||.||_\infty \leq \beta||.||_1$. Par contre pour toute fonction f dans E, $||f||_1 = \displaystyle\int_0^1 |f| \leq ||f||_\infty$

Exercices

EXERCICE 26.1

On considère l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$. On considère les deux normes suivantes :

$$\forall f \in E,\ N_1(f) = ||f||_\infty + ||f'||_\infty \text{ et } N_2(f) = |f(0)| + ||f'||_\infty$$

1 Montrer que N_1 et $||.||_\infty$ ne sont pas équivalentes.

2 Montrer que N_1 et N_2 sont équivalentes.

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 26.1

1 Trouver une suite de fonctions (f_n) telle que $\dfrac{N_1(f_n)}{||f_n||_\infty}$ tende vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

2 Montrer que $N_2(f) \leq N_1(f) \leq 2N_2(f)$.

EXERCICE 26.1

1 On veut montrer que N_1 et $||.||_\infty$ ne sont pas équivalentes.

Comme il est clair que $||.||_\infty \leq N_1$, il faut montrer qu'il n'existe pas de constante $\beta > 0$ telle que $N_1 \leq \beta||.||_\infty$, c'est-à-dire que quand f décrit l'ensemble des fonctions non nulles, $\dfrac{N_1(f)}{||f||_\infty}$ n'est pas majoré.

On considère, pour un entier naturel n non nul, les fonctions $f_n : t \mapsto t^n$. Il est clair que $||f_n||_\infty = 1$. De plus $f_n' : t \mapsto nt^{n-1}$ et donc $||f_n'||_\infty = n$. Cela implique que $N_1(f_n) = n + 1$.

Finalement, $\dfrac{N_1(f)}{||f||_\infty} = \dfrac{n+1}{1} = n + 1$. On obtient que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{N_1(f)}{||f||_\infty} = +\infty$ ce qui implique que les normes ne sont pas équivalentes.

2 Soit $f \in E$, par définition, $|f(0)| \leq ||f||_\infty$ donc $N_2(f) \leq N_1(f)$.

On cherche maintenant à majorer $N_1(f)$ par $2N_2(f)$. Pour cela il suffit de majorer $||f||_\infty$ et $||f'||_\infty$ par $N_2(f)$. Il est évident que $||f'||_\infty \leq N_2(f)$.

De plus, pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) - f(0) = \displaystyle\int_0^x f'(t)dt$. De ce fait :

$$
\begin{aligned}
|f(x)| &= \left|f(0) + \int_0^x f'(t)\mathrm{d}t\right| \\
&\leq |f(0)| + \int_0^x |f'(t)|\mathrm{d}t \\
&\leq |f(0)| + \int_0^x ||f'||_\infty \mathrm{d}t \\
&\leq |f(0)| + x||f||_\infty \\
&\leq |f(0)| + ||f'||_\infty
\end{aligned}
$$

On en déduit que $||f||_\infty \leq N_2(f)$ puis $N_1(f) \leq 2N_2(f)$.

Finalement $N_2 \leq N_1 \leq 2N_2$ donc les normes N_1 et N_2 sont équivalentes.

27

Montrer qu'un ensemble est ouvert (ou fermé) avec définition ou stabilité

Quand on ne sait pas !

Dans cette fiche $(E, ||.||)$ désigne un espace vectoriel normé.

- Une partie X est E est dite ouverte si pour tout x de E, il existe $\delta > 0$ tel que la boule ouverte $B(x, \delta)$ soit incluse dans X. On dit aussi que X est un ouvert.
- Une partie X de E est dite fermée si son complémentaire $\complement X$ est un ouvert. On dit aussi que X est un fermé.
- L'ensemble $\mathcal{T}$ des ouverts de E contient $\varnothing$, E et il est stable par union quelconque et par intersection **finie**. En passant au complémentaire, on obtient que l'ensemble des fermés de E contient $\varnothing$, E et il est stable par intersection quelconque et par union **finie**.
- Caractérisation séquentielle des fermés : Une partie X de E est fermée si et seulement si pour toute suite (x_n) d'éléments de X qui converge (dans E) vers ℓ alors ℓ appartient à X.

Que faire ?

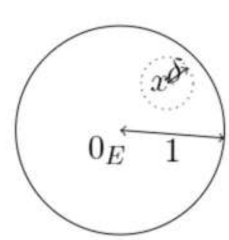
- Pour montrer qu'une partie X de E est un ouvert, on s'appuie sur la définition. On considère un élément générique x de X et on essaye de déterminer δ (qui peut dépendre de x) tel que $B(x, \delta) \subset X$.

EXEMPLE 1 Montrons que la boule ouverte de centre 0_E et de rayon 1 est ouverte.

On pose $X = B(0, 1)$. Pour tout $x \in X$, on a donc $||x|| = ||x - 0_E|| < 1$. Il existe alors δ tel que $||x|| + \delta < 1$. On peut par exemple prendre $\delta = \frac{1-||x||}{2}$. Montrons que dans ce cas, la boule $B(x, \delta)$ est incluse dans X. En effet, pour tout y dans $B(x, \delta)$,

$$||y|| = ||x + (y - x)|| \leq ||x|| + ||y - x|| < ||x|| + \delta < 1.$$

On a bien montré que $B(x, \delta) \subset X$ et donc X est ouvert.



- Pour montrer qu'une partie X est fermée, on peut montrer que son complémentaire $\complement X$ est ouvert ou utiliser la caractérisation séquentielle.

  EXEMPLE 2 Montrons que la boule fermée de centre 0_E et de rayon 1 est fermée. On pose $X = \overline{B}(0, 1) = \{x \in E \mid ||x|| \leq 1\}$. Soit (x_n) une suite d'éléments de X qui converge (dans E). On note ℓ la limite de (x_n). Par définition, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $||x_n|| \leq 1$ et donc, par passage à la limite $||\ell|| \leq 1$. On en déduit que $\ell \in X$. Par caractérisation séquentielle, X est fermée.

- Pour montrer qu'une partie est ouverte ou fermée, on peut utiliser la stabilité de l'ensemble des ouverts (ou des fermés) par réunion et intersection.

  EXEMPLE 3 Montrons que tout partie X finie de E est fermée. On peut écrire $X = \bigcup_{i \in I} \{x_i\}$ où I est un ensemble fini. Maintenant, pour tout i dans I, le singleton $\{x_i\}$ est fermé (c'est la boule fermée de rayon 0). On en déduit que X est fermée comme union **finie** de fermés.

Conseils

- Quand on veut démontrer qu'un ensemble est ouvert, il faut commencer par réfléchir (rapidement) à quelle méthode semble la plus rapide : directement avec la définition, en montrant que son complémentaire est fermé, en utilisant les opérations ensemblistes, voir en utilisant une fonction continue (fiche 31). Il en est de même pour montrer qu'un ensemble est fermé.
- Si $||.||_1$ et $||.||_2$ sont deux normes qui sont équivalentes, un ensemble X est ouvert (resp. fermé) pour $||.||_1$ si et seulement il l'est pour $||.||_2$. En particulier, si E est un espace vectoriel de dimension finie, on peut choisir la norme que l'on veut pour déterminer le caractère ouvert ou fermé d'une partie.

Exemple traité

Soit E l'espace des fonctions continue définies sur $[0, 1]$: $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. On considère la norme uniforme $||.||_\infty$ sur E. Montrer que $X = \{f \in E \ , \ \forall x \in [0, 1], f(x) > 0\}$ est ouvert et qu'il n'est pas fermé.

SOLUTION

- On peut montrer que X est ouvert en se basant sur la définition. Soit f une fonction appartenant à X. Comme elle est continue sur $[0, 1]$, on sait qu'elle admet un minimum. C'est-à-dire qu'il existe $x_0 \in [0, 1]$ tel que, pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) \geq f(x_0)$. De plus, comme $f \in X$, $f(x_0) > 0$. On peut alors poser $\delta = \frac{1}{2} f(x_0)$. Montrons que la boule $B(f, \delta)$ est incluse dans X. En effet, soit $g \in B(f, \delta)$, pour tout $x \in [0, 1]$,

$$g(x) = f(x) + (g(x) - f(x)) \geq f(x) - \delta \geq f(x_0) - \delta = \frac{1}{2} f(x_0) > 0.$$

  On a bien montré que g appartenait à X. On en déduit que X est ouvert.

On veut montrer que la partie X n'est pas fermée. Commençons par rappeler que le fait que X soit ouverte n'implique pas nécessairement qu'elle n'est pas fermée. Afin de montrer que X n'est pas fermée, on va exhiber un contre-exemple à la caractérisation séquentielle. On cherche donc une suite (f_n) d'éléments de X ayant une limite (pour $||.||_\infty$) qui n'est pas dans X. Il suffit de considérer $f_n : x \mapsto \frac{1}{n+1}$. Ce sont bien des fonctions de X et la suite (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle qui n'appartient pas à X.

Exercices

EXERCICE 27.1

On travaille dans $\mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ et on considère une norme notée $||.||$ telle que si A et B appartiennent à $\mathcal{M}_r(\mathbb{R})$, $||AB|| \leq ||A|| \times ||B||$.

1 Soit A une matrice de $\mathcal{M}_r(\mathbb{R})$. Justifier que si $||A|| < 1$, alors la série $\sum\limits_{n\geq 0} A^n$ converge.

2 a. Soit $B \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$. Montrer que $||B|| < 1$ implique $I_r - B$ est inversible.

b. Montrer que si $A \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{R})$ alors la boule de centre A et de rayon $\frac{1}{||A||}$ est incluse dans $\mathrm{GL}_r(\mathbb{R})$.

c. Conclure que l'ensemble des matrices inversibles est ouvert.

EXERCICE 27.2

Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites bornées muni de la norme infinie. On pose $A = \{$ suites croissantes$\}$; $B = \{$ suites convergeant vers $0\}$.

1 L'ensemble A est-il fermé ? est-il ouvert ?

2 L'ensemble B est-il ouvert ? est-il fermé ?

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 27.1

1 On pourra majorer $||A^n||$.

2 a. En utilisant la question précédente, déterminer une matrice S tel que $(I_r - B) \times S = I_r$.

b. Écrire un élément de la boule de centre A et de rayon $\frac{1}{||A^{-1}||}$ sous la forme $A + U$ puis factoriser par A.

c. Commencer par montrer que $I_r - B$ est inversible si $||B|| < 1$.

EXERCICE 27.1

1 On pourra montrer que le complémentaire de A est ouvert.

2 On pourra utiliser la caractérisation séquentielle pour montrer que B est fermé.

EXERCICE 27.1

1 Par une récurrence immédiate, et en utilisant la propriété de la norme, on peut montrer que pour tout entier n, $||A^n|| \leq ||A||^n$. Comme $||A|| < 1$, la série $\sum\limits_{n\geq 0} ||A||^n$ converge.
Cela implique par comparaison de séries à termes positifs que la série $\sum\limits_{n\geq 0} ||A^n||$ converge.
On en déduit que la série $\sum\limits_{n\geq 0} A^n$ est absolument convergente. Maintenant, $\mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ est de dimension finie donc la série $\sum\limits_{n\geq 0} A^n$ converge.

2 **a.** Soit B une matrice telle que $||B|| < 1$. On a vu que la série $\sum\limits_{n\geq 0} B^n$ était convergente. Notons S sa somme,

$$(I_r - B) \times S = \sum_{n=0}^{+\infty} B^n - B\sum_{n=0}^{+\infty} B^n = \sum_{n=0}^{+\infty} B^n - \sum_{n=1}^{+\infty} B^n = I_r.$$

On en déduit que $I_r - B$ est inversible (et que son inverse est égale à S).

b. Soit A une matrice inversible et $U \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$, $A + U = A(I_r - (-A^{-1}U))$. De ce fait, si $||U|| < \dfrac{1}{||A||^{-1}}$ alors $|| - A^{-1}U|| < 1$ et donc $A + U$ est inversible comme produit de deux matrices inversibles.

c. On en déduit que la boule de centre A et de rayon $\dfrac{1}{||A||^{-1}}$ est incluse dans $\mathrm{GL}_r(\mathbb{R})$.

d. La question précédente a montré que pour toute matrice A de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{R})$, il existe un réel strictement positif δ tel que la boule de centre A et de rayon δ soit incluse dans $\mathrm{GL}_r(\mathbb{R})$. Cela implique que $\mathrm{GL}_r(\mathbb{R})$ est un ouvert.
Notons que l'on peut aussi montrer que $\mathrm{GL}_r(\mathbb{R})$ est ouvert en utilisant le fait que l'application déterminant est continue (voir fiche 31)

EXERCICE 27.2

1 ■ Montrons que l'ensemble A est fermé en montrant que son complémentaire $\complement A$ est ouvert.
Soit u une suite qui n'est pas croissante. Il existe n_0 tel que $u_{n_0} > u_{n_0+1}$. On pose $\delta = \frac{u_{n_0} - u_{n_0+1}}{2}$ et $v \in B(u, \delta)$. Par définition de la boule $B(u, \delta)$, $||v - u||_\infty \leq \delta$ et donc $v_{n_0} > u_{n_0} - \delta$ et $v_{n_0+1} < u_{n_0+1} + \delta$. On en déduit :

$$v_{n_0} - v_{n_0+1} > u_{n_0} - \delta - (u_{n_0+1} + \delta) = u_{n_0} - u_{n_0+1} - 2\delta > 0$$

La dernière inégalité venant de la définition de δ. On en déduit que v n'est pas croissante. Finalement, $\complement A$ est ouvert donc A est fermé.

■ Par contre, A n'est pas ouvert. En effet pour u la suite constante égale à 1 (qui est croissante) et tout $\delta > 0$, $B(u, \delta) \not\subset A$. On peut par exemple considérer la suite v définie par

$$\begin{cases} v_0 = 1 + \frac{\delta}{2} \\ \forall n \geq 1, v_n = 1 \end{cases}$$

La suite v appartient à $B(u, \delta)$ et $v \notin A$ car $v_0 > v_1$.

2 ■ L'ensemble B n'est pas ouvert. La suite nulle 0_E appartient à B mais, pour tout $\delta > 0$, la suite constante égale à $\frac{\delta}{2}$ appartient à $B(0_E, \delta)$ mais n'appartient pas à B.

■ Par contre B est fermé. En effet, si $(u(p))_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite de $B^{\mathbb{N}}$ tendant vers $u \in E$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe p_0 telle que $||u(p_0) - u||_\infty \leq \varepsilon$. Maintenant comme $u(p_0)$ tend vers 0, il existe N tel que pour $n \geq N$, $|u(p_0)_n| \leq \varepsilon$. On en déduit que pour $n \geq N$, $|u_n| \leq |u_n - u(p_0)_n + u(p_0)_n| \leq 2\varepsilon$. Par définition, u tend vers 0.

Calculer l'intérieur et l'adhérence d'un ensemble

28

Quand on ne sait pas !

On considère un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E muni d'une norme notée $||.||$.

- Soit X une partie de E et $x \in X$. Le point x est un point intérieur à X s'il existe $\delta > 0$ tel que la boule ouverte de centre x et de rayon δ soit incluse dans X. On appelle intérieur de X et on note $\mathring{X}$ l'ensemble des points intérieurs à X.
- Soit X une partie de E et $x \in E$. Le point x est un point adhérent à X si pour tout $\delta > 0$, la boule ouverte de centre x et de rayon δ rencontre X. On appelle adhérence de X et on note $\overline{X}$ l'ensemble des points adhérents à X.

On peut aussi utiliser des caractérisations avec des ouverts et des fermés.

- Soit X une partie de E, $\mathring{X}$ est le plus grand ouvert inclus dans X. En particulier, $\mathring{X} \subset X$ et $\mathring{X} = X$ si et seulement si X est ouvert.
- Soit X une partie de E, $\overline{X}$ est le plus petit fermé contenant X. En particulier, $X \subset \overline{X}$ et $\overline{X} = X$ si et seulement si X est fermé.

Pour finir, on utilise aussi souvent la caractérisation séquentielle des points adhérents.

Soit X une partie de E et $x \in E$. Le point x est adhérent à X si et seulement s'il existe une suite (x_n) d'éléments de X telle que $(x_n) \longrightarrow x$.

Que faire ?

- Quand on veut chercher à déterminer l'intérieur d'une partie X de E, il est préférable de commencer par essayer d'avoir l'intuition du résultat. Il faut se demander quels sont les éléments de X tels que « autour d'eux » tous les éléments sont encore dans X ; c'est-à-dire quels sont les éléments tels que si on les modifie « un peu » on conserve un élément de X.

  Une fois que l'on à deviné quelle était la partie Y que l'on pense être $\mathring{X}$, il faut montrer que tous les éléments de Y appartiennent bien à $\mathring{X}$ en revenant à la définition puis, montrer que si y n'est pas dans Y alors y n'est pas dans $\mathring{X}$, c'est-à-dire que pour tout $\delta > 0$, $B(y, \delta) \cap \complement X \neq \varnothing$.
- Quand on veut chercher à déterminer l'adhérence d'une partie X de E il est préférable de commencer par essayer d'avoir l'intuition du résultat. Il faut se demander quels sont les éléments de E que l'on peut atteindre comme limite d'une suite d'éléments de X.

Quand on a trouvé l'ensemble Y cherché. On montre que tous les éléments y de Y sont dans $\overline{X}$ en construisant une suite (x_n) d'éléments de X telle que $(x_n) \longrightarrow y$; puis on montre que les éléments y qui ne sont pas dans Y ne sont pas dans $\overline{X}$. Pour cela on exhibe le plus souvent une boule $B(y, \delta)$ où $\delta > 0$ telle que $B(y, \delta) \subset \complement X$.

Conseils

- Quand on veut déterminer l'intérieur ou l'adhérence d'une partie on peut procéder de plusieurs manières : utiliser directement la définition avec des boules, utiliser la caractérisation séquentielle (pour l'adhérence), utiliser le fait que l'intérieur de X est le plus grand ouvert inclus dans X ou le fait que l'adhérence de X est le plus petit fermé contenant X. Il n'y a pas de méthode meilleure que les autres, cela va souvent dépendre des cas à traiter. Pour cela il faut bien connaitre les différentes méthodes et essayer de voir laquelle sera la plus facile à utiliser dans le problème posé.
- Si l'espace vectoriel que l'on considère est de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes, de ce fait les notions d'intérieur et d'adhérence ne dépendent pas du choix de la norme. Par contre, si l'espace est de dimension infinie, l'adhérence et l'intérieur d'une partie peuvent être modifiés si on change la norme. Voir l'exercice 1 de cette fiche.

Exemple traité

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. On pose $H = \{P \in E\ ,\ P(1) = 1\}$.

1 Déterminer $\mathring{H}$.

2 Déterminer $\overline{H}$

3 On suppose maintenant que $E = \mathbb{R}[X]$ et on considère la norme

$$\left\| \sum_{k \geq 0} a_k X^k \right\| = \max \{|a_k|\ ,\ k \in \mathbb{N}\}$$

Soit Q un polynôme de E, on pose pour tout $i \in \mathbb{N}$: $R_i = Q + \frac{1-Q(1)}{i+1} \sum\limits_{k=0}^{i} X^k$.

Montrer que $(R_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de H et que $(R_i)_{i \in \mathbb{N}}$ tend vers Q. En déduire que $\overline{H} = E$.

SOLUTION

1 L'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ étant de dimension finie, l'intérieur $\mathring{H}$ ne dépend pas de la norme que l'on considère. Prenons la norme infinie $||.||_\infty$ définie par

$$\left\| \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \right\| = \max \{|a_k|\ ,\ k \in [\![0, n]\!]\}$$

Pour tout polynôme P dans H et tout $\varepsilon \neq 0$, le polynôme $Q = P + \varepsilon$ n'est plus dans H car $Q(1) = P(1) + \varepsilon = 1 + \varepsilon \neq 1$. Cela nous laisse à penser que $\mathring{H} = \varnothing$.

Soit $P \in H$. On pose $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$. Soit $\delta > 0$, on veut montrer que $B(P, \delta)$ n'est pas incluse dans H. Pour cela on considère $Q = P + \dfrac{\delta}{2}$. Il est clair que $Q \in B(P, \delta)$ car $||Q - P||_\infty = ||\frac{\delta}{2}|| = \frac{\delta}{2} < \delta$. De plus $Q(1) = P(1) + \frac{\delta}{2} = 1 + \frac{\delta}{2} \neq 1$. Donc $Q \notin H$. Cela implique que $P \notin \mathring{H}$.

On a bien montré que $\mathring{H} = \varnothing$.

2 On considère toujours la norme infinie $||.||_\infty$. Il semble que H est fermé car, si $(P_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de H qui converge vers un polynôme Q alors, par un passage à la limite $Q(1)$ vaudra 1. Ecrivons le proprement.

Soit $(P_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de polynôme de H qui converge vers le polynôme Q. En écrivant pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$P_i = \sum_{k=0}^{n} a_k(i) X^k$$

on sait que, comme $(P_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tend vers $Q = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k X^k$ alors pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, la suite $(a_k(i))_{i\in\mathbb{N}}$ tend vers b_k. On en déduit que

$$Q(1) = \sum_{k=0}^{n} b_k = \sum_{k=0}^{n} \left(\lim_{i\to+\infty} a_k(i) \right) = \lim_{i\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k(i) \right) = \lim_{i\to+\infty} P_i(1) = 1$$

donc $Q(1) = 1$ ce qui implique que $Q \in H$.

On a montré que H était fermé ce qui implique que $\overline{H} = H$.

3 Le degré des polynômes pouvant être aussi grand que l'on veut, on peut avoir des polynômes de norme « très petite » prenant une valeur « grande » quand ils sont évalués en 1. De ce fait, on peut penser que $\overline{H} = E$: tout polynôme de E est « proche » d'un polynôme de H.

Soit $i \in \mathbb{N}$, vérifions que $R_i \in H$. En effet,

$$R_i(1) = Q(1) + \frac{1 - Q(1)}{i+1} \sum_{k=0}^{i} 1 = Q(1) + (1 - Q(1)) = 1$$

De plus

$$||R_i - Q|| = \left|\left| \frac{1 - Q(1)}{i+1} \sum_{k=0}^{i} X^k \right|\right| = \frac{|1 - Q(1)|}{i+1}$$

Cela montre que $\lim\limits_{i\to+\infty} ||R_i - Q|| = 0$ et donc $\lim\limits_{i\to+\infty} R_i = Q$.

On a bien montré que pour tout polynôme Q de E il existait une suite $(R_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'éléments de H telle que $(R_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tende vers Q. Cela signifie que $Q \in \overline{H}$ et donc $\overline{H} = E$.

Exercices

EXERCICE 28.1

On considère $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur le segment $[0,1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On pose $X = \{f \in E \ , \ \forall x \in [0,1], f(x) > 0\}$.

1 On considère la norme infinie $||.||_\infty$ sur E.

a. Déterminer $\mathring{X}$. On pourra utiliser l'exemple traité de la fiche précédente.

b. Déterminer $\overline{X}$.

2 On considère la norme 1, $||.||_1$ sur E. Montrer que $\mathring{X} = \varnothing$. On pourra, pour toute fonction f de X, considérer la suite de fonctions $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où, pour tout entier $n \geq 1$:

$$h_n : x \mapsto \begin{cases} 2f(1)(1-nx) & \text{si } x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 28.1 **1** a. Que dire de l'intérieur d'un ensemble ouvert ?

b. Montrer que $\overline{X} = Y = \{f \in E \ , \ \forall x \in [0,1], f(x) \geq 0\}$.

Solutions des exercices

EXERCICE 28.1

1 On considère la norme infinie $||.||_\infty$ sur E.

a. On a vu dans la fiche précédente que X était un ouvert. On en déduit que $\mathring{X} = X$.

b. Soit $Y = \{f \in E \ , \ \forall x \in [0,1], f(x) \geq 0\}$. Montrons que $\overline{X} = Y$.

- Soit $f \in Y$. Montrons qu'il existe une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de X telle que $(g_n) \longrightarrow f$ (la convergence étant entendue au sens de la norme $||.||_\infty$). Il suffit de poser pour tout entier n, $g_n = f + \frac{1}{n+1}$. En effet, pour tout $x \in [0,1]$, $g_n(x) = f(x) + \frac{1}{n+1} \geq \frac{1}{n+1} > 0$ donc $g_n \in X$. De plus $||g_n - f||_\infty = \frac{1}{n+1}$ donc $(g_n) \longrightarrow f$. Cela montre que $f \in \overline{X}$ et donc $Y \subset \overline{X}$.
- Réciproquement, montrons que si $f \in \overline{X}$ alors $f \in Y$. Soit $f \in \overline{X}$, il existe par caractérisation séquentielle une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X telle que $(g_n) \longrightarrow f$.
  Soit $x \in [0,1]$, par définition de la norme infinie, $|g_n(x) - f(x)| \leq ||g_n - f||_\infty$. Cela implique que $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(x) = f(x)$. Comme, pour tout entier n, $g_n(x) > 0$, par passage à la limite, $f(x) \geq 0$. On en déduit que $f \in Y$.

Finalement, $\overline{X} = Y = \{f \in E \ , \ \forall x \in [0,1], f(x) \geq 0\}$.

2 On considère la norme 1, $||.||_1$ sur E. Montrons que $\mathring{X} = \varnothing$. Soit $f \in X$, montrons que $f \notin \mathring{X}$. Pour cela il suffit d'exhiber, pour tout $\delta > 0$ une fonction g_δ qui appartient à la boule de centre f et de rayon δ mais qui n'est pas dans X.

La fonction h_n de l'énoncé est construite pour que $h_n(0) = 2f(1)$ de telle sorte que $g_n = f - h_n$ vérifie $g_n(0) = -f(1) < 0$ et donc $g_n \notin X$. De plus $||f - g_n||_1 = ||h_n||_1$. Or

$$||h_n||_1 = \int_0^1 |h_n| = \int_0^{\frac{1}{n}} 2f(1)(1-nx)dx = 2f(1)\left[-\frac{(1-nx)^2}{n}\right]_0^{\frac{1}{n}} = \frac{f(1)}{n}$$

Soit $\delta > 0$ fixé, on peut trouver un entier n assez grand tel que $\frac{f(1)}{n} < \delta$. Pour un tel entier n, g_n est dans la boule de centre f et de rayon δ mais n'est pas dans X.

On a bien montré que $\mathring{X} = \varnothing$ pour la norme $||.||_1$.

Solutions

29 Montrer qu'une partie est dense dans un ensemble

Quand on ne sait pas !

On considère un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E muni d'une norme notée $||.||$.

Une partie X de E est dite dense (dans E) si l'adhérence de X est E en entier. On en déduit les deux caractérisations suivantes

- La partie X est dense dans E si, pour tout $x \in E$ et tout $\delta > 0$, $B(x, \delta) \cap X \neq \varnothing$.
- La partie X est dense dans E si, pour tout $x \in E$ il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de X telle que $\lim(x_n) = x$.

Que faire ?

Pour montrer que X est dense dans E la plupart du temps on utilise une des deux caractérisations ci-dessus.

- On considère un élément x quelconque dans E. On fixe $\delta > 0$ arbitrairement petit et on cherche à exhiber un élément de $B(x, \delta) \cap X$, c'est-à-dire un élément de X tel que $||x - y|| < \delta$.

  EXEMPLE 1 Montrons par exemple que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $\delta > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{10^N} \leq \delta$ car $\lim\limits_{N \to +\infty} \frac{1}{10^N} = 0$. On considère $y = \dfrac{\lfloor 10^N x \rfloor}{10^N}$ l'approximation décimale de x à 10^{-N} près par défaut. Par définition, y est rationnel car décimal.

  De plus on a l'encadrement : $y \leq x < y + \frac{1}{10^N}$. Cela implique que $|x - y| < \frac{1}{10^N} \leq \delta$. On a bien trouvé un élément y de $\mathbb{Q}$ tel que $|x - y| < \delta$.

  Cela montre que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

- On considère un élément x quelconque dans E. On construit une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de X telle que $\lim(x_n) = x$.

  EXEMPLE 2 On peut réécrire la preuve du fait que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ avec cette méthode. Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $x_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ l'approximation décimale de x à 10^{-n} près par défaut. Par construction, (x_n) est une suite de rationnels et pour tout entier n, $|x - x_n| < \frac{1}{10^n}$. On en déduit que $\lim(x_n) = x$.

Pour tout élément x de $\mathbb{R}$, on a déterminé une suite $(x_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim(x_n) = x$, ce qui montre que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$

Conseils

Comme on vient de le voir, il y a deux méthodes classiques pour montrer la densité d'une partie dans un espace vectoriel. Il ne faut pas hésiter à réfléchir aux deux méthodes pour voir laquelle est la plus simple à mettre en œuvre.

Exemple traité

Soit $n \geq 1$. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On note $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1 **a.** Soit T une matrice triangulaire supérieure de la forme suivante :

$$T = \begin{pmatrix} \mu_1 & * & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \mu_1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \mu_r & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \mu_r \end{pmatrix}$$

Montrer que l'on peut trouver une suite $(T_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de matrices triangulaires supérieures à coefficients diagonaux deux à deux distincts telle que $\lim\limits_{p\to+\infty} T_p = T$.

b. En déduire que $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

2 Montrer que $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ n'est pas dense dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

SOLUTION

1 **a.** On reprend les notations suggérées dans l'énoncé. Notons, pour tout i compris entre 1 et r, m_i le nombre de valeurs propres égales à μ_i. On veut construire une suite $(T_p)_{p\geq 0}$ de matrices triangulaires supérieures à coefficients diagonaux deux à deux distincts telle que $\lim(T_p) = T$. Il suffit donc de « séparer » les éventuels coefficients diagonaux qui seraient égaux.

On commence en considérant α le minimum des $|\mu_i - \mu_j|$ où $i \neq j$ et on pose pour tout entier $p \geq 0$, $T_p = T + \Delta_p$ où

$$\Delta_p = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{n(p+1)} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \frac{m_1\alpha}{n(p+1)} & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \frac{\alpha}{n(p+1)} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \frac{m_r\alpha}{n(p+1)} \end{pmatrix}$$

Les coefficients diagonaux de T_p sont alors

$$\mu_1 + \frac{\alpha}{n(p+1)}, \mu_1 + \frac{2\alpha}{n(p+1)}, \cdots, \mu_1 + \frac{m_1\alpha}{n(p+1)}, \cdots, \mu_r + \frac{m_r\alpha}{n(p+1)}$$

Il sont deux à deux distincts car, si on considère deux coefficients diagonaux qui proviennent d'un même μ_i : $\mu_i + \frac{a\alpha}{n(p+1)}$ et $\mu_i + \frac{b\alpha}{n(p+1)}$ alors la différence entre les deux vaut $\frac{(b-a)\alpha}{n(p+1)}$ qui n'est pas nul. D'autre part, si on considère deux coefficients qui proviennent de deux « blocs » différents $\mu_i + \frac{a\alpha}{n(p+1)}$ et $\mu_j + \frac{b\alpha}{n(p+1)}$ avec $i \neq j$, alors leur différence vaut $\mu_i - \mu_j + \frac{(a-b)\alpha}{n(p+1)}$ qui n'est pas nul car, par construction

$$\left|\frac{(a-b)\alpha}{n(p+1)}\right| \leq \frac{(n-1)\alpha}{n} < \alpha \leq |\mu_i - \mu_j|$$

Cela montre que, pour tout entier p, T_p a n valeurs propres deux à deux distinctes. De plus, en considérant par exemple la norme infinie, $||\Delta_p||_\infty \leq \dfrac{\alpha}{p+1}$ donc $\lim(T_p) = T$.

b. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On veut déterminer une suite $(M_p)_{p\geq 0}$ une suite de matrices diagonalisables telle que $\lim(M_p) = M$. On profite que le corps de base soit $\mathbb{C}$ pour trigonaliser la matrice. Soit $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}MP = T$ soit triangulaire supérieure. Quitte à modifier P on peut supposer que les valeurs propres de T (c'est-à-dire les coefficients diagonaux) qui sont égales soient cote à cote. Elle est donc de la forme de la matrice T de la question précédente.

On vient alors de voir qu'il existe une suite $(T_p)_{p\geq 0}$ de matrices triangulaires supérieures à coefficients diagonaux deux à deux distincts telle que $\lim(T_p) = T$. Pour tout entier naturel p, T_p est diagonalisable et donc on peut poser $M_p = PT_pP^{-1}$ qui est encore une matrice diagonalisable.

Le fait que $(T_p) \longrightarrow T$ nous assure que $(M_p) \longrightarrow PTP^{-1} = M$ car $A \mapsto PAP^{-1}$ est une application linéaire sur un espace vectoriel de dimension finie, elle est donc continue.

On en déduit que $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

2 Pour montrer que $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ n'est pas dense dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, il suffit de déterminer une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle qu'il existe $\delta > 0$ vérifiant que $B(M,\delta) \cap \mathcal{D}_2(\mathbb{R}) = \varnothing$. C'est-à-dire que dans un voisinage de cette matrice il n'y ait aucune matrice diagonalisable.

Pour cela on va considérer une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ n'ayant aucune valeur propre réelle. Par exemple $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Il est clair que $\chi_M = X^2 + 1$ n'a pas de racines réelles. On va montrer qu'au voisinage de M cela va encore être le cas. Travaillons pour la norme infinie. Soit $M' = M + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ alors

$$\chi'_M = \begin{vmatrix} X-a & 1-b \\ -1-c & X-d \end{vmatrix} = X^2 - (a+d)X + (1 + ad - bc - b + c)$$

Le discriminant de ce polynôme est $\Delta = (a+d)^2 - 4(1+ad-bc-b+c)$. C'est un polynôme en les quatre variables a, b, c et d qui vaut -4 quand $a = b = c = d = 0$. On en déduit, par continuité, qu'il existe $\delta > 0$ tel que si $\max\{|a|, |b|, |c|, |d|\} < \delta$ alors $|\Delta - (-4)| \leq 2$ et donc $\Delta \leq -2 < 0$.

Cela signifie que pour $M' \in B(M,\delta)$ alors $\chi_{M'}$ n'a pas de racines réelles et donc M' n'est pas diagonalisable (sur $\mathbb{R}$).

Finalement, $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ n'est pas dense dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercices

EXERCICE 29.1

Soit $n \geq 1$.

1 Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2 En déduire que si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors :

$$\forall x \in \mathbb{K},\ \det(xI_n - AB) = \det(xI_n - BA)$$

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 29.1

1 Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pourra considérer une suite $(M_p)_{p\geq 0}$ définie par $M_p = M - \alpha_p I_n$ où α_p sera bien choisi.

2 Commencer par traiter le cas où A est inversible

EXERCICE 29.1

1 Montrons que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Notons que, comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes et que la densité ne dépend donc pas du choix de la norme. Nous travaillerons avec la norme infinie. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On considère son spectre qui est fini. Il existe donc un élément $\theta > 0$ tel que tout éventuel élément λ non nul du spectre de M vérifie $|\lambda| \geq \theta$. Cela signifie que pour tout $x \in]0, \theta[$, x n'est pas une valeur propre de M. On pose alors pour tout entier p, $M_p = M - \alpha_p I_n$ où $\alpha_p = \dfrac{\theta}{p+1}$. Par définition de θ, α_p n'est pas une valeur propre de M donc M_p est inversible.

De plus, pour tout entier naturel p, $||M_p - M||_\infty = \alpha_p ||I_n||_\infty = \alpha_p$.

De ce fait $\lim\limits_{p \to +\infty} ||M_p - M||_\infty = 0$, ce qui implique $\lim(M_p) = M$.

On a bien exhibé une suite d'éléments de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ qui converge vers M et ce, pour tout élément M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ donc $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2 Soit $x \in \mathbb{K}$.

- On suppose que A est inversible. Dans ce cas,

$$\det(xI_n - AB) = \det(xAA^{-1} - AB) = \det(A)\det(xA^{-1} - B)$$

de même

$$\det(xI_n - BA) = \det(xA^{-1}A - BA) = \det(xA^{-1} - B)\det(A)$$

On obtient le résultat voulu par commutativité du produit dans $\mathbb{K}$.

- Dans le cas général, on considère une suite $(A_p)_{p \geq 0}$ de matrices inversibles telle que $\lim(A_p) = A$. Une telle suite existe par densité de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Comme les applications $A \mapsto \det(xI_n - AB)$ et $A \mapsto \det(xI_n - BA)$ sont continues car polynomiales en les coordonnées de la matrice A,

$$\det(xI_n - AB) = \lim_{p \to \infty} \det(xI_n - A_pB) = \lim_{p \to \infty} \det(xI_n - BA_p) = \det(xI_n - BA)$$

C'est ce que l'on voulait.

Montrer qu'une application est continue 30

Quand on ne sait pas !

On considère deux espaces vectoriels normés $(E, ||.||_E)$ et $(F, ||.||_F)$ ainsi qu'une partie X de E et une fonction $f : X \to F$

- Soit $a \in X$, la fonction f est dite continue en a, si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in X, ||x - a||_E \leq \eta \Rightarrow ||f(x) - f(a)||_F \leq \varepsilon$$

- La fonction f est dite continue si elle est continue en tout point a de X.

Rappelons la définition des fonctions lipschitziennes

- Soit $k \in \mathbb{R}_+$, la fonction f est dite k-lipschiztienne si

$$\forall (x, y) \in X^2, ||f(x) - f(y)||_F \leq k\,||x - y||_E$$

- La fonction f est dite lipschitzienne si elle est k-lipschitzienne pour un certain réel positif k.
- Si f est lipschitzienne alors elle est continue.

Rappelons aussi la caractérisation séquentielle de la continuité

Soit $a \in X$. Il y a équivalence entre les deux assertions suivantes

i) La fonction f est continue en a.
ii) Pour toute suite $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ si $\lim(x_n) = a$ alors $\lim(f(x_n)) = f(a)$

Que faire ?

- Dans la très grande majorité des cas on ne devra pas utiliser les méthodes détaillées dans cette fiche. En particulier si la fonction f est linéaire (voir fiche 32) ou si la fonction f est polynomiale (voire fiche 33)
- On peut essayer de montrer que la fonction f est k-lipschitzienne, pour cela il suffit, étant donné deux éléments x et y de E de majorer $||f(x) - f(y)||_F$ en fonction de $||x - y||_E$.
- On peut utiliser la caractérisation séquentielle de la continuité. On considère une suite $(x_n)_{n \geq \mathbb{N}}$ qui converge vers un élément a quelconque et on essaye de démontrer que la suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $f(a)$.

- Si on veut montrer qu'une fonction f n'est pas continue, on essaye souvent de mettre en défaut la caractérisation séquentielle. De ce fait, pour montrer que f n'est pas continue, on détermine une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X tendant vers un élément a telle que la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ **ne tend pas** vers $f(a)$.

Exemple traité

On considère l'espace vectoriel E des fonctions continues définies sur $[0,1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On note h une fonction quelconque de E et on considère $T_h : E \to E$ la fonction définie par

$$T_h : f \mapsto f + h$$

1 Montrer que T_h est 1-lipschitizienne de $(E, ||.||_\infty)$ dans $(E, ||.||_\infty)$ et en déduire que T_h est continue.

2 Justifier que T_h n'est pas continue de $(E, ||.||_1)$ dans $(E, ||.||_\infty)$. On pourra considérer la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\begin{array}{rccc} f_n : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} 1 - nx & \text{si } x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

SOLUTION

1 Soit f, g deux éléments de E,

$$||T_h(f) - T_h(g)||_\infty = ||(f+h) - (g+h)||_\infty = ||f - g||_\infty$$

Cela prouve que T_h est 1-lipschitizienne de $(E, ||.||_\infty)$ dans $(E, ||.||_\infty)$. Elle est donc continue.

2 On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par

$$\begin{array}{rccc} f_n : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} 1 - nx & \text{si } x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

On remarque que, pour tout entier $n \geq 1$, f_n est continue car $\lim\limits_{x \to \frac{1}{n}} 1 - nx = 0$.

Montrons alors que la suite (f_n) tend vers la fonction nulle notée $\tilde{0}$ pour $||.||_1$. En effet, pour $n \geq 1$,

$$||f_n - \tilde{0}||_1 = ||f_n||_1 = \int_0^{\frac{1}{n}} (1 - nx)\, dx = \left[-\frac{(1-nx)^2}{2n} \right]_0^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2n}$$

On a bien $||f_n - \tilde{0}||_1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Montrons alors que $(T_h(f_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne tend pas vers $T_h(\tilde{0}) = h$ pour $||.||_\infty$ pour justifier que T_h n'est pas continue de $(E, ||.||_1)$ dans $(E, ||.||_\infty)$. Il suffit de voir que pour $n \geq 1$,

$$||T_h(f_n) - T_h(\tilde{0})||_\infty = ||(f_n + h) - h||_\infty = ||f_n||_\infty = |f_n(0)| = 1$$

On a bien montré que T_h n'est pas continue de $(E, ||.||_1)$ dans $(E, ||.||_\infty)$.

Exercices

EXERCICE 30.1

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considère la fonction g définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} & \text{si } x \neq y \\ f'(x) & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

1 Soit $a = (\alpha, \beta)$ avec $\alpha \neq \beta$.

a. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^2$. On pose pour tout entier naturel n, $u_n = (x_n, y_n)$. Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers a alors, à partir d'un certain rang, x_n n'est jamais égal à y_n.

b. Montrer que g est continue en a.

2 Soit $a = (\alpha, \alpha)$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^2$ qui tend vers a. On pose encore pour tout entier naturel n, $u_n = (x_n, y_n)$.

a. On suppose que pour tout entier naturel n, $x_n \neq y_n$.
Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} g(u_n) = f'(\alpha)$

b. On suppose que pour tout entier naturel n, $x_n = y_n$.
Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} g(u_n) = f'(\alpha)$

3 Montrer que g est continue.

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 30.1

1 a. On pourra considérer la suite $(x_n - y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b. Utiliser la caractérisation séquentielle de la continuité.

2 a. On pourra utiliser le théorème des accroissements finis.

3 Ramener l'étude du cas général aux cas précédents à l'aide de suites extraites.

EXERCICE 30.1

1 **a.** La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $a=(\alpha,\beta)$ donc la suite $(x_n-y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\alpha-\beta$ qui n'est pas nul. Il existe donc $N\in\mathbb{N}$ tel que pour tout entier naturel n, dès que n est supérieur à N alors $x_n\neq y_n$.

b. Montrons que g est continue en a en utilisant la caractérisation séquentielle de la continuité. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^2$ telle que $(u_n)\to a$. En reprenant les notations de la question précédente, pour tout entier n tel que $n\geq N$, $x_n\neq y_n$ donc $g(u_n)=\dfrac{f(x_n)-f(y_n)}{x_n-y_n}$.

Maintenant comme f est de classe $\mathcal{C}^1$, elle est continue donc $(f(x_n))\to f(\alpha)$ et $(f(y_n))\to f(\beta)$ et ainsi $(g(u_n))\longrightarrow \dfrac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta}=g(a)$.

Ceci étant vrai **pour toute suite** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers a, par la caractérisation séquentielle de la limite, g est continue en a.

2 **a.** La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ donc, d'après le théorème des accroissements finis, pour tout entier naturel n, comme $x_n\neq y_n$, il existe c_n compris entre x_n et y_n tel que

$$g(u_n)=\frac{f(x_n)-f(y_n)}{x_n-y_n}=f'(c_n)$$

Maintenant quand n tend vers $+\infty$, $(x_n)\to\alpha$ et $(y_n)\to\alpha$. Par théorème d'encadrement, on obtient que $(c_n)\to\alpha$.
La fonction f' étant continue, $\lim\limits_{n\to+\infty} g(u_n)=f'(\alpha)$.

b. Pour tout entier naturel n, $g(u_n)=f'(c_n)$. Comme $(c_n)\to\alpha$ et que f' est continue, $\lim\limits_{n\to+\infty} g(u_n)=f'(\alpha)$.

3 Soit (u_n) une suite quelconque d'éléments de $\mathbb{R}^2$ tendant vers a. Si $a=(\alpha,\beta)$ avec $\alpha\neq\beta$, on a déjà démontré que $\lim\limits_{n\to+\infty} g(u_n)=g(a)$.

Si $a=(\alpha,\alpha)$. On pose encore pour tout entier naturel n, $u_n=(x_n,y_n)$. On considère alors les deux ensembles suivants :

$$I=\{n\in\mathbb{N}\ ,\ x_n=y_n\}\text{ et }J=\{n\in\mathbb{N}\ ,\ x_n\neq y_n\}$$

- Si I est fini et si on pose N son plus grand élément, on se ramène au cas de la question 1 en considérant $(u_n)_{n>N}$. De même, si J est fini, on peut se ramener au cas de la question 2.
  On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} g(u_n)=f'(\alpha)$.

- Si on suppose que les deux ensembles I et J sont infinis, on peut étudier les deux suites $(v_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et $(w_p)_{p\in\mathbb{N}}$ extraites de (u_n) telles que $(v_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est composée des termes u_n quand $n \in I$ et $(w_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est composée des termes u_n quand $n \in J$.

  D'après la question précédente, les suites $(g(v_p))_{p\in\mathbb{N}}$ et $(g(w_p))_{p\in\mathbb{N}}$ tendent toutes les deux vers $f'(\alpha)$. Comme I, J forment une partition de $\mathbb{N}$, la suite $(g(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $f'(\alpha)$.

Dans tous les cas, $\lim\limits_{n\to+\infty} g(u_n) = f'(\alpha) = g(a)$.

En utilisant la caractérisation séquentielle de la continuité, on obtient que g est continue en tout point a de $\mathbb{R}^2$ et donc que g est continue.

31 Montrer qu'une partie est ouverte (ou fermée) avec une fonction continue

Quand on ne sait pas !

Soit $(E\,,\,\|\cdot\|_E)$ et $(F\,,\,\|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés et f une fonction définie sur partie A de E et à valeurs dans F. Alors :

> Les assertions suivantes sont équivalentes :
>
> - L'application f est continue.
> - L'image réciproque de tout ouvert U de F est un ouvert relatif de A.
> - L'image réciproque de tout fermé X de F est un fermé relatif de A.

Que faire ?

- Pour montrer qu'une U de A est un ouvert (relatif), il suffit de trouver une application continue $f : A \to F$ (où la plupart du temps F sera le corps de base) et X un ouvert de F tels que $U = f^{-1}(X)$. On peut faire de même pour montrer qu'une partie est un fermé (relatif).

Conseils

Voici les types de fonctions continues à connaitre :

- Les applications polynomiales sur $\mathbb{K}^n$ à valeurs réelles.
- Les fonctions lipschitziennes.
- Les formes linéaires sur un espace vectoriel de dimension finie.
- Pour p un entier naturel supérieur ou égal à 2, toute application multilinéaire (linéaire par rapport à chacune de ses p variables) $f : (\mathbb{K}^n)^p \to \mathbb{K}$. En particulier, le déterminant est une application continue.

Exemple traité

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et u une forme linéaire sur E. Montrer que $\operatorname{Ker}(u)$ est un fermé de E.

SOLUTION

L'application u est une forme linéaire sur un espace vectoriel de dimension finie donc u est continue et on a :

$$\operatorname{Ker}(u) = \{x \in E\,,\ u(x) = 0\} = u^{-1}(\{0\})$$

Comme le singleton $\{0\}$ est un fermé alors $\operatorname{Ker}(u)$ est un fermé.

Exercices

EXERCICE 31.1

On considère $\mathbb{R}[X]$ muni de la norme $||.||$ définie par

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], ||P|| = \sup_{t\in[0,1]} |P(t)|$$

On ne demande pas de justifier que c'est une norme.

Montrer que $F = \left\{P \in \mathbb{R}[X],\ \int_0^1 P(t)\mathrm{d}t > 1\right\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}[X]$.

EXERCICE 31.2

Montrer que l'ensemble des matrices non inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

EXERCICE 31.3

Montrer que l'ensemble des matrices orthogonales $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 31.1	Considérer $f : P \mapsto \int_0^1 P(t)\mathrm{d}t$.
EXERCICE 31.2	Penser à utiliser le déterminant.
EXERCICE 31.3	Considérer l'application $M \mapsto {}^tMM$.

EXERCICE 31.1

Posons $f : P \mapsto \displaystyle\int_0^1 P(t)\mathrm{d}t$. L'application f est linéaire. On remarque que pour tout polynôme P,

$$|f(P)| = \left|\int_0^1 P(t)\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^1 |P(t)|\mathrm{d}t \leq \int_0^1 ||P||\mathrm{d}t \leq ||P||$$

Cela implique que f est continue car lipschitzienne.
Comme $F = f^{-1}(]1, +\infty[)$ et que $]1, +\infty[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$, F est un ouvert de $\mathbb{R}[X]$.

EXERCICE 31.2

Notons A l'ensemble des matrices non inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a :

$$A = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \det(M) = 0\}$$

Le déterminant étant une application continue (car multilinéaire), on obtient le résultat.

EXERCICE 31.3

Considérons $\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $\Phi : M \mapsto {}^tMM$. Cette application est continue car c'est la composée de $M \mapsto ({}^tM, M)$ qui est continue car linéaire et de $(A, B) \mapsto AB$ qui est continue car bilinéaire (on travaille sur un espace vectoriel de dimension finie). On aurait aussi pu dire que chaque coefficient de $\Phi(M)$ est un polynôme en les coefficients de M.
Comme $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \Phi^{-1}(\{I_n\})$ est que le singleton $\{I_n\}$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on obtient que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer qu'une application linéaire est continue

Quand on ne sait pas !

Soit $(E, ||.||_E)$ et $(F, ||.||_F)$ deux espaces vectoriels normés.

On considère une application **linéaire** $f : E \to F$.

- Si E est un espace vectoriel de dimension finie alors f est **toujours** continue.
- Dans le cas général, l'application f est continue si et seulement s'il existe un réel positif K tel que
$$\forall x \in E, ||f(x)||_F \leq K||x||_E$$

Que faire ?

- Si l'espace vectoriel E est de dimension finie. Il n'y a rien à faire ; une application linéaire est **toujours** continue.
- Dans le cas où E n'est pas de dimension finie, la méthode consiste à majorer $||f(x)||_F$ où x est un vecteur de E en fonction de $||x||_E$. De ce fait, on peut supposer que x est un vecteur unitaire de E et majorer $||f(x)||_F$.
- Toujours dans le cas où E n'est pas de dimension finie, pour montrer que f **n'est pas** continue, il faut montrer que l'ensemble $\left\{\dfrac{||f(x)||_F}{||x||_E}\ ,\ x \neq 0\right\}$ n'est pas majoré.

  La plupart du temps, on exhibe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs non nuls de E telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{||f(x_n)||_F}{||x_n||_E} = +\infty$. Pour ce faire, on cherche cette suite de telle sorte que $(||x_n||_E)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée et $(||f(x_n)||_F)_{n\in\mathbb{N}}$ tende vers $+\infty$ ou de telle sorte que $(||x_n||_E)_{n\in\mathbb{N}}$ tende vers 0 et que $(||f(x_n)||_F)_{n\in\mathbb{N}}$ soit minorée par un réel non nul.

Conseils

Dans le cas où E n'est pas de dimension finie, toutes les normes sur E ne sont pas équivalentes. Il faut donc faire attention à la norme que l'on veut étudier ; la continuité de la fonction f dépend des normes $||.||_E$ et $||.||_F$.

Exemple traité

On considère $E = \mathbb{R}[X]$ et $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ définie par

$$\varphi : P \mapsto P(0)$$

On considère sur E deux normes N_1 et N_2 définies par

$$\forall P \in E, N_1(P) = \sup_{t\in[0,1]} |P(t)| \text{ et } N_2(P) = \sup_{t\in[1,2]} |P(t)|$$

1 Montrer que φ est continue de (E, N_1) dans $(\mathbb{R}, |.|)$.

2 Montrer que φ n'est pas continue de (E, N_2) dans $(\mathbb{R}, |.|)$.

3 Soit N un entier naturel, la restriction de φ à $\mathbb{R}_N[X]$ est-elle continue de $(\mathbb{R}_N[X], N_2)$ dans $(\mathbb{R}, |.|)$?

SOLUTION

1 Soit $P \in E$,

$$|\varphi(P)| = |P(0)| \leq \sup_{t\in[0,1]} |P(t)| = N_1(P)$$

On en déduit que φ est 1-lipschitzienne et continue de (E, N_1) dans $(\mathbb{R}, |.|)$.

2 Pour montrer que φ n'est pas continue de (E, N_2) dans $(\mathbb{R}, |.|)$ on va construire une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E telle que $(|\varphi(P_n)|)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ et $(N_2(P_n))_{n\in\mathbb{N}}$ reste bornée. On peut par exemple prendre la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $P_n = (X-2)^n$. En effet, $|\varphi(P_n)| = |P_n(0)| = |(-2)^n| = 2^n$. De plus, pour $t \in [1, 2]$ on a $(t-2) \in [-1, 0]$, on en déduit que $|P_n(t)| \leq 1$. Cela implique que $N_2(P_n) \leq 1$. Finalement, $\dfrac{|\varphi(P_n)|}{N_2(P_n)} \geq 2^n$.

Cela montre que φ n'est pas continue de (E, N_2) dans $(\mathbb{R}, |.|)$.

3 Soit N un entier naturel, $\mathbb{R}_N[X]$ est de dimension finie donc l'application linéaire $\varphi : \mathbb{R}_N[X] \to \mathbb{R}$ est continue de $(\mathbb{R}_N[X], N_2)$ dans $(\mathbb{R}, |.|)$.

Exercices

EXERCICE 32.1

Soit C l'espace vectoriel des fonction $\mathcal{C}^\infty$ de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales définies de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ et, pour tout entier p, E_p l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré au plus p définies de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. On note D l'endomorphisme de C défini par $D : f \mapsto f'$. On note encore D la restriction de cet endomorphisme à E et à E_p.

1 Soit $p \in \mathbb{N}$ et N une norme sur E_p. L'endomorphisme $D : (E_p, N) \to (E_p, N)$ est-il continu ?

2 Montrer que si N est une norme de C alors D n'est pas continu de (C, N) dans (C, N).

3 On considère la norme 1 sur E notée $||.||_1$ et définie par

$$\left\|\sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k\right\|_1 = \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|$$

où les sommes ci-dessus sont finies car on considère des fonctions polynomiales. L'endomorphisme $D : (E, ||.||_1) \to (E, ||.||_1)$ est-il continu ?

4 Soit $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. On admet que $N : E \to \mathbb{R}$ définie par

$$N : \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \longmapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k |a_k|$$

est une norme sur E. Déterminer une suite $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $D : (E, N) \to (E, N)$ soit continu.

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 32.1

1 Il suffit de connaitre le cours.

2 Penser aux vecteurs propres de l'endomorphisme D.

3 Calculer, par exemple, pour tout entier n, $||D(X^n)||_1$.

4 Commencer en déterminant une condition sur la suite $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ pour que la suite $\left(\dfrac{N(D(X^n))}{N(X^n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée.

Solutions des exercices

EXERCICE 32.1

1 Soit $p \in \mathbb{N}$, l'espace E_p est de dimension finie. L'application D est linéaire. Elle est donc continue.

2 On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $f_n : t \mapsto e^{nt}$. On a alors pour tout entier naturel n , $D(f_n) = nf_n$ et donc $\dfrac{N(D(f_n))}{N(f_n)} = n$. Cela implique que $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{N(D(f_n))}{N(f_n)} = +\infty$. L'endomorphisme D n'est pas continu.

3 On pose pour tout entier naturel n, on considère $P_n = X^n$. On a alors

$$||P_n||_1 = 1 \text{ et } ||D(P_n)||_1 = ||nX^{n-1}||_1 = n$$

Cela implique encore que $\lim_{n\to+\infty} \frac{||D(P_n)||_1}{||P_n||_1} = +\infty$. L'endomorphisme D n'est pas continu.

4 Nécessairement si D est continu de (E, N) dans (E, N) la suite $\left(\frac{N(D(X^n))}{N(X^n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ doit être bornée. Or, pour tout entier n,

$$N(X^n) = \alpha_n \text{ et } N(D(X^n)) = N(nX^{n-1}) = n\alpha_{n-1}$$

avec la convention $\alpha_{-1} = 1$ par exemple. On veut donc que la suite $\left(\frac{n\alpha_{n-1}}{\alpha_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée. On peut penser à la suite définie par

$$\alpha_0 = 1 \text{ et } \forall n \geq 1, \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} = \frac{1}{n}$$

La relation de récurrence, peut aussi s'écrire, $\forall n \geq 1, \alpha_n = n\alpha_{n-1}$. On reconnait la suite des factorielles.

Posons donc $(\alpha_n)_{n\in N}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_n = n!$. Montrons maintenant que l'endomorphisme $D : (E, N) \to (E, N)$ est continu.

Soit $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ un élément de E, $D(P) = \sum_{k=1}^{d} k a_k X^{k-1}$. On a donc

$$N(P) = \sum_{k=0}^{d} k!|a_k| \text{ et } N(D(P)) = \sum_{k=1}^{d} k(k-1)!|a_k| = \sum_{k=1}^{d} k!|a_k|$$

Cela implique que pour tout élément P de E, $N(D(P)) \leq N(P)$. L'endomorphisme D est 1-lipschitzien dont continu.

Utiliser une fonction polynomiale en ses coordonnées

33

Quand on ne sait pas !

- Soit f une fonction de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}$. On dit que f est un monôme s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ et $(i_1, \ldots, i_n) \in \mathbb{N}^n$ tels que

$$f : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \lambda x_1^{i_1} \times \cdots \times x_n^{i_n}$$

- Une fonction f de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}$ est dite polynomiale, si c'est une combinaison linéaire (finie) de monômes.

On peut généraliser à tout espace vectoriel de dimension finie. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. On note $e_1^*, \ldots, e_n^*$ les formes linéaires coordonnées et $\pi : E \to \mathbb{K}^n$ définie par

$$\begin{array}{rccc} \pi : & E & \to & \mathbb{K}^n \\ & x & \mapsto & (e_1^*(x), \ldots, e_n^*(x)) \end{array}$$

C'est la fonction qui associe à tout vecteur de E ses coordonnées dans la base E.

Une fonction f de E dans $\mathbb{K}$ est dite polynomiale en ses coordonnées si elle peut s'écrire $f = \pi \circ g$ où $\pi : E \to \mathbb{K}^n$ est l'application ci-dessus et g est un polynôme.

Que faire ?

L'intérêt principal des fonctions polynomiales en les coordonnées est que ce sont des fonctions continues.

Précisément, soit E et G deux espaces vectoriels de dimension finie. Soit f une fonction de E dans G. Soit $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{G} = (g_1, \ldots, g_p)$ des bases de E et de G. Si pour tout i compris entre 1 et p, $g_i^* \circ f$ est polynomiale en ses coordonnées alors f est continue.

On peut noter que le fait qu'une fonction f de E dans G soit polynomiale en ses coordonnées ne dépend pas du choix des bases car les formules de changement de bases sont linéaires.

EXEMPLE 1 On considère la fonction déterminant det : $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$.
C'est une fonction polynomiale en les coordonnées en effet pour $M = (m_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$, $\det(M) = \sum\limits_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) m_{1\sigma(1)} \times \cdots \times m_{n\sigma(n)}$. On en déduit que c'est une fonction continue.

De ce fait, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ car c'est l'image réciproque de l'ouvert $\mathbb{K}\setminus\{0\}$ par l'application det.

Exemple traité

1 Justifier que l'application $M \mapsto \chi_M$ qui associe à une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ son polynôme caractéristique est continue.

2 Montrer que l'application $\varphi : \mathbb{C}[X]\times\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui associe au couple (P, M) la matrice $P(M)$ est continue.

3 Montrer que, pour toute matrice M diagonalisable, on a $\chi_M(M) = 0$.

4 En déduire que pour toute les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\chi_M(M) = 0$. On pourra admettre que l'ensemble des matrices complexes diagonalisables est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

SOLUTION

1 Par définition $\chi_M(X) = \det(XI_n - M)$. On note $M = (m_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ et on pose pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{ij} = \begin{cases} -m_{ij} & \text{si } i \neq j \\ X - m_{ii} & \text{sinon} \end{cases}$. La formule du déterminant donne alors que

$$\chi_M = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)a_{1\sigma(1)} \times \cdots \times a_{n\sigma(n)}$$

En développant le membre de droite on obtient que tous les coefficients du polynôme χ_M sont polynomiaux en les coordonnées de M.
Cela signifie que la fonction $M \mapsto \chi_M$ est polynomiale en les coordonnées de M et de ce fait elle est continue.

2 Soit k un entier naturel et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, d'après les formules du produit matriciel, les coefficients de M^k sont des polynômes en les coefficients de M. On en déduit que si P est un polynôme alors les coefficients de $P(M)$ sont des polynômes en les coefficients de M et les coefficients de P. Cela implique que φ est continue.

3 Soit M une matrice diagonalisable, il existe une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $M = PDP^{-1}$. Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les coefficients diagonaux de D. On sait alors que M et D ont le même polynôme caractéristique :

$$\chi_M = \chi_D = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i)$$

La matrice D étant diagonale,

$$\chi_M(D) = \begin{pmatrix} \chi_M(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \chi_M(\lambda_n) \end{pmatrix} = 0$$

Maintenant, comme χ_M est un polynôme que l'on peut écrire $\chi_M = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$ et que pour tout entier naturel k, $M^k = (PDP^{-1})^k = PD^kP^{-1}$,

$$\chi_M(M) = \sum_{k=0}^{n} a_k M^k = P\left(\sum_{k=0}^{n} a_k M^k\right)P^{-1} = P\chi_M(D)P^{-1} = 0$$

4 On a vu que $M \mapsto \chi_M$ était continue, cela implique que $\theta : M \mapsto (\chi_M, M)$ est continue. De ce fait, la fonction $\varphi \circ \theta : M \mapsto (\chi_M, M) \mapsto \chi_M(M)$ est continue.

L'ensemble des matrices diagonalisables est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ donc, comme $\varphi \circ \theta$ est continue et nulle sur une partie dense, c'est la fonction nulle. Finalement, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a $\chi_M(M) = 0$.

Exercices

EXERCICE 33.1

1 Justifier que la fonction qui, à toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, associe sa comatrice notée $\mathrm{Com}(M)$ est continue.

2 En déduire que l'application $M \mapsto M^{-1}$ de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ dans lui même est continue.

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 33.1

1 Justifier que chaque coefficient de $\mathrm{Com}(M)$ est polynomial en les coordonnées de M.

2 Exprimer M^{-1} en fonction de $\mathrm{Com}(M)$.

Solutions des exercices

EXERCICE 33.1

1 Par définition, chaque coefficient de $\mathrm{Com}(M)$ est le déterminant d'une sous-matrice de M. Cela implique que ce coefficient est polynomial en les coordonnées de M. De ce fait $M \mapsto \mathrm{Com}(M)$ est continue.

2 On sait que si M est inversible alors $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)}\,{}^t\mathrm{Com}(M)$.

L'application $M \mapsto \mathrm{Com}(M)$ est continue d'après la question précédente, l'application $A \mapsto {}^tA$ est continue car linéaire et $M \mapsto \frac{1}{\det(M)}$ est continue car le déterminant est polynomial en les coordonnées de M. Finalement $M \mapsto \frac{1}{\det(M)}\,{}^t\mathrm{Com}(M) = M^{-1}$ est continue.

34 Montrer qu'une partie est compacte

Quand on ne sait pas !

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

- Un sous-ensemble K de E est compact si pour toute suite (x_n) d'éléments de K, il existe une sous-suite $(x_{\varphi}(n))_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge (dans K).
- Si E est de dimension finie. Une partie K est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.

Que faire ?

- Il est important de vérifier si l'espace ambiant est de dimension finie. Si c'est le cas (ce qui est le plus fréquent), pour montrer qu'une partie K est compacte, on montre qu'elle est fermée et bornée.
- Dans le cadre d'un espace qui n'est pas de dimension finie, il arrive que l'on cherche à prouver qu'une partie K **n'est pas** compacte (même si elle est fermée bornée). Dans ce cas, on exhibe une suite (x_n) d'éléments de K dont aucune sous-suite ne converge.

Conseils

- Quand l'espace E est de dimension finie, on peut montrer que K est borné en utilisant la norme de E qui semble la plus appropriée.
- Il faut savoir qu'en dimension finie, les boules fermées et les sphères fermées sont des compacts.

Exemple traité

On dit qu'une matrice carrée est stochastique si ses coefficients appartiennent à $[0, 1]$ et si la somme des coefficients de chacune de ses lignes vaut 1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{S}$, constitué des matrices stochastiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, est un compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pourra utiliser la norme suivante de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\forall A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \|A\| = \sum_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}|$$

SOLUTION

On commence par remarquer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie.
Montrons que S est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $(A_k)_{k\geq 0}$ une suite d'éléments de S convergeant vers $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrons que A appartient à $\mathcal{S}$. Notons pour tout $k \geq 0$, $A_k = (a_{i,j}^k)$. Par convergence composante par composante, on a pour tout couple $(i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2$,

$$\lim_{k \to +\infty} a_{i,j}^k = a_{i,j}$$

Or les matrices A_k appartiennent à $\mathcal{S}$ donc tous les coefficients $a_{i,j}^k$ appartiennent à $[0,1]$ et par passage à la limite, $a_{i,j} \in [0,1]$. De plus, pour tout entier $k \geq 0$ et tout entier i appartenant à $\{1, \ldots, n\}$,

$$\sum_{p=1}^{n} a_{i,p}^k = 1$$

Donc par passage à la limite quand k tend vers $+\infty$:

$$\sum_{p=1}^{n} a_{i,p} = 1$$

On en déduit que A appartient à $\mathcal{S}$. Ainsi, $\mathcal{S}$ est fermé.

Pour toute matrice $A = (a_{i,j})$ de $\mathcal{S}$, on a :

$$\begin{aligned}
\|A\| &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \\
&= \sum_{i=1}^{n} 1 \\
&= n
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{S}$ est borné (il est inclus dans la sphère de centre la matrice nulle et de rayon n).

On en déduit que S est un compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercices

EXERCICE 34.1 Soit $n \geq 1$. Montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

EXERCICE 34.2 On considère l'espace E des applications continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme infinie. Montrer que la boule unité de E, notée B, n'est pas compacte. On pourra considérer la suite $(f_n) \in B^{\mathbb{N}}$ définie par

$$f_n : t \mapsto t^n$$

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 34.1 Montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est fermé et borné. On pourra utiliser l'exercice 3 de la fiche 31.

EXERCICE 34.2 Que dire de la limite, pour la norme infinie, d'une suite de fonctions continues ?

Solutions des exercices

EXERCICE 34.1 On commence par remarquer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie. On a vu dans la fiche 31 que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est fermé (car c'est l'image réciproque du singleton $\{I_n\}$ par l'application $M \mapsto {}^tMM$). Il suffit donc de montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est borné. On considère par exemple la norme 2 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), ||M||_2 = \sqrt{\mathrm{Tr}({}^tMM)}$$

où $M = (m_{ij})_{(i,j)\in[1,n]}$. Pour toute matrice M dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$,

$$||M||_2 = \sqrt{\mathrm{Tr}({}^tMM)} = \sqrt{\mathrm{Tr}(I_n)} = \sqrt{n}$$

On en déduit que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est borné. C'est donc un compact.

EXERCICE 34.2 On considère la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $f_n : t \mapsto t^n$. Remarquons que pour tout entier naturel n,

$$||f_n||_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |t^n| = 1$$

Les fonctions f_n sont bien des fonctions de la boule unité de E.

Supposons par l'absurde que B soit compacte. On peut alors extraire de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite extraite $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergente où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante. Notons f la limite de la suite extraite. La fonction f est une fonction continue sur $[0,1]$. Cependant, comme la suite de fonctions $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f, elle converge aussi simplement. De ce fait, pour tout $t \in [0,1[$,

$$f(t) = \lim_{n\to+\infty} t^{\varphi(n)} = 0$$

et $f(1) = \lim\limits_{n\to+\infty} 1^{\varphi(n)} = 1$. La fonction f est donc

$$f : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette fonction n'est pas continue. C'est donc absurde, puisque la suite $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas dans B. Ainsi, B n'est pas compacte.

Solutions

35 Utiliser la compacité. Lien avec les applications continues

Quand on ne sait pas !

- Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et K une partie compacte de E. Par définition, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à valeurs dans K alors on peut extraire une sous-suite convergente de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés. Soit f une application continue de E dans F et K une partie compacte de E, l'image directe $f(K)$ est un compact de F.
- En particulier, dans le cas où $F = \mathbb{R}$, cela signifie que la fonction f est bornée sur K et atteint ses bornes.

Que faire ?

- On peut montrer qu'un ensemble est un compact en montrant que c'est l'image d'un compact connu par une application continue.
- Quand on cherche à justifier qu'une fonction atteint un maximum ou un minimum, on peut vérifier que la fonction est continue et qu'elle est définie sur un compact.

Exemple traité

Soit $(E, ||.||)$ un espace vectoriel de dimension finie et f une fonction continue de E dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists r \in \mathbb{R}_+, \forall x \in E, ||x|| > r \Rightarrow f(x) \geq M$$

1. Justifier qu'il existe un réel positif r tel que pour tout élément x qui n'est pas dans la boule fermée de centre 0_E et de rayon r, $f(x) \geq f(0_E)$.
2. En déduire que f admet un minimum global.

SOLUTION

1. Il suffit d'utiliser l'hypothèse avec $M = f(0_E)$. En effet, il existe alors $r \in \mathbb{R}_+$ tel que si x n'est pas dans boule fermée de centre 0_E et de rayon r, notée $\overline{B}(0_E, r)$, alors $||x|| > r$ et donc $f(x) \geq M = f(0_E)$.

2 La boule fermée de centre 0_E et de rayon r est une partie fermée et bornée de E. Elle est donc compacte. Comme f est continue, d'après le théorème des bornes atteintes, il existe α dans cette boule tel que

$$f(\alpha) = \min_{x \in \overline{B}(0_E, r)} f(x)$$

On en déduit alors en particulier que $f(\alpha) \leq f(0_E) = M$ car $0_E \in \overline{B}(0_E, r)$.
Finalement α est bien un minimum global car pour tout y dans E :

- Si $y \in \overline{B}(0_E, r)$, $f(\alpha) = \min_{x \in \overline{B}(0_E, r)} f(x) \leq f(y)$.
- Si $y \notin \overline{B}(0_E, r)$, $f(\alpha) \leq M \leq f(y)$.

On peut, par exemple, appliquer cela à l'application $\mathbb{C} \to \mathbb{R}_+$ définie par $z \mapsto |P(z)|$ où P est un polynôme de degré au moins 1.

Exercices

EXERCICE 35.1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que la suite $(A^p)_{p \in \mathbb{N}}$ est bornée. On considère une norme N sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et une autre norme $||.||$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1 Justifier que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ l'application $\Phi : M \mapsto N(MX)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{R}$ est continue.

2 En déduire que $(\Phi(A^p))_{p \in \mathbb{N}}$ est bornée.

3 Montrer que toutes les valeurs propres de A sont de module inférieur ou égal à 1.

EXERCICE 35.2

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et K un compact de E. Soit f une fonction de K dans K telle que

$$\forall (x, y) \in K^2, ||f(x) - f(y)|| < ||x - y||$$

On considère aussi

$$\varphi : \begin{array}{ccc} K & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ||f(x) - x|| \end{array}$$

1 Montrer que φ est continue.

2 Montrer que pour $x \in K$, si $\varphi(x) \neq 0$ alors $\varphi(f(x)) < \varphi(x)$.

3 En déduire que f admet un point fixe puis que ce point fixe est unique.

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 35.1

1 Utiliser le fait que Φ est la composée de deux fonctions continues.

2 Montrer qu'il existe un compact K de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que pour tout entier naturel p, $A^p \in K$.

3 Pour une valeur propre λ de A, utiliser ce qui précède pour un vecteur propre X associé à λ.

EXERCICE 35.2

1 Commencer en justifiant que f est continue

2 Utiliser la propriété de f.

3 Considérer x_0 tel que $\varphi(x_0) = \min\limits_{x\in K} \varphi(x)$.

Solutions des exercices

EXERCICE 35.1

1 L'application $M \mapsto MX$ est linéaire et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est un espace vectoriel de dimension finie donc elle est continue. La fonction N est aussi continue donc Φ est continue comme composée de deux fonctions continues.

2 Soit $R > 0$ tel que pour tout entier naturel p, $||A^p|| \leq R$. On pose $K = \overline{B}(0_E, R)$ la boule fermée de centre 0_E et de rayon R. C'est un compact car elle est fermée et bornée (l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est de dimension finie). L'application Φ est donc bornée sur K et finalement la suite $(\Phi(A^p))_{p\in\mathbb{N}}$ est bornée.

3 Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur propre (non nul) associé à λ. Pour tout entier naturel p, $A^pX = \lambda^pX$. Cela implique que $N(A^pX) = |\lambda|^pN(X)$ et finalement $|\lambda|^p = \dfrac{\Phi(A^p)}{N(X)}$. La suite $(|\lambda|^p)_{p\in\mathbb{N}}$ est bornée puisque la suite $(\Phi(A_p))_{p\in\mathbb{N}}$ l'est et donc $|\lambda| \leq 1$ (si $|\lambda| > 1$ alors la suite $(|\lambda|^p)_{p\in\mathbb{N}}$ ne serait pas bornée car elle tendrait vers $+\infty$).

EXERCICE 35.2

1 La fonction f est continue car elle est 1-lipschitzienne. On en déduit que $f - \mathrm{id}_K$ est continue puis que φ aussi par composition car $x \mapsto ||x||$ est continue.

2 Soit $x \in K$ tel que $\varphi(x) \neq 0$ ce qui signifie que $f(x) \neq x$. On a, par propriété de φ :

$$\varphi(f(x)) = ||f(f(x)) - f(x)|| < ||f(x) - x|| = \varphi(x)$$

3 La fonction φ est une fonction continue sur un compact. Elle est donc bornée et atteint ses bornes. Il existe donc x_0 tel que $\varphi(x_0) = \min\limits_{x\in K} \varphi(x)$. Supposons par l'absurde

que $\varphi(x_0) > 0$. D'après la question précédente, $\varphi(f(x_0)) < \varphi(x_0)$ ce qui contredit l'hypothèse faite sur x_0.
Cela montre que $\varphi(x_0) = 0$ ce qui signifie que $f(x_0) = x_0$; le point x_0 est un point fixe de f.
Supposons qu'il existe un autre point fixe y_0 de f, la propriété de f permet d'écrire :

$$||x_0 - y_0|| = ||f(x_0) - f(y_0)|| < ||x_0 - y_0||$$

ce qui est absurde.
La fonction f possède donc un unique point fixe.

Solutions

36 Montrer qu'un ensemble est connexe par arcs

Quand on ne sait pas !

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé et X une partie de E. Soit x et y deux éléments de X, un chemin de x à y dans X est une application continue $\gamma : [0,1] \to X$ telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$.

- Une partie X de E est dite connexe par arcs, si pour tout couple $(x, y) \in X^2$, il existe un chemin de x à y.
- Soit f une application continue d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|_E)$ dans un espace vectoriel normé $(F, \|\cdot\|_F)$. Si X est une partie connexe par arcs de E alors $f(X)$ est connexe par arcs.

Que faire ?

- Pour montrer qu'une partie X est connexes par arcs, on considère deux éléments de X et on construit un chemin de x à y.
- Une méthode pour montrer qu'une partie X n'est pas connexe par arcs et de trouver une application continue $f : E \to F$ telle que $f(X)$ ne soit pas connexe par arcs.
- Il faut savoir que les ensembles convexes sont connexes par arcs. En particulier les intervalles de $\mathbb{R}$ sont connexes par arcs.
- Par contre $\mathbb{R}^*$ n'est pas connexe par arcs. En effet, soit $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $\gamma(0) = -1$ et $\gamma(1) = 1$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in]0,1[$ tel que $\gamma(c) = 0$. Cela montre que γ n'est pas un chemin à valeurs dans $\mathbb{R}^*$.

Exemple traité

Soit $Y = \{z_1, \dots, z_p\}$ un ensemble fini de nombres complexes. On note $X = \mathbb{C} \setminus Y$ son complémentaire. On veut montrer que X est connexe par arcs, on considère donc x_0 et x_1 dans X et on cherche à construire un chemin γ de x_0 à x_1 dans X.
Pour tout nombre complexe z on note $M(z)$ le point d'affixe z.

1. Justifier qu'il existe un réel positif R tel que $\max\{|x_0|, |x_1|, |z_1|, \dots, |z_p|\} < R$.
2. Justifier qu'il existe un nombre complexe x_0' de module R tel que les affixes complexes des points du segment $[M(x_0)M(x_0')]$ appartiennent à X.

3 Construire un chemin de x_0 à x_1 dans X et conclure.

SOLUTION

1 L'ensemble $\{|x_0|, |x_1|, |z_1|, \ldots, |z_p|\}$ est un ensemble fini. Il a donc un plus grand élément noté α. On peut prendre $R = \alpha + 1$.

2 Pour tout i compris entre 1 et p, on considère la droite Δ_i passant par les points $M(x_0)$ et $M(z_i)$. Cette droite coupe le cercle de centre O et de rayon R en au plus deux points. L'ensemble des points M du cercle de centre O et de rayon R tels qu'il existe un point $M(z_i)$ sur le segment $[M(x_0)M]$ contient donc au plus $2p$ éléments. On peut donc considérer un point M sur ce cercle tel que les affixes complexes des points du segment $[M(x_0)M]$ sont dans X puisque Y est de cardinal fini. Il ne reste plus qu'à noter x'_0 l'affixe complexe de M.

3 On peut de même construire un complexe x'_1 de module R tel que les affixes complexes des points du segment $[M(x_1)M(x'_1)]$ appartiennent à X. Si on pose $x'_0 = Re^{i\theta_0}$ et $x'_1 = Re^{i\theta_1}$ on peut construire les chemins

$$\gamma_1 : t \mapsto tx'_0 + (1-t)x_0 \ ; \ \gamma_2 : t \mapsto Re^{it\theta_1 + (1-t)i\theta_0} \ ; \ \gamma_3 : t \mapsto tx_1 + (1-t)x'_1$$

Le chemin γ_1 est, par construction, un chemin de x_0 à x'_0 dans X, le chemin γ_2 est, un chemin de x'_0 à x'_1 dans X, car pour tout z dans Y, $|z| < R$ et le chemin γ_3 est un chemin de x'_1 à x_1 dans X. En concaténant ces trois chemins, on obtient un chemin de x_0 à x_1 dans X.

Cela prouve que X est connexe par arcs.

Exercices

EXERCICE 36.1

1 Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs.

2 **a.** Soit A, B dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, montrer que l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $\varphi : t \mapsto \det(tB + (1-t)A)$ ne s'annule qu'en un nombre fini de valeurs.

b. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 36.1

1 Utiliser l'application déterminant.

2 **a.** Montrer que φ est polynomiale.

b. On pourra utiliser l'exercice traité en exemple.

EXERCICE 36.1

1 On considère l'application déterminant : det : $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. C'est une application continue car polynomiale. On remarque que $\det(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})) = \mathbb{R}^*$ et que $\mathbb{R}^*$ n'est pas connexe par arcs. Cela implique que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ ne l'est pas non plus.

2 **a.** Soit A, B dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Comme l'application det est polynomiale, l'application φ est polynomiale. De plus $\varphi(0) = \det(A) \neq 0$ ce n'est donc par le polynôme nul. Elle s'annule en un nombre fini de valeurs.

b. Soit A, B dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. On considère l'application φ comme ci-dessus. On note $Y = \{z_1, \ldots, z_p\}$ les complexes tels que $\varphi(z_i) = 0$ (l'entier naturel p est éventuellement égal à 0). On pose $X = \mathbb{C} \setminus Y$. Comme A et B sont dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, 0 et 1 appartiennent à X qui est connexe par arcs d'après l'exercice traité en exemple. Notons γ un chemin de 0 à 1 dans X et posons $h : [0,1] \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par

$$h : t \mapsto \gamma(t)B + (1 - \gamma(t))A$$

Comme γ est continue, h est continue. De plus $h(0) = A$ car $\gamma(0) = 0$ et $h(1) = B$ car $\gamma(1) = 1$.

Pour finir, pour tout t dans $[0,1]$, $\gamma(t) \in X$ et donc $\det(h(t)) = \varphi(\gamma(t)) \neq 0$ car $\gamma(t) \in X$. Cela montre que h est un chemin de A à B dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Finalement $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.


Algèbre
bilinéaire

Montrer qu'une application est un produit scalaire

Quand on ne sait pas !

La notation E désigne un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension finie ou non.
Un produit scalaire est une application $\phi\colon E \times E \to \mathbb{R}$ vérifiant :

- (symétrie) $\forall (x, y) \in E^2$, $\phi(x, y) = \phi(y, x)$
- (linéarité à gauche) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall (x_1, x_2, y) \in E^3$

$$\phi(\lambda x_1 + x_2, y) = \lambda \phi(x_1, y) + \phi(x_2, y)$$

- (linéarité à droite) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall (x, y_1, y_2) \in E^3$

$$\phi(x, \lambda y_1 + y_2) = \lambda \phi(x, y_1) + \phi(x, y_2)$$

- (positivité) $\forall x \in E$, $\phi(x, x) \geqslant 0$
- (caractère défini) $\forall x \in E$, $\phi(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0$

EXEMPLE 1

Soient $(X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$, $(X, Y) \to X^T Y$, où X^T désigne la transposée de la matrice X, définit le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Que faire ?

- Pour montrer qu'une application est un produit scalaire, il n'y a pas d'autre façon que de vérifier scrupuleusement les 5 points énoncés ci-dessus.
- Lorsque le produit scalaire est défini par une intégrale, le caractère défini s'obtient en utilisant le théorème énonçant qu'une fonction continue et positive sur un intervalle est d'intégrale nulle sur cet intervalle si, et seulement si, cette fonction est nulle sur cet intervalle.
- Lorsqu'un produit scalaire est défini sur un espace vectoriel de polynômes par une intégrale, le caractère défini s'obtient en utilisant le fait que le seul polynôme admettant une infinité de racines est le polynôme nul.

Conseils

- En pratique, la linéarité à droite (respectivement à gauche) est toujours la conséquence de la symétrie et de la linéarité à gauche (respectivement à droite). On parle de bilinéarité.
- Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, l'application $(A, B) \mapsto \mathrm{Tr}(A^T B)$ (où A^T est la transposée de A) désigne le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La symétrie et la linéarité à droite s'obtienne d'après les propriétés de la trace. Pour prouver le caractère défini et la positivité, il faut passer par les coefficients de A.

Exemple traité

Soit $n \geqslant 2$, on pose $E = \mathbb{R}_n[X]$ et pour $P, Q \in E$, on pose $\phi(P, Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\mathrm{d}t$. Montrer que ϕ définit un produit scalaire sur E.

SOLUTION

On vérifie les axiomes.
La fonction polynomiale $t \mapsto P(t)Q(t)$ est à valeurs réelles donc $\phi(P, Q)$ est un réel, ϕ est donc bien une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$.
Le produit de polynômes étant commutatif, il est clair que $\phi(P, Q) = \phi(Q, P)$ ce qui prouve le caractère symétrique.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $P_1, P_2, Q \in E$

$$\begin{aligned}
\phi(\lambda P_1 + P_2, Q) &= \int_{-1}^{1} (\lambda P_1(t) + P_2(t))\, Q(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_{-1}^{1} (\lambda P_1(t)Q(t) + P_2(t)Q(t))\, \mathrm{d}t \\
&= \lambda \int_{-1}^{1} P_1(t)Q(t)\mathrm{d}t + \int_{-1}^{1} P_2(t)Q(t)\mathrm{d}t \\
&= \lambda\phi(P_1, Q) + \phi(P_2, Q)
\end{aligned}$$

ce qui établit la linéarité à gauche. Par symétrie, ϕ est également linéaire à droite.
Soit $P \in E$, $\phi(P, P) = \int_{-1}^{1} P(t)^2\mathrm{d}t \geqslant 0$ comme intégrale d'une fonction positive.
Enfin, comme $t \mapsto P(t)^2$ est continue et positive sur $[-1, 1]$, si elle est d'intégrale nulle, cela signifie que c'est la fonction nulle sur $[-1, 1]$. Par conséquent, $t \mapsto P(t)$ est la fonction polynomiale identiquement nulle sur $[-1, 1]$. C'est donc un polynôme admettant une infinité de racines, il s'agit donc du polynôme nul. Ainsi on prouve le caractère défini.
En conclusion, ϕ définit un produit scalaire sur E.

Exercices

EXERCICE 37.1

Soient $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, on définit l'application

$$\phi\colon (P,Q) \mapsto \sum_{k=1}^{n} P^{(k)}(1)Q^{(k)}(1)$$

montrer que c'est un produit scalaire.

➲ Source : D'après CCP PSI

EXERCICE 37.2

On note E l'espace vectoriel des fonctions de classe C^1 de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour $(f,g) \in E^2$, on note

$$\phi(f,g) = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt$$

Montrer que ϕ est un produit scalaire sur E.

➲ Source : D'après IMT MP

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 37.1 Pour le caractère défini, utiliser le lien entre la multiplicité de la racine d'un polynôme et ses dérivées successives.

EXERCICE 37.2 Il faut vérifier les 5 propriétés qui définissent un produit scalaire. La réelle difficulté concerne le caractère défini. Pour ce dernier on remarque qu'une somme de quantité positives égale à 0 implique que chaque terme est nul ce qui permet de prouver que $f' = 0$ sur $[0,1]$ et que $f(0) = 0$.

Solutions des exercices

EXERCICE 37.1

Soit $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, comme $P^{(k)}(1)$ et $Q^{(k)}(1)$ sont des réels ainsi $\phi(P,Q) \in \mathbb{R}$, par suite, ϕ est bien une application de $\mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}$.
Le produit de nombres réels étant commutatif, on trouve facilement que $\phi(P,Q) = \phi(Q,P)$ ce qui établit la symétrie.

Solutions

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $P_1, P_2, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, $k \in [\![0, n]\!]$, par linéarité de la dérivation et de l'évaluation en 1, $(\lambda P_1 + P_2)^{(k)}(1) = \lambda P_1^{(k)}(1) + P_2^{(k)}(1)$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\phi(\lambda P_1 + P_2, Q) &= \sum_{k=0}^{n} (\lambda P_1 + P_2)^{(k)}(1) Q^{(k)}(1) \\ &= \lambda \sum_{k=0}^{n} P_1^{(k)}(1) Q^{(k)}(1) + \sum_{k=0}^{n} P_2^{(k)}(1) Q^{(k)}(1) \\ &= \lambda \phi(P_1, Q) + \phi(P_2, Q)\end{aligned}$$

ce qui prouve la linéarité à gauche. Par symétrie, on obtient également la linéarité à droite. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\phi(P, P) = \sum\limits_{k=0}^{n} \left(P^{(k)}(1)\right)^2 \geqslant 0$ comme somme de termes positifs. Par suite,

$$\phi(P, P) = 0 \Rightarrow \forall k \in [\![0, n]\!] \quad P^{(k)}(1) = 0$$

ainsi, 1 est une racine au moins $(n+1)$-ième de P, or P est un polynôme de degré au plus n, par conséquent, P est le polynôme nul ce qui prouve le caractère défini.
En résumé, ϕ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

EXERCICE 37.2

Soient $(f, g) \in E^2$, l'application $\phi(f, g) = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)\mathrm{d}t$ est symétrique par commutativité du produit de deux nombres réels.
En exploitant la linéarité de la dérivation et de l'intégration, on a, pour $f_1, f_2, g \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\phi(\lambda f_1 + f_2, g) &= \lambda f_1(0)g(0) + f_2(0)g(0) + \lambda \int_0^1 f_1'(t)g'(t)\mathrm{d}t + \int_0^1 f_2'(t)g'(t)\mathrm{d}t \\ &= \lambda \phi(f_1, g) + \phi(f_2, g)\end{aligned}$$

ce qui prouve la linéarité à gauche, et de part son caractère symétrique, la linéarité à droite. Soit maintenant $f \in E$, $\phi(f, f) \geqslant 0$ comme somme de quantités positives et dès lors, si $\phi(f, f) = 0$ alors :

$$\left\{\begin{array}{c} f(0) = 0 \\ \int_0^1 f'(t)^2 \mathrm{d}t = 0 \end{array}\right.$$

Dès lors, $t \mapsto f'^2(t)$ est une fonction positive, continue dont l'intégrale sur $[0, 1]$ est nulle, par conséquent $f' = 0$ sur cet intervalle. On en déduit donc que f est constante sur $[0, 1]$ d'où, pour tout $t \in [0, 1]$, $f(t) = f(0) = 0$. On établit ainsi que ϕ est une forme définie positive ce qui achève de prouver qu'elle définit un produit scalaire.

Déterminer le projeté orthogonal sur un sous-espace vectoriel de dimension finie

38

Quand on ne sait pas !

La notation E désigne un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension finie ou non muni d'un produit scalaire. Lorsque E sera de dimension finie, on posera $\dim E = n$.

- Un endomorphisme p vérifiant la relation $p \circ p = p$ est appelé un projecteur et on a l'égalité $\operatorname{Ker}(p - Id) = \operatorname{Im}(p)$ avec de plus $E = \operatorname{Ker}(p) \oplus \operatorname{Im}(p)$.
- À toute décomposition $E = F \oplus G$ sont associés deux projecteurs. Le projecteur p sur G (c'est-à-dire $\operatorname{Im}(p) = G$) parallèlement à F (c'est-à-dire $\operatorname{Ker}(p) = F$) et le projecteur q sur F (c'est-à-dire $\operatorname{Im}(q) = F$), parallèlement à G (c'est-à-dire $\operatorname{Ker}(q) = G$).
  On a de plus $q = \operatorname{id} - p$.
- Si E est muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, si p est un projecteur symétrique alors la somme $\operatorname{Ker}(p) \oplus \operatorname{Im}(p)$ est orthogonale. On dit que p est un projecteur orthogonal. Réciproquement, si $E = F \oplus G$ avec $F^{\perp} = G$ alors les projecteurs associés sont orthogonaux.

  EXEMPLE 1 Dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure euclidienne canonique, l'application π_1 définie par

  $$\forall X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \quad \pi_1(X) = (x_1, 0)$$

  s'appelle première projection coordonnée. C'est un projecteur orthogonal.
- Soit F un sous-espace vectoriel de E et $x \in E$. La distance de x à F, notée $d(x, F)$ est égale à $d(x, y)$, où y désigne le projeté orthogonal de x sur F :

  $$d(x, F) = \min_{z \in F} d(x, z) = d(x, y) = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$$

Que faire ?

- Soit $x \in E$ sur F, on exhibe une base orthonormée $(f_1, \ldots, f_p)$ de F, le projeté orthogonal y de x sur F est alors donné par la formule :

  $$y = \sum_{i=1}^{p} \langle x, f_i \rangle f_i$$

- On peut déterminer une base $(f_1, \dots, f_p)$ de F, et poser $(a_1, \dots, a_p)$ les coordonnées de y dans cette base. Dès lors, $x-y$ étant orthogonal à chacun des f_i, on calcule $\langle x-y, f_i\rangle = 0$ ce qui fournit une équation en les $(a_1, \dots, a_p)$. On obtient ainsi un système de p équations à p inconnues à résoudre.
- On peut déterminer une base orthonormée $(f_1, \dots, f_p)$ de F et calculer le projeté orthogonal de x sur chacune des droites engendrées par les f_i : $\langle x, f_i\rangle\, f_i$. Le projeté est alors $y = \sum_{i=1}^{p} \langle x, f_i\rangle\, f_i$.
- Soit $x \in E$ et y sont projeté orthogonal sur un sous-espace vectoriel F.
D'après le théorème de Pythagore, $\langle x-y, y\rangle = 0$, d'où $\langle x-y, x-y\rangle = \langle x-y, y\rangle$ donc

$$d(x,y) = \sqrt{\langle x-y, y\rangle} \quad \text{et} \quad ||x-y||^2 = ||x||^2 - ||y||^2$$

ce qui simplifie les calculs, notamment lorsque l'exercice demande le calcul du carré de la norme.

Conseils

- Lorsque F est un sous-espace vectoriel de dimension $n-1$, il est plus pratique de calculer le projeté orthogonal sur $F^\perp$ qui est une droite. En effet, si u est un vecteur directeur normé de $F^\perp$ alors le projeté orthogonal y de x sur F est donné par la formule :

$$y = x - \langle x, u\rangle\, u$$

- Pour F un sous-espace vectoriel de E, si $y \in F^\perp$ désigne le projeté orthogonal de x sur $F^\perp$ alors $d(x,F) = ||y||$.
- Soit $x \in E$. Lorsque $x \in F$ son projeté orthogonal sur F est lui-même.

Exemple traité

On munit $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ du produit scalaire $\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}(A^T B)$ où A^T désigne la transposé de A.

1 Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer la distance de M à $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ des matrices symétriques.

2 Soit H l'ensemble des matrices de trace nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et donner sa dimension.
Soit J la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1. Calculer la distance de J à H.

➲ Source : CCP MP

SOLUTION

1 L'espace $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ se décompose en la somme directe du sous-espace vectoriel des matrices symétriques et de celui des matrices antisymétriques (noté $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$). De plus, ces deux sous-espaces sont des supplémentaires orthogonaux car si S est symétrique et A antisymétrique,

$$\begin{aligned} 2\langle A, S\rangle = \langle A, S\rangle + \langle S, A\rangle &= \operatorname{Tr}(A^T S) + \operatorname{Tr}(S^T A) \\ &= -\operatorname{Tr}(AS) + \operatorname{Tr}(SA) = 0 \end{aligned}$$

ce qui prouve bien l'orthogonalité des deux sous-espaces. Par suite, l'écriture

$$M = \frac{1}{2}(M + M^T) + \frac{1}{2}(M - M^T) \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_3(\mathbb{R})$$

fournit la décomposition de M en somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique. Le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ est donc $p(M) = \frac{1}{2}(M^T + M)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} d(M, \mathcal{S}_3(\mathbb{R}))^2 = ||M - p(M)||^2 &= \langle M - p(M), M - p(M)\rangle \\ &= \langle M - p(M), M\rangle \\ &= \frac{1}{2}\langle M - M^T, M\rangle \\ &= \frac{1}{2}\operatorname{Tr}\left((M - M^T)^T M\right) \\ &= \frac{1}{2}\operatorname{Tr}\left((M^T - M)M\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\operatorname{Tr}(M^T M) - \operatorname{Tr}(M^2)\right) = 7 \end{aligned}$$

en conclusion, $d(M, \mathcal{S}_3(\mathbb{R})) = \sqrt{7}$.

2 Par définition, $H = \operatorname{Ker}(\operatorname{Tr})$, il s'agit donc d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et comme la trace n'est pas une forme linéaire nulle, $\dim H = n^2 - 1$.
On montre facilement que $\mathrm{Id} \in H^\perp$, en effet, pour $M \in H$, $\langle \mathrm{Id}, M\rangle = \operatorname{Tr}(M) = 0$. On pose alors $U = \frac{1}{||\mathrm{Id}||}\mathrm{Id} = \frac{1}{\sqrt{n}}\mathrm{Id}$ un vecteur directeur unitaire de $H^\perp$. Par suite, le projeté orthogonal de J sur $\operatorname{Vect}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\mathrm{Id}\right) = H^\perp$ vaut $\frac{1}{n}\langle \mathrm{Id}, J\rangle\,\mathrm{Id} = \mathrm{Id}$ donc

$$d(J, H)^2 = \left|\left|\frac{1}{n}\langle \mathrm{Id}, J\rangle\,\mathrm{Id}\right|\right|^2 = ||\mathrm{Id}||^2 = n$$

d'où $d(J, H) = \sqrt{n}$.

Exercices

EXERCICE 38.1 Pour $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $B = (b_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, on admet que

$$\phi(A,B) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}b_{ij}$$

défini un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Soit $\mathcal{H}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont la somme des coefficients est nulle et A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer la distance $d(A,\mathcal{H})$.

➲ Source : CCP PSI

EXERCICE 38.2 On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne canonique.

1. Soit H le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x - y + z = 0$. Déterminer le projeté orthogonal de $X \in \mathbb{R}^3$ sur l'orthogonal de H.
2. En déduire le projeté orthogonal de X sur H, puis la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur H.
3. Déterminer la matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale par rapport à H.

➲ Source : TPE PC

EXERCICE 38.3
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on considère $I_{a,b} = \int_0^1 (t\ln(t) - at - b)\mathrm{d}t$

1. Justifier que $I_{a,b}$ existe.
2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, justifier que $J_k = \int_0^1 t^k \ln(t)\mathrm{d}t$ existe et en calculer la valeur.
3. Calculer $\inf\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} I_{a,b}$.

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 38.1 On pourra montrer que $\mathcal{H}$ est le noyau d'une forme linéaire pour en déduire qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de dimension $n^2 - 1$. L'orthogonal de $\mathcal{H}$ est alors une droite dirigée par la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1 qu'il suffit alors de normer. Enfin, on calculera le projeté orthogonal sur cette droite pour en déduire $d(A,\mathcal{H})$.

EXERCICE 38.2

1. L'équation de H fournit un vecteur directeur de son orthogonal qu'il suffit alors de normer pour en avoir une base orthonormée.
2. Si Y est le projeté orthogonal de X sur $H^\perp$ alors $X - Y$ est celui sur H.
3. La symétrie associée au projecteur de matrice P admet pour matrice $S = 2P - I$

EXERCICE 38.3

1. Remarquer que la fonction $t \mapsto t\ln(t)$ se prolonge par continuité en 0.
2. Remarquer que la fonction $t \mapsto t^k \ln(t)$ se prolonge par continuité en 0.
3. Reconnaitre qu'il s'agit du carré de la distance de $t\ln t$ à $\mathbb{R}_1[X]$ pour le produit scalaire $(f,g) \mapsto \int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t$ sur $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$.

Solutions des exercices

EXERCICE 38.1

Soit $M = (m_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $f(M) = \sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} m_{ij}$. On vérifie facilement que f est une forme linéaire non nulle et que $\mathcal{H} = \mathrm{Ker}(f)$ donc $\dim \mathcal{H} = n^2 - 1$. On pose alors J la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1. Il est clair que $J \in \mathcal{H}^\perp$, en effet pour $M \in \mathcal{H}$, $\phi(M,J) = \sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} m_{ij} = 0$. La norme de J vaut $\sqrt{\phi(J,J)} = n$ d'où $\mathcal{H}^\perp = \mathrm{Vect}\left(\frac{1}{n}J\right)$. On en déduit alors que le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{H}^\perp$ vaut $\phi\left(A, \frac{1}{n}J\right)\frac{1}{n}J = \frac{\phi(A,J)}{n^2}J$. Dès lors,

$$d(A,\mathcal{H})^2 = \phi\left(\frac{1}{n^2}\phi(A,J)J, \frac{1}{n^2}\phi(A,J)J\right) = \frac{1}{n^4}\phi(A,J)^2\phi(J,J) = \frac{1}{n^2}\phi(A,J)^2$$

d'où $d(A,\mathcal{H}) = \frac{1}{n}\left|\phi(A,J)\right| = \frac{1}{n}\left|\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}\right|$.

EXERCICE 38.2

1 Un vecteur orthogonal à H est $(1,-1,1)$ donc une base orthonormale de $H^\perp$ est donnée par $U = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)$. Ainsi, pour $X=(x,y,z) \in E$, le projeté orthogonal Y de X sur $H^\perp$ vaut

$$Y = \langle U, X\rangle\, U = \frac{x-y+z}{3}(1,-1,1)$$

2 Comme Y est le projeté orthogonal de X sur $H^\perp$, $X-Y$ est celui sur H, soit

$$\begin{aligned} X - Y &= (x,y,z) - \frac{x-y+z}{3}(1,-1,1) \\ &= \frac{1}{3}(2x+y-z, x+2y+z, -x+y+2z) \end{aligned}$$

en calculant l'image des trois vecteurs de la base canonique $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ et $(0,0,1)$, on en déduit que la matrice de la projection est :

$$P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3 En appliquant la formule reliant la matrice d'un projecteur à celle de la symétrie associée, on obtient :

$$S = 2P - I = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 38.3

1 La fonction $f : t \mapsto t\ln t$ prolongée par continuité par 0 en 0 est bien une fonction de $\mathrm{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ donc, pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $t \mapsto t\ln(t) - at - b$ est continue sur $[0,1]$ donc $I_{a,b}$ existe.

2 Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $t \mapsto t^k \ln(t)$ est prolongeable par continuité en 0 par la valeur 0 donc J_k existe. Les fonctions $t \mapsto \frac{t^{k+1}}{k+1}$ et $t \mapsto \ln(t)$ sont de classe C^1 sur $]0,1]$, intégrables sur $]0,1]$ et enfin comme $\lim\limits_{t\to 0} \frac{t^{k+1}}{k+1}\ln(t) = 0 = \lim\limits_{t\to 1} \frac{t^{k+1}}{k+1}\ln(t)$, on peut procéder par intégration par parties :

$$\begin{aligned} J_k &= \left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\ln(t)\right]_0^1 - \frac{1}{k+1}\int_0^1 t^k \mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{(k+1)^2} \end{aligned}$$

3 On utilise l'indication. Une base de $\mathbb{R}_1[X]$ est $(1, X)$, en notant $aX + b$ le projeté orthogonal de f sur $\mathbb{R}_1[X]$, on a $\langle f(t) - at - b, 1\rangle = 0 = \langle f(t) - at - b, t\rangle$ ce qui amène au système

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \int_0^1 (t\ln t - at - b)\mathrm{d}t & = 0 \\ \int_0^1 (t^2 \ln t - at^2 - bt)\mathrm{d}t & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} J_1 - a\int_0^1 t\mathrm{d}t - b\int_0^1 \mathrm{d}t & = 0 \\ J_2 - a\int_0^1 t^2\mathrm{d}t - b\int_0^1 t\mathrm{d}t & = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{4} - \frac{a}{2} - b & = 0 \\ -\frac{1}{9} - \frac{a}{3} - \frac{b}{2} & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (a,b) = \left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} I_{a,b} = \left|\left| f(t) - \frac{t}{6} + \frac{1}{3} \right|\right|^2 = ||f(t)||^2 - \left|\left|\frac{t}{6} - \frac{1}{3}\right|\right|^2$$

Par suite, comme $t \mapsto \ln^2(t)$ et $t \mapsto \dfrac{t^3}{3}$ sont de classe C^1 et intégrables sur $]0,1]$, $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t^3}{3}\ln^2(t) = 0 = \lim\limits_{t\to 1} \dfrac{t^3}{3}\ln^2(t)$ en procédant par intégration par parties :

$$||f||^2 = \int_0^1 t^2 \ln^2 t\mathrm{d}t = -\frac{2}{3}\int_0^1 t^2 \ln(t)\mathrm{d}t = -\frac{2}{3}J_2 = \frac{2}{27}$$

et

$$\begin{aligned} \left|\left|\frac{t}{6} - \frac{1}{3}\right|\right|^2 = \int_0^1 \left(\frac{t}{6} - \frac{1}{3}\right)^2 \mathrm{d}t &= \int_0^1 \left(\frac{t^2}{36} - \frac{t}{9} + \frac{1}{9}\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{108} - \frac{1}{18} + \frac{1}{9} \\ &= \frac{7}{108} \end{aligned}$$

On a alors, $\inf\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} I_{a,b} = \frac{2}{27} - \frac{7}{108} = \frac{1}{108}$.

Solutions

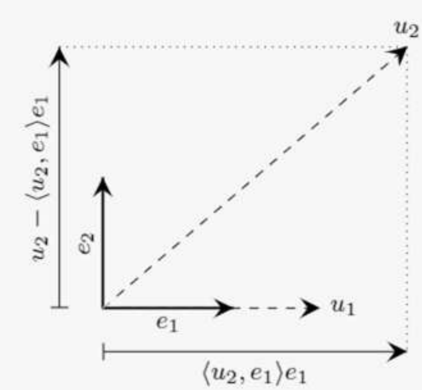
39 Mettre en place le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Quand on ne sait pas !

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel.

- **(Orthonormalisation de Gram-Schmidt – Cas particulier de 2 vecteurs)**
  Soit (u_1, u_2) une famille libre de E.
  Alors on peut transformer (u_1, u_2) en une famille orthonormale (e_1, e_2) de E en procédant de la manière suivante :
  $\hookrightarrow$ on normalise u_1 en posant $e_1 = \dfrac{u_1}{\|u_1\|}$,
  $\hookrightarrow$ on « orthogonalise » u_2 en lui ôtant sa composante selon e_1, qui vaut $\langle u_2, e_1\rangle e_1$. Le vecteur ainsi obtenu est orthogonal à e_1, il reste à le normaliser. C'est pourquoi on pose :

$$e_2 = \frac{u_2 - \langle u_2, e_1\rangle e_1}{\|u_2 - \langle u_2, e_1\rangle e_1\|}$$



Visualisation graphique

- **(Orthonormalisation de Gram-Schmidt - Cas général)**
  Soit n un entier naturel non nul et $(u_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille libre de E.
  Alors il existe une unique famille orthonormale $(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ telle que :

$$\begin{array}{rlrcl} (i) & \forall i \in [\![1,n]\!], & \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_i) & = & \mathrm{Vect}(u_1, \cdots, u_i) \\ (ii) & \forall i \in [\![1,n]\!], & (e_i, u_i) & \geq & 0 \end{array}$$

(pour l'unicité)

La famille $(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ se construit de proche en proche grâce aux formules suivantes :

$$e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} \qquad \text{et} \qquad \underset{(\text{si } n \geq 2)}{\forall i \in [\![2,n]\!]}, \ e_i = \frac{u_i - \displaystyle\sum_{k=1}^{i-1} \langle u_i, e_k\rangle e_k}{\left\| u_i - \displaystyle\sum_{k=1}^{i-1} \langle u_i, e_k\rangle e_k \right\|}$$

Que faire ?

Soit n un entier naturel non nul.

- Il faut bien comprendre géométriquement le cas particulier de $n = 2$ vecteurs.
  Après quoi, il sera plus facile de comprendre et d'assimiler le cas général d'un nombre n quelconque de vecteurs.

- Il faut s'entraîner à appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt dans des espaces vectoriels de référence divers et variés, parmi lesquels :

$$\mathbb{R}^n \quad , \quad \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad , \quad \mathbb{R}_n[X] \quad , \quad \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}) \quad , \quad \text{etc}\ldots$$

Conseils

- En cas de difficulté à comprendre le cas de deux vecteurs, il convient de revoir l'interprétation géométrique du produit scalaire en terme de projection.

- Il est conseillé de $\boxed{\text{TOUJOURS}}$ faire une figure pour développer l'intuition géométrique.

Exemple traité

On munit $\mathbb{R}_2[X]$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini par :

$$\forall (P,Q) \in (\mathbb{R}_2[X])^2, \quad \langle P, Q \rangle = \sum_{j=0}^{2} P(j)Q(j)$$

Déterminer une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$ relativement au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

SOLUTION

On considère la base canonique $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.
On applique à cette famille libre le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt pour obtenir une base orthonormée (e_1, e_2, e_3) :

$\hookrightarrow$ *Construction de e_1 :*

On normalise $u_1 = 1$ en posant :

$$e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\|1\|} \underset{\substack{\uparrow \\ \|1\| = \sqrt{3}}}{=} \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Fig. 1 : Construction de e_1

$\hookrightarrow$ *Construction de e_2 :*

On « orthogonalise » $u_2 = X$ en lui ôtant sa composante suivant le vecteur e_1 précédemment construit, puis on normalise le tout. Ainsi,

$$\begin{aligned} e_2 &= \frac{u_2 - \langle u_2, e_1\rangle e_1}{\|u_2 - \langle u_2, e_1\rangle e_1\|} \\ &= \frac{X - \langle X, \frac{1}{\sqrt{3}}\rangle \frac{1}{\sqrt{3}}}{\|X - \langle X, \frac{1}{\sqrt{3}}\rangle \frac{1}{\sqrt{3}}\|} \\ &\underset{\substack{\uparrow \\ \langle X, \frac{1}{\sqrt{3}}\rangle = \sqrt{3}}}{=} \frac{X-1}{\|X-1\|} \underset{\substack{\uparrow \\ \|X-1\| = \sqrt{2}}}{=} \frac{X-1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

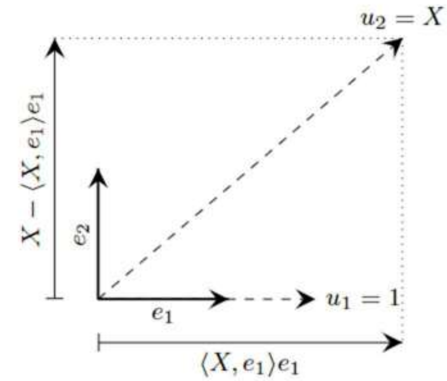


Fig. 2 : Construction de e_2

$\hookrightarrow$ *Construction de e_3 :*

On « orthogonalise » $u_3 = X^2$ en lui ôtant ses composantes suivant les vecteurs e_1 et e_2 précédemment construits, puis on normalise le tout. Ainsi,

$$\begin{aligned} e_3 &= \frac{u_3 - \langle u_3, e_1\rangle e_1 - \langle u_3, e_2\rangle e_2}{\|u_3 - \langle u_3, e_1\rangle e_1 - \langle u_3, e_2\rangle e_2\|} \\ &= \frac{X^2 - \langle X^2, \frac{1}{\sqrt{3}}\rangle \frac{1}{\sqrt{3}} - \langle X^2, \frac{X-1}{\sqrt{2}}\rangle \frac{X-1}{\sqrt{2}}}{\|X^2 - \langle X^2, \frac{1}{\sqrt{3}}\rangle \frac{1}{\sqrt{3}} - \langle X^2, \frac{X-1}{\sqrt{2}}\rangle \frac{X-1}{\sqrt{2}}\|} \\ &\underset{\substack{\uparrow \\ \langle X^2, \frac{1}{\sqrt{3}}\rangle = \frac{5}{\sqrt{3}} \\ \langle X^2, \frac{X-1}{\sqrt{2}}\rangle = 2\sqrt{2}}}{=} \frac{X^2 - 2X + \frac{1}{3}}{\|X^2 - 2X + \frac{1}{3}\|} \underset{\substack{\uparrow \\ \|X^2 - 2X + \frac{1}{3}\| = \frac{\sqrt{6}}{3}}}{=} \frac{1}{\sqrt{6}}\left(3X^2 - 6X + 1\right) \end{aligned}$$

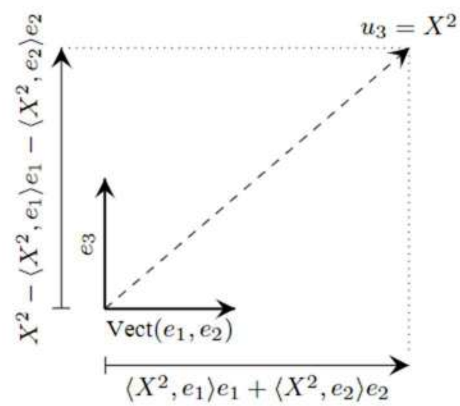


Fig. 3 : Construction de e_3

Ainsi, $\boxed{\text{LA}}$ base orthonormalisée de Gram-Schmidt obtenue à partir de la base canonique est la famille suivante :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{X-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\left(3X^2 - 6X + 1\right)\right)$$

Exercices

EXERCICE 39.1

On munit $\mathbb{R}^3$ de son produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
Orthonormaliser la base constituée des vecteurs suivants :

$$u_1 = (1, 0, 1) \qquad u_2 = (1, 1, 1) \qquad u_3 = (-1, -1, 0)$$

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 39.1 Reprendre pas à pas le raisonnement mené dans *Exemple traité*. Faire des figures !

Solutions des exercices

EXERCICE 39.1

On applique à la famille libre (u_1, u_2, u_3) le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt pour obtenir une base orthonormée (e_1, e_2, e_3) :

$\hookrightarrow$ *Construction de* e_1 *:*

On normalise $u_1 = (1, 0, 1)$ et on pose alors :

$$e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} \underset{\substack{\uparrow \\ \|(1,0,1)\| = \frac{1}{\sqrt{2}}}}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$$

Fig. 1 : Construction de e_1

$\hookrightarrow$ *Construction de* e_2 *:*

On « orthogonalise » $u_2 = (1, 1, 1)$ en lui ôtant sa composante suivant le vecteur e_1 précédemment construit, puis on normalise le tout. Ainsi,

$$\begin{aligned} e_2 &= \frac{u_2 - \langle u_2, e_1 \rangle e_1}{\|u_2 - \langle u_2, e_1 \rangle e_1\|} \\ &\underset{\substack{\uparrow \\ \langle u_2, e_1 \rangle = \sqrt{2}}}{=} \frac{(0, 1, 0)}{\|(0, 1, 0)\|} \underset{\substack{\uparrow \\ \|(0,1,0)\| = 1}}{=} (0, 1, 0) \end{aligned}$$

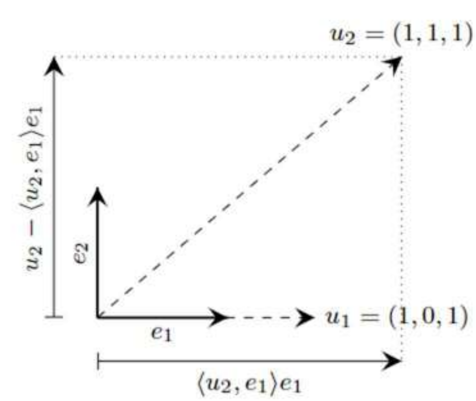


Fig. 2 : Construction de e_2

$\hookrightarrow$ *Construction de e_3 :*

On « orthogonalise » $u_3 = (-1,-1,0)$ en lui ôtant ses composantes suivant les vecteurs e_1 et e_2 précédemment construits, puis on normalise le tout. Ainsi,

$$e_3 = \frac{u_3 - \langle u_3,e_1\rangle e_1 - \langle u_3,e_2\rangle e_2}{\|u_3 - \langle u_3,e_1\rangle e_1 - \langle u_3,e_2\rangle e_2\|} \underset{\substack{\uparrow \\ \langle u_3,e_1\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \langle u_3,e_2\rangle = -1}}{=} \frac{\frac{1}{2}(-1,0,1)}{\|\frac{1}{2}(-1,0,1)\|} \underset{\substack{\uparrow \\ \|\frac{1}{2}(-1,0,1)\| = \frac{\sqrt{2}}{2}}}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)$$

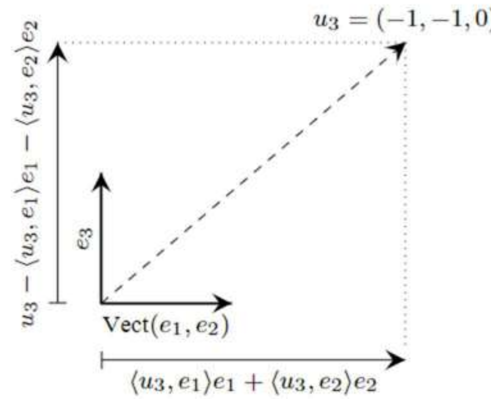


Fig. 3 : Construction de e_3

Ainsi, la base orthonormalisée de Gram-Schmidt de la base (u_1,u_2,u_3) est la famille suivante :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1),(0,1,0),\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)\right)$$

40 Montrer qu'un endomorphisme d'un espace préhilbertien est symétrique

Quand on ne sait pas !

La notation E désigne un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension finie ou non muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est symétrique si

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$$

EXEMPLE 1

Soient a et b deux vecteurs unitaires de E. On définit alors l'endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ par

$$\forall x \in E, \quad u(x) = \langle x, a \rangle\, b + \langle x, b \rangle\, a$$

Montrer que u est symétrique.

SOLUTION

Soit $(x, y) \in E^2$,

$$\begin{aligned}
\langle u(x), y \rangle &= \langle \langle x, a \rangle\, b + \langle x, b \rangle\, a, y \rangle \\
&= \langle x, a \rangle \langle b, y \rangle + \langle x, b \rangle \langle a, y \rangle \\
&= \langle x, \langle b, y \rangle\, a \rangle + \langle x, \langle a, y \rangle\, b \rangle \\
&= \langle x, \langle b, y \rangle\, a + \langle a, y \rangle\, b \rangle \\
&= \langle x, u(y) \rangle
\end{aligned}$$

ce qui prouve que u est symétrique.

Que faire ?

Pour prouver qu'un endomorphisme est symétrique, on peut vérifier que la matrice le représentant, **dans une base orthonormée**, est symétrique.

EXEMPLE 2

L'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ est symétrique dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire canonique.

Conseils

- Lorsque la définition directe ne permet pas de conclure, il faut parfois se ramener à l'expression matricielle de l'endomorphisme dans une base orthonormée.

  EXEMPLE 3

  Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base $((1,0),(1,1))$ est :

  $$M = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

  Montrer que u est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire canonique.

  En effet, la base $((1,0),(1,1))$ n'est pas orthonormée pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^2$, on cherche donc la matrice N de u dans la base canonique. Par application de la formule de changement de base :

  $$N = P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

  La matrice de u dans une base orthonormée étant symétrique, u est un endomorphisme symétrique.

- Attention de ne pas confondre endomorphisme symétrique et symétrie vectorielle. Certaines symétries peuvent être symétriques et d'autres non, tout comme il existe des endomorphismes symétriques qui ne sont pas des symétries.

  EXEMPLE 4 La matrice $S = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est symétrique et est la matrice d'une symétrie vectorielle car $S^2 = I$.

  La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ est symétrique pour la même raison que S mais n'est pas la matrice d'une symétrie vectorielle. Enfin, $M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ n'est pas symétrique mais vérifie $M^2 = I$, c'est donc la matrice d'une symétrie vectorielle.

Exemple traité

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\mathrm{d}t$.
Montrer que l'endomorphisme φ défini sur E par $\varphi(P) = (1 - X^2)P''(X) - 2XP'(X)$ est symétrique.

SOLUTION

Soient $P, Q \in E$, on a

$$\langle \varphi(P), Q\rangle = \int_{-1}^{1} \left((1-t^2)P''(t) - 2tP'(t)\right) Q(t)\mathrm{d}t$$

Or $t \mapsto Q(t)$ et $t \mapsto (1-t^2)P'(t)$ sont des fonctions de classe C^1 d'après les théorèmes usuels, on peut donc effectuer une intégration pas parties :

$$\begin{aligned}\langle \varphi(P), Q\rangle &= \left[(1-t^2)P'(t)Q(t)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}(1-t^2)P'(t)Q'(t)\mathrm{d}t \\ &= -\int_{-1}^{1}(1-t^2)P'(t)Q'(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

il est clair que P et Q sont interchangeables dans le calcul précédent ce qui prouve que $\langle \varphi(P), Q\rangle = \langle P, \varphi(Q)\rangle$ donc ϕ est bien un endormorphisme symétrique de E.

Exercices

EXERCICE 40.1

Soit $E = \mathrm{C}^\infty([0,1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t$. Soit $u \in E$ tel que $u(0) = u(1) = 0$. On définit une application T sur E par

$$T(f) = u'f' + uf''$$

Montrer que T est un endormorphisme symétrique de E.

EXERCICE 40.2

Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien. On considère u et v deux endomorphismes symétriques de E.
Montrer que $u \circ v$ est symétrique si et seulement si $u \circ v = v \circ u$.

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 40.1 On montre le caractère symétrique de u à partir de la définition en utilisant une intégration par parties.

EXERCICE 40.2 On démontre le caractère symétrique en appliquant deux fois la définition.

Solutions des exercices

EXERCICE 40.1

Il est tout d'abord clair que, si $f \in E$ alors $T(f) \in E$ en outre, soient $f, g \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} T(\lambda f + g) &= u'\left(\lambda f + g\right)' + u\left(\lambda f + g\right)'' \\ &= \lambda u' f' + u' g' + \lambda u f'' + u g'' \\ &= \lambda(u' f' + u f'') + (u' g' + u g'') \\ &= \lambda T(f) + T(g) \end{aligned}$$

par linéarité de la dérivation. Dès lors, T est linéaire de E dans E, c'est donc un endomorphisme de E.
On prouve maintenant que T est symétrique par la définition. Soient f et $g \in E$, les fonctions $t \mapsto u(t)f'(t)$ et $t \mapsto g(t)$ sont de classe C^{∞} sur $[0, 1]$ donc on peut effectuer une intégration par parties :

$$\begin{aligned} \langle T(f), g\rangle &= \int_0^1 (u' f' + u f'')(t) g(t) \mathrm{d}t \\ &= \left[u(t) f'(t) g(t)\right]_0^1 - \int_0^1 u(t) f'(t) g'(t) \mathrm{d}t \\ &= -\int_0^1 u(t) f'(t) g'(t) \mathrm{d}t \end{aligned}$$

en vertu des hypothèses faites sur u. Comme f et g jouent des rôles symétriques dans cette dernière expression, on en déduit que $\langle T(f), g\rangle = \langle f, T(g)\rangle$ ce qui prouve bien la symétrie de T.

EXERCICE 40.2

On raisonne par double équivalence :

$$\begin{aligned}
u\circ v \text{ est symétrique} &\Leftrightarrow \forall x,y\in E \quad \langle u\circ v(x),y\rangle = \langle x, u\circ v(y)\rangle\\
&\Leftrightarrow \forall x,y\in E \quad \langle v(x),u(y)\rangle = \langle x, u\circ v(y)\rangle\\
&\Leftrightarrow \forall x,y\in E \quad \langle x,v\circ u(y)\rangle = \langle x, u\circ v(y)\rangle\\
&\Leftrightarrow \forall x,y\in E \quad \langle x,v\circ u(y)-u\circ v(y)\rangle = 0\\
&\Leftrightarrow \forall y\in E \quad v\circ u(y) = u\circ v(y)\\
&\Leftrightarrow v\circ u = u\circ v
\end{aligned}$$

La «simplification par x» dans le produit scalaire de la quatrième équivalence provient du fait que $v\circ u(y)-u\circ v(y)\in E^{\perp}=\{0\}$.
Dans le cas particulier où E serait de dimension finie, le résultat peut s'énoncer sous la forme : soient M et N deux matrices symétriques alors MN est symétrique si et seulement si $MN=NM$. Ce résultat se prouve facilement en utilisant les propriétés de la transposée :

$$\begin{aligned}
MN=(MN)^T &\iff MN=N^TM^T\\
&\iff MN=NM
\end{aligned}$$

Solutions

41 Montrer qu'un endomorphisme d'un espace préhilbertien est orthogonal

Quand on ne sait pas !

La notation E désigne un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension finie ou non muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

- Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est orthogonal (on dit aussi que u est une isométrie) si

$$\forall x \in E, \quad ||u(x)|| = ||x||$$

EXEMPLE 1 Soit f un endomorphisme orthogonal de E et s une symétrie orthogonale, alors $f \circ s \circ f^{-1}$ est orthogonal. En effet, soit $x \in E$,

$$\left|\left|f\left(s\left(f^{-1}(x)\right)\right)\right|\right| = \left|\left|s\left(f^{-1}(x)\right)\right|\right| = \left|\left|f^{-1}(x)\right|\right| = ||x||$$

car f, s et f^{-1} sont des isométries.

- Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est orthogonal si, et seulement si

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

Que faire ?

- On peut vérifier directement la définition.
- Si E est de dimension finie, un endomorphisme u est orthogonal si une matrice U associée à u dans une base orthonormale vérifie

$$U^T U = I$$

EXEMPLE 2 Dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure euclidienne canonique, l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est un endomorphisme orthogonal.

Conseils

- Parfois, il est plus simple de montrer que $||u(x)||^2 = ||x||^2$ et d'utiliser la définition du produit scalaire.
- En dimension 3, on peut appeler C_1, C_2 et C_3 les colonnes de la matrice et vérifier que

$$||C_1|| = ||C_2|| = 1 \qquad \langle C_1, C_2\rangle = 0 \qquad C_1 \wedge C_2 = \pm C_3$$

Voir également fiche 43.

Exemple traité

Soit E un espace euclidien, on se donne u, vecteur non nul de E. Déterminer les réels α tels que $x \mapsto \alpha \langle u, x\rangle - x$ soit une isométrie de E.

➲ Source : CCP PSI

SOLUTION

Soit $x \in E$, on a

$$\begin{aligned} ||\alpha \langle u, x\rangle u - x||^2 = ||x||^2 &\Leftrightarrow \alpha^2 \langle u, x\rangle^2 ||u||^2 - 2\alpha \langle u, x\rangle^2 + ||x||^2 = ||x||^2 \\ &\Leftrightarrow \alpha \langle u, x\rangle^2 \left(\alpha ||u||^2 - 2\right) = 0 \end{aligned}$$

comme le résultat doit être vrai pour tout x, en particulier s'il n'est pas orthogonal à u, on trouve $\alpha = \frac{2}{||u||^2}$.

Exercices

EXERCICE 41.1

Soit $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} a & a+1 & 2 \\ a+1 & -2 & a \\ -2 & -a & a+1 \end{pmatrix}$.

Préciser les valeurs de a pour lesquelles cette matrice est orthogonale.

➲ Source : CCP PC

EXERCICE 41.2

Soient $(a, b, c) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^3$ et

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -a & c \\ a & 0 & -b \\ -c & b & 0 \end{pmatrix}$$

1 Montrer que $M + I$ est inversible.

2 Soit $K = (M - I)(M + I)^{-1}$. Montrer que K est une matrice orthogonale.

➲ Source : CCP PC

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 41.1 On note C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On calcule $||C_1||$, $||C_2||$ et $\langle C_1, C_2 \rangle$ pour déterminer une condition sur a. On vérifie ensuite que, sous cette condition, $C_1 \wedge C_2 = -C_3$ et que A est orthogonale.

EXERCICE 41.2

1 On remarque que M est antisymétrique. En calculant $X^T M X$ et sa transposée, où X désigne un vecteur propre associé à une valeur propre réelle λ, on montre que $\lambda = 0$. Par suite, -1 n'est pas une valeur propre de M et $M + I$ est de rang maximum.

2 On calcule K^T en utilisant les propriétés de la transposition puis on remarque que $(M - I)(M + I) = (M + I)(M - I)$.

Solutions des exercices

EXERCICE 41.1

En notant C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A, on a

$$||C_1|| = \frac{1}{3}\sqrt{a^2 + (a+1)^2 + 4} = \frac{\sqrt{2a^2 + 2a + 5}}{3} = ||C_2||$$

or

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{2a^2 + 2a + 5}}{3} = 1 &\Leftrightarrow 2a^2 + 2a + 5 = 9\\ &\Leftrightarrow a^2 + a - 2 = 0\\ &\Leftrightarrow a \in \{-2, 1\}\end{aligned}$$

Par suite, on doit avoir $\langle C_1, C_2 \rangle = 0$ d'où

$$\frac{a(a+1) - 2(a+1) + 2a}{9} = 0 \Leftrightarrow a^2 + a - 2 = 0$$

qui est la même condition que précédemment. Enfin,

$$C_1 \wedge C_2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -a^2 - a - 4 \\ a^2 - 2a - 2 \\ -a^2 - 4a - 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -6 \\ -3a \\ -3(a+1) \end{pmatrix} = -C_3$$

car $-a^2 - a = -2$ (pour la première ligne), $a^2 = -a + 2$ (pour la seconde ligne) et $-a^2 = a - 2$ (pour la dernière ligne).
En conclusion, A est orthogonale si et seulement si $a = 1$ ou $a = -2$.

EXERCICE 41.2

1 La matrice M est antisymétrique. On suppose qu'il existe un vecteur propre X associé à une valeur propre λ de M. On a alors

$$\begin{aligned} X^T MX = \lambda X^T X &\Leftrightarrow \left(X^T MX\right)^T = \left(\lambda X^T X\right)^T \\ &\Leftrightarrow X^T M^T X = \lambda X^T X \\ &\Leftrightarrow -X^T MX = \lambda X^T X \end{aligned}$$

donc $-\lambda X^T X = \lambda X^T X$ et comme $X^T X = ||X||_2^2 \neq 0$, on a nécessairement $\lambda = -\lambda$ donc $\lambda = 0$. Le spectre réel de M ne contient que la valeur propre nulle, donc -1 n'est pas une valeur propre de M et $M + I$ est inversible.

2 On calcule

$$\begin{aligned} K^T = \left((M+I)^{-1}\right)^T (M-I)^T &= (M^T + I)^{-1}(M^T - I) \\ &= (-M + I)^{-1}(-M - I) \\ &= (M - I)^{-1}(M + I) \end{aligned}$$

car la transposition est linéaire et commute avec l'inverse. On a alors :

$$K^T K = (M - I)^{-1}(M + I)(M - I)(M + I)^{-1}$$

Or $(M + I)(M - I) = M^2 - I = (M - I)(M + I)$ d'où

$$K^T K = (M - I)^{-1}(M - I)(M + I)(M + I)^{-1} = I \times I = I$$

ce qui prouve que K est orthogonale.

Solutions

42 Utiliser le théorème spectral

Quand on ne sait pas !

Énonçons le théorème spectral dans le cas d'un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien ainsi que dans le cas d'une matrice symétrique réelle. On rappelle que si M est une matrice on désigne par M^T sa transposée.

- Soit E un espace euclidien. Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit **symétrique** si, en notant $< .,. >$ le produit scalaire de E, pour tout x, y de E, $< u(x), y > = < x, u(y) >$.
- Soit E un espace euclidien et u un endomorphisme symétrique de E. Il est diagonalisable en base orthonormée ce qui signifie qu'il existe une base $(e_1, \ldots, e_n)$ orthonormée de E telle que la matrice de u dans cette base soit diagonalisable.
- Soit M une matrice **réelle** symétrique (ce qui signifie que M est égale à sa transposée), il existe une matrice **orthogonale** P telle que $P^{-1}MP = P^TMP$ soit diagonale.

Que faire ?

- Quand on veut montrer qu'une matrice M est diagonalisable. Si elle est **symétrique** et **réelle**, il suffit d'invoquer le théorème spectral pour conclure qu'elle est diagonalisable c'est-à-dire qu'il existe une matrice inversible P telle que $P^{-1}MP$ soit diagonale. De plus, on peut choisir P orthogonale, c'est-à-dire que $P^{-1} = P^T$. On a donc que P^TMP est diagonale.
- Si on considère un endomorphisme d'un espace euclidien E. Pour montrer qu'il est diagonalisable, il suffit de vérifier qu'il est symétrique (voir fiche 40)

Conseils

Quand on travaille avec des matrices, il est essentiel que la matrice soit à coefficients réels. Par exemple, la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ est symétrique mais elle n'est pas diagonalisable. En effet son polynôme caractéristique $\chi_A = (X-1)(X+1) - i^2 = X^2$. Son unique valeur propre est donc 0. De ce fait, si M était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice nulle et donc serait elle même la matrice nulle, ce qui n'est pas le cas.

Exemple traité

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $M = A^T A$. On identifie $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ avec $\mathbb{R}$.

1 Montrer que M est diagonalisable.

2 Montrer que pour tout vecteur colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^T X$ est un réel positif.

3 En déduire que toutes les valeurs propres de M sont positives.

SOLUTION

1 On montre que M vérifie les hypothèses du théorème spectral. C'est une matrice réelle. De plus elle est symétrique car

$$M^T = (A^T A)^T = A^T A = M$$

D'après le théorème spectral, elle est diagonalisable.

2 Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$X^T X = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq 0$$

3 Soit λ une valeur propre de M et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre (non nul) associé. On a

$$X^T M X = X^T(\lambda X) = \lambda(X^T X)$$

et

$$X^T M X = X^T A^T A X = (AX)^T(AX) \geq 0$$

Comme $X^T X$ est strictement positif car X est supposé non nul, on obtient :

$$\lambda = \frac{X^T M X}{X^T X} \geq 0$$

Exercices

EXERCICE 42.1 Pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on pose $(A|B) = \mathrm{Tr}(A^T B)$ et $||A|| = \sqrt{(A|A)}$.

1 Montrer que si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et Q est une matrice orthogonale, $||Q^T M Q|| = ||M||$.

2 Montrer que $||AB||^2 = \mathrm{Tr}(A^T A B B^T)$

3 Montrer que $A^T A$ et BB^T sont symétriques et que leurs valeurs propres sont positives.

4 On souhaite montrer que $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ ||AB|| \leq ||A|| \times ||B||$.

a. Commencer par traiter le cas particulier où $A^T A$ est diagonale.

b. Traiter le cas général en se ramenant au cas précédent.

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 42.1

1 Calculer $||Q^T MQ||^2$ puis faire apparaitre $QQ^T = I_n$ en utilisant les propriétés classiques de la trace.

2 Faire le calcul.

3 On pourra utiliser l'exemple traité ci-dessus.

4 a. Vérifier que les coefficients diagonaux de BB^T sont positifs.

b. Utiliser le théorème spectral et la question 1

Solutions des exercices

EXERCICE 42.1

1 On fait le calcul :

$$||Q^T MQ||^2 = \mathrm{Tr}((Q^T MQ)^T Q^T MQ) = \mathrm{Tr}(Q^T M^T QQ^T MQ)$$

Or $QQ^T = I_n$ donc en utilisant de plus que si N_1 et N_2 sont des matrices carrées, $\mathrm{Tr}(N_1 N_2) = \mathrm{Tr}(N_2 N_1)$,

$$||Q^T MQ||^2 = \mathrm{Tr}(Q^T \times M^T MQ) = \mathrm{Tr}(M^T MQ \times Q^T) = \mathrm{Tr}(M^T M) = ||M||^2$$

Comme les normes sont positives, on a bien $||Q^T MQ|| = ||M||$.

2 Par définition,

$$||AB||^2 = (A|A) = \mathrm{Tr}((AB)^T (AB)) = \mathrm{Tr}(B^T \times A^T AB) = \mathrm{Tr}(A^T AB \times B^T)$$

La dernière égalité venant du fait que $\mathrm{Tr}(MN) = \mathrm{Tr}(NM)$.

3 On a vu dans l'exemple traité ci-dessus que si A est une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors $M = A^T A$ est symétrique et que ses valeurs propres sont positives. On peut l'appliquer en particulier à B^T pour obtenir que $(B^T)^T B^T = BB^T$ est symétrique et que ses valeurs propres sont positives.

4 **a.** On suppose que $A^T A$ est diagonale et on note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ses valeurs propres. On note aussi $B = (b_{ij})$ et $M = (m_{ij})$ la matrice BB^T. On remarque que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $m_{ii} = \sum\limits_{j=1}^{n} b_{ij}^2 \geq 0$.

On a alors

$$||AB||^2 = \mathrm{Tr}(A^T ABB^T) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i m_{ii}$$

D'autre part,

$$||A||^2||B||^2 = \mathrm{Tr}(A^T A)\mathrm{Tr}(M) = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} m_{ii}\right)$$

Comme tous les λ_i et tous les m_{ii} sont positifs,

$$||AB||^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i m_{ii} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} m_{ii}\right) = ||A||^2||B||^2$$

b. Dans le cas général, comme $A^T A$ est une matrice réelle symétrique, d'après le théorème spectral, il existe une matrice orthogonale Q telle que $Q^T A^T AQ = D$ où D est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont positifs. On a donc $A^T A = QDQ^T$. On obtient alors

$$\begin{aligned} ||AB||^2 &= \mathrm{Tr}(A^T ABB^T) \\ &= \mathrm{Tr}(QDQ^T BB^T) \\ &= \mathrm{Tr}(Q \times DQ^T BQQ^T B^T) \\ &= \mathrm{Tr}(DQ^T BQQ^T B^T \times Q) \\ &= \mathrm{Tr}(DCC^T) \end{aligned}$$

en posant $C = Q^T BQ$. Comme D est diagonale et à valeurs propres positives, on peut utiliser le calcul fait à la question 4a) pour obtenir que

$$||AB||^2 = \mathrm{Tr}(DCC^T) \leq \mathrm{Tr}(D)||C||^2$$

Or $\mathrm{Tr}(D) = \mathrm{Tr}(Q^T \times A^T AQ) = \mathrm{Tr}(A^T AQ \times Q^T) = \mathrm{Tr}(A^T A) = ||A||^2$ et, d'après la question 1) $||C|| = ||Q^T BQ|| = ||B||$.
Finalement, $||AB||^2 \leq ||A||^2 \times ||B||^2$.
Toutes les normes étant positives, $||AB|| \leq ||A|| \times ||B||$.

Solutions

43 Réduire une isométrie en dimension 3

Quand on ne sait pas !

On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne orientée canonique.

- Une matrice M est orthogonale si et seulement si $MM^T = I_3$ ou $M^TM = I_3$.
- Une matrice M est orthogonale si et seulement si ses colonnes forment une base orthonormée de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
- M est une rotation si et seulement si elle est orthogonale de déterminant 1.
- M est une rotation si et seulement si ses colonnes forment une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$.

Que faire ?

Pour une matrice M donnée, en notant C_1, C_2 et C_3 ses colonnes. On applique la méthode suivante :

- On vérifie que $||C_1|| = ||C_2|| = 1$.
- On vérifie que $\langle C_1, C_2\rangle = 0$.
- On vérifie que $C_1 \wedge C_2 = \pm C_3$. Si le résultat est $+C_3$ alors M est une rotation.

EXEMPLE 1

On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique. On veut identifier l'endomorphisme canoniquement associé à $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. On pose donc C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On a

$$||C_1|| = \frac{1}{3}\sqrt{4+4+1} = 1 \qquad ||C_2|| = \frac{1}{3}\sqrt{4+1+4} = 1$$

$$\langle C_1, C_2\rangle = \frac{1}{9}(4-2-2) = 0 \qquad C_1 \wedge C_2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix} = -C_3$$

donc A est une matrice orthogonale et comme ses colonnes forment une base indirecte, il ne s'agit pas d'une rotation. En revanche, comme $A^T = A$, il s'agit d'une symétrie orthogonale par rapport à l'espace $\operatorname{Ker}(A-I)$:

$$(A-I)X=0 \Leftrightarrow \begin{cases} -x+2y-z &= 0 \\ 2x-4y+2z &= 0 \\ -x+2y-z &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow x-2y+z=0$$

Il s'agit donc d'une réflexion par rapport au plan d'équation $x-2y+z=0$ ou encore par rapport à $\operatorname{Vect}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$.

Conseils

- Si M est orthogonale et que $M^T = M$, alors M est symétrique et il s'agit donc d'une symétrie orthogonale. On trouve alors le sous-espace des vecteurs invariants en déterminant $\operatorname{Ker}(M-I)$.
- Si M est la matrice d'une rotation, on trouve la direction de l'axe de la rotation en déterminant $\operatorname{Ker}(M-I)$. Dans une base orthogonale dont le premier vecteur dirige l'axe de la rotation, M est semblable à

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

  On peut donc déterminer le cosinus de l'angle en calculant la trace de M. Pour déterminer si elle est directe ou non, on choisit un vecteur v orthogonal à l'axe, on calcule son image par M : w. Si $v \wedge w$ est de même sens que le vecteur choisi pour orienter l'axe alors la rotation est directe ; indirecte sinon. En changeant l'orientation de l'axe, une rotation indirecte devient directe et inversement.
- Si M n'est pas une rotation et n'est pas symétrique, il s'agit alors de la composée d'une rotation et d'une symétrie orthogonale par rapport au plan de rotation. L'axe de la partie rotation est formé des vecteurs transformés en leur opposé. Pour trouver cet axe, on calcule $\operatorname{Ker}(M+I)$. Dans une base orthogonale de premier vecteur l'axe de rotation, M est semblable à :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

  On peut donc déterminer le cosinus de l'angle en calculant la trace de M. Enfin, le sens de la partie rotation se détermine comme dans le cas précédent. Le plan invariant de la partie symétrie (qui est également le plan de rotation) est l'orthogonal de l'axe.

Exemple traité

On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne orientée canonique. Reconnaitre l'endomorphisme canoniquement associé à $A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 6 & -3 \\ -6 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

SOLUTION

On note C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On a

$$||C_1|| = \frac{1}{7}\sqrt{4+36+9} = 1 \qquad ||C_2|| = \frac{1}{7}\sqrt{36+9+4} = 1$$

$$\langle C_1, C_2\rangle = \frac{1}{49}\,(12-18+6) = 0 \qquad C_1 \wedge C_2 = \frac{1}{49}\begin{pmatrix} -21 \\ 14 \\ 42 \end{pmatrix} = +C_3$$

donc A est orthogonale et ses colonnes forment une base directe il s'agit donc d'une matrice de rotation.
Pour déterminer l'axe de la rotation, on calcule $\operatorname{Ker}(A-I)$:

$$AX - X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -5x+6y-3z & = 0 \\ -6x-4y+2z & = 0 \\ 3x+2y-z & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x+6y-3z & = 0 \\ 3x+2y-z & = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x & = 0 \\ 2y-z & = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{Vect}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Dans une base orthogonale dont le premier vecteur serait $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, A est semblable à

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

donc, en calculant la trace, $1 + 2\cos\theta = \frac{11}{7} \Leftrightarrow \cos\theta = \frac{2}{7}$.
Il reste à déterminer si, avec l'orientation de l'axe choisie, cette rotation est directe ou non.

On choisit donc un vecteur orthogonal à l'axe, par exemple $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, son image par la rotation est $\frac{1}{7}\begin{pmatrix}2\\-6\\3\end{pmatrix}$ et

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \wedge \frac{1}{7}\begin{pmatrix}2\\-6\\3\end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}0\\-3\\-6\end{pmatrix}$$

est de sens opposé à l'axe, il s'agit donc d'une rotation indirecte.

Exercices

EXERCICE 43.1

Soient a, b et $c \in \mathbb{R}^*$. On définit

$$M = \frac{-1}{3abc}\begin{pmatrix}-abc & 2b^2c & 2c^2b\\ 2a^2c & -abc & 2c^2a\\ 2a^2b & 2b^2a & -abc\end{pmatrix}$$

Montrer que M est une symétrie vectorielle puis donner une condition nécessaire et suffisante pour que M soit une symétrie orthogonale par rapport à un plan.

EXERCICE 43.2

On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne canonique. Reconnaitre l'endormorphisme dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}7 & 4 & 4\\ -4 & 8 & -1\\ 4 & 1 & -8\end{pmatrix}$$

puis en donner les éléments caractéristiques.

EXERCICE 43.3

Soit $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}a & a+1 & 2\\ a+1 & -2 & a\\ -2 & -a & a+1\end{pmatrix}$.

Préciser les valeurs de a pour lesquelles cette matrice est orthogonale. Déterminer alors ses valeurs propres.

➲ Source : CCP PC

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 43.1 Calculer M^2 puis déterminer à quelle(s) condition(s) sur a, b et c on a $M^T = M$.

EXERCICE 43.2 Reconnaitre une matrice orthogonale de déterminant égal à -1 mais non symétrique. Il s'agit alors de la composée d'une rotation et d'une réflexion par rapport au plan de rotation. On détermine alors ses éléments caractéristiques en suivant les indications données en conseils.

EXERCICE 43.3 Pour la première partie de la question, voir exercice 1 de la fiche 41. Le fait que $C_1 \wedge C_2 = -C_3$ prouve que A n'est pas une rotation et comme A n'est pas symétrique il s'agit de la composée d'une rotation et d'une symétrie orthogonale par rapport au plan de rotation. On sait alors que -1 est une valeur propre de A, les deux autres sont complexes conjuguées et se déterminent en calculant la trace.

Solutions des exercices

EXERCICE 43.1

En calculant M^2 on trouve que $M^2 = I$, ce qui prouve bien que M est une symétrie vectorielle ; en particulier $M^{-1} = M$. Pour que M soit orthogonale, on doit avoir $M^T = M^{-1}$ et par unicité de l'inverse, $M = M^T$. Si cette condition est vérifiée alors M sera une symétrie «symétrique» c'est-à-dire une symétrie orthogonale.

$$M^T = M \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2c &= 2b^2c \\ 2a^2b &= 2c^2b \\ 2c^2a &= 2b^2a \end{cases} \Leftrightarrow a^2 = b^2 = c^2$$

car a, b et c sont non nuls. En résolvant $MX = X$, on trouve qu'il s'agit d'une symétrie par rapport au plan d'équation $ax + by + cz = 0$.

EXERCICE 43.2

On note C_1, C_2 et C_3 les colonnes de la matrice A. On a alors

$$||C_1|| = \frac{1}{9}\sqrt{49+16+16} = 1 \qquad ||C_2|| = \frac{1}{9}\sqrt{16+64+1} = 1$$

$$\langle C_1, C_2\rangle = \frac{1}{81}(28 - 32 + 4) = 0 \qquad C_1 \wedge C_2 = \frac{1}{81}\begin{pmatrix} -36 \\ 9 \\ 72 \end{pmatrix} = -C_3$$

et comme $A^T \neq A$, il s'agit donc de la composée d'une rotation et d'une réflexion de miroir l'orthogonal de l'axe de rotation. Il n'y a donc aucun vecteur invariant par cette transformation. Les vecteurs colinéaires à l'axe de la partie rotation étant transformés en leur opposé, on détermine la direction de l'axe en résolvant

$$\begin{aligned} AX = -X \Leftrightarrow (A+I)X = 0 \Leftrightarrow & \begin{cases} 16x + 4y + 4z & = 0 \\ -4x + 17y - z & = 0 \\ 4x + y + z & = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} -4x + 17y - z & = 0 \\ 4x + y + z = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 4x + z & = 0 \\ y & = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & X \in \mathrm{Vect} \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On pose $a = \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$; dans une base orthonormée de premier vecteur a, A est semblable à la matrice :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

En calculant la trace de A, on peut donc déterminer l'angle de la partie rotation :

$$-1 + 2\cos\theta = \frac{7}{9} \Leftrightarrow \cos\theta = \frac{8}{9}$$

Pour savoir si la partie rotation est directe ou non, on choisit un vecteur perpendiculaire à a, par exemple $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, on en calcule l'image par A : $\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$ et le produit vectoriel des deux nous donne $\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ qui est de même sens que l'axe, il s'agit donc d'une rotation dans le sens direct.

Pour conclure, la partie réflexion est une symétrie par rapport à $(\mathrm{Vect}(a))^\perp$ donc de plan d'équation $x - 4z = 0$.

L'endomorphisme canoniquement associé à A est donc la composée (commutative) d'une rotation directe d'axe a et dont le cosinus de l'angle vaut $\frac{8}{9}$ et d'une réflexion orthogonale dont le plan invariant est d'équation $x - 4z = 0$.

Solutions

EXERCICE 43.3

Voir l'exercice 1 de la fiche 41 pour la première partie de la réponse.
On conserve les mêmes notations et on cherche maintenant à déterminer les valeurs propres.
Comme $C_1 \wedge C_2 = -C_3$, A est une matrice orthogonale indirecte mais non symétrique il ne s'agit donc pas de la matrice d'une symétrie. Il s'agit donc de la composition d'une rotation et d'une symétrie orthogonale par rapport au plan de rotation. On a donc :

$$-1 \in \mathrm{Sp}(A) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Tr}(A) = -1 + 2\cos\theta = \frac{2a-1}{3}$$

d'où $\cos\theta = \frac{a+1}{3}$.
Si $a = -2$ alors $\cos\theta = -\frac{1}{3}$ et la matrice de la partie rotation est semblable à

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -2\frac{\sqrt{2}}{3} \\ 2\frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

donc les valeurs propres sont $\frac{-1-2i\sqrt{2}}{3}$ et $\frac{-1+2i\sqrt{2}}{3}$.
De même, si $a = 1$ alors $\cos\theta = \frac{2}{3}$, les deux valeurs propres sont alors $\frac{2-i\sqrt{5}}{3}$ et $\frac{2+i\sqrt{5}}{3}$.
En résumé :

a	-2	1
$\mathrm{Sp}(A)$	$\left\{-1, \frac{-1\pm 2i\sqrt{2}}{3}\right\}$	$\left\{-1, \frac{2\pm i\sqrt{5}}{3}\right\}$


Dénombrabilité
et familles
sommables

Montrer qu'un ensemble est dénombrable (ou pas)

44

Quand on ne sait pas !

Un ensemble est dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$.

Voici quelques propriétés du cours permettant de montrer qu'un ensemble est dénombrable sans utiliser la définition :

- Toute partie infinie de $\mathbb{N}$ est dénombrable. En particulier, si $f : A \to \mathbb{N}$ est une injection alors A est dénombrable (car en bijection avec $f(A)$ qui est une partie infinie de $\mathbb{N}$).
- Une produit cartésien fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.
- Une réunion finie ou dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.

Que faire ?

- Pour montrer qu'un ensemble X est dénombrable, il suffit de trouver une application $f : X \to \mathbb{N}$ ou $g : \mathbb{N} \to X$ (souvent donnée dans l'énoncé) bijective (ou simplement injective pour f).
- Montrer qu'un ensemble est au plus dénombrable revient à montrer qu'il est fini ou dénombrable.

Conseils

- Plutôt que de trouver une bijection intéressante, il est souvent plus simple d'écrire cet ensemble comme une réunion ou un produit cartésien d'ensembles dénombrables.
- Il faut savoir que $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables alors que $\mathbb{R}$ ne l'est pas.

Exemple traité

Soit $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ l'ensemble défini par $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2}\,,\ (a, b) \in \mathbb{Q}^2\}$. En utilisant l'application $f : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ définie par :

$$f((a, b)) = a + b\sqrt{2}$$

Montrer que $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ est dénombrable.

SOLUTION

L'application f est surjective par définition de $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$. Montrons l'injectivité de f. Soit (a, b) et (a', b') deux couples de $\mathbb{Q}^2$ tels que $f((a, b)) = f((a', b'))$.
Alors $a + b\sqrt{2} = a' + b'\sqrt{2}$ donc

$$a - a' = (b' - b)\sqrt{2}$$

Si b est différent de b' alors :

$$\sqrt{2} = \frac{a - a'}{b' - b} \in \mathbb{Q}$$

ce qui est absurde. Ainsi, $b = b'$ et $a = a'$ ce qui prouve l'injectivité de f. Finalement, $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ est en bijection avec $\mathbb{Q}^2$. Or $\mathbb{Q}$ est dénombrable donc $\mathbb{Q}^2$ aussi (produit cartésien fini d'ensembles dénombrables) donc $\mathbb{Q}^2$ est en bijection avec $\mathbb{N}$. Par transitivité, on en déduit que $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ est en bijection avec $\mathbb{N}$ donc dénombrable.

Exercices

EXERCICE 44.1

Montrer que $\mathbb{Z}$ est dénombrable en utilisant l'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ définie par :

$$\forall n \geq 0, \quad \varphi(n) = \begin{cases} -\dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \dfrac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

EXERCICE 44.2

Pour tout entier $p \geq 0$, on pose :

$$S_p = \{(u_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}},\ \forall n \geq p,\ u_p = 0\}$$

On note S l'ensemble des suites d'entiers naturels nulles à partir d'un certain rang.

1. En utilisant l'application $f : S_p \to \mathbb{N}^p$ définie par :

$$f((u_n)_{n\geq 0}) = (u_0, \ldots, u_{p-1})$$

   Montrer que S_p est dénombrable.

2. En déduire que S est dénombrable.

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 44.1 Pour $m \in \mathbb{Z}$, résoudre l'équation $f(n) = m$ d'inconnue $n \in \mathbb{N}$ en remarquant que la parité d'une solution n dépend du signe de m.

EXERCICE 44.2

1. Montrer l'injectivité et la surjectivité de f.
2. Trouver le lien entre les ensembles S et S_p pour $p \geq 0$.

Solutions des exercices

EXERCICE 44.1

Soit $m \in \mathbb{Z}$. On résout l'équation $f(n) = m$ d'inconnue $n \in \mathbb{N}$. Distinguons deux cas :

- Si $m > 0$: dans ce cas, si n est pair, $f(n)$ est toujours différent de m car $f(n) \leq 0$. On cherche donc n impair tel que $f(n) = m$, ou encore $\dfrac{n+1}{2} = m$ ce qui est équivalent à $n = 2m - 1$ (qui appartient à $\mathbb{N}$ car $m > 0$).
- Si $m \leq 0$: dans ce cas, si n est impair, $f(n)$ est toujours différent de m car $f(n) > 0$. On cherche donc n pair tel que $f(n) = m$, ou encore $-\dfrac{n}{2} = m$ ce qui est équivalent à $n = -2m$ (qui appartient à $\mathbb{N}$ car $m \leq 0$).

Ainsi, pour tout $m \in \mathbb{Z}$, l'équation $f(n) = m$ d'inconnue $n \in \mathbb{N}$ admet une unique solution. L'application f est donc bijective et donc $\mathbb{Z}$ est dénombrable.

EXERCICE 44.2

1. Montrons l'injectivité de f. Soit deux suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ de S_p ayant la même image par f. Par définition de f, on en déduit que les termes d'indices 0 à $p-1$ des deux suites sont les mêmes. Or les termes d'indices supérieurs à p sont nuls pour les deux suites car elles appartiennent à S_p. Ainsi, les suites sont égales et f est injective.

   Montrons la surjectivité de f. Soit $(a_0, \ldots a_{p-1}) \in \mathbb{N}^p$. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie pour tout entier $k \in \{0, \ldots, p-1\}$ par $u_k = a_k$ et pour tout entier k supérieur ou égal à p par $u_k = 0$. Alors $(u_n)_{n\geq 0}$ appartient à S_p et son image par f est $(a_0, \ldots a_{p-1})$. Ainsi, f est surjective.

   Finalement, f est une bijection de S_p sur $\mathbb{N}^p$ qui est un ensemble dénombrable (produit cartésien fini d'ensembles dénombrables) donc S_p est dénombrable.

2. Par définition de S, on a $S = \displaystyle\bigcup_{p=0}^{+\infty} S_p$. Chaque ensemble S_p est dénombrable donc S est une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables donc S est un ensemble dénombrable.

Solutions

45 Montrer qu'une famille est sommable et calculer sa somme

Quand on ne sait pas !

- Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de nombres réels **positifs** indexée par un ensemble I dénombrable. Elle est dite sommable si l'ensemble $S = \left\{\sum_{i\in J} u_i \;;\; J \text{ partie finie de } I\right\}$ est majoré. Dans ce cas, on appelle somme de la famille et on note $\sum_{i\in I} u_i$ la borne supérieure de cet ensemble : $\sum_{i\in I} u_i = \sup S$.
- Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de nombres réels ou de nombres complexes indexée par un ensemble I dénombrable. Elle est dite sommable si la famille $(|u_i|)_{i\in I}$ des valeurs absolues (ou des modules) des éléments de la famille est sommable. Dans ce cas, la somme de la famille notée $\sum_{i\in I} u_i$ est définie ainsi :
  - si c'est une famille de nombres réels : $\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} u_i^+ - \sum_{i\in I} u_i^-$

    où, pour tout i de I, $u_i^+ = \frac{|u_i|+u_i}{2}$ est la partie positive de u_i et $u_i^- = \frac{|u_i|-u_i}{2}$ est la partie négative de u_i.
  - si c'est une famille de nombres complexes $\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} \mathrm{Re}(u_i) + i \sum_{i\in I} \mathrm{Im}(u_i)$

    où, pour tout i de I, $\mathrm{Re}(u_i)$ est la partie réelle de u_i et $\mathrm{Im}(u_i)$ est la partie imaginaire de u_i.

Le plus souvent on n'utilise pas la définition pour montrer qu'une famille est sommable ou pour calculer la somme. On utilise plutôt le théorème de sommation par paquets.

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels ou de complexes indexée par un ensemble dénombrable.
On considère une partition $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de I.
La famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si

- Pour tout entier n, la sous-famille $(u_i)_{i\in I_n}$ est sommable,
- La série $\sum_{n\geq 0} \left(\sum_{i\in I_n} |u_i|\right)$ est convergente

De plus, dans ce cas, $\sum_{i\in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i\in I_n} u_i\right)$

Que faire ?

- Pour montrer qu'une famille est sommable, il faut la plupart du temps se ramener à étudier une famille de réels positifs en considérant les valeurs absolues ou les normes des éléments dont on veut faire la somme.
- L'outil les plus utile, aussi bien pour montrer qu'une famille est sommable que pour calculer la somme est le théorème de sommation par paquets. Quand on veut étudier une famille $(u_i)_{i\in I}$ où I est un ensemble dénombrable, il faut essayer de regrouper les éléments de I dans des « paquets » dont on sait calculer la somme.

Conseils

Dans la plupart des cas on travaillera avec $I = \mathbb{N}^2$. Les partitions utilisées seront souvent

- Les « lignes » : $L_j = \{(i,j)\ ,\ i \in \mathbb{N}\}$.
- Les « colonnes » : $C_i = \{(i,j)\ ,\ j \in \mathbb{N}\}$.
- Les « diagonales » : $\Delta_k = \{(i,j) \in\ ,\ i+j=k\}$.

Exemple traité

Soit $\alpha > 0$.
On considère la famille $(u_{p,q})_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ où pour tout $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $u_{p,q} = \dfrac{1}{(p+q)^\alpha}$.
Pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ on pose $\Delta_k = \{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2\ ,\ p+q=k\}$.

1 Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, la famille $(u_{p,q})_{(p,q)\in\Delta_k}$ est sommable et calculer la somme de la famille $\displaystyle\sum_{(p,q)\in\Delta_k} u_{p,q}$.

2 En déduire à quelle condition sur α la famille est sommable.

SOLUTION

1 Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. L'ensemble $\Delta_k = \{(1,k-1),(2,k-2),\dots,(k-1,1)\}$ est un ensemble fini de cardinal $k-1$. La famille $(u_{p,q})_{(p,q)\in\Delta_k}$ est donc sommable. De plus

$$\sum_{(p,q)\in\Delta_k} u_{p,q} = \sum_{p=1}^{k-1} \frac{1}{k^\alpha} = \frac{k-1}{k^\alpha}$$

2 On remarque que quand k parcourt $[\![2,+\infty[\![$, les ensembles Δ_k forment une partition de $(\mathbb{N}^*)^2$.
D'après le théorème de sommation par paquets la famille $(u_{p,q})_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable si et seulement si la série $\displaystyle\sum_{k\geq 2}\left(\sum_{(p,q)\in\Delta_k} u_{p,q}\right)$ converge.

C'est une série à termes positifs et $\dfrac{k-1}{k^{\alpha}} \underset{k\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{k^{\alpha-1}}$.

La famille est donc sommable si et seulement si $\alpha - 1 > 1 \iff \alpha > 2$.

Exercices

EXERCICE 45.1

On considère la famille $(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ où, pour tout $(p,q)\in\mathbb{N}^2$, $u_{p,q} = \dfrac{p!q!}{(p+q+2)!}$.

1 Montrer que, pour $p = 0$, la série $\sum\limits_{q\geq 0} u_{0,q}$ converge et calculer sa somme.

2 Montrer de même que pour $p = 1$, la série $\sum\limits_{q\geq 0} u_{1,q}$ converge et calculer sa somme.

3 Généraliser ce qui précède pour montrer que la famille $(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et calculer $\sum\limits_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} u_{p,q}$. On exprimera le résultat à l'aide de $\zeta(2) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 45.1

1 On pourra faire apparaitre un téléscopage.

2 Procéder comme à la question précédente.

3 Mettre en place le théorème de sommation par paquets.

Solutions des exercices

EXERCICE 45.1

1 Pour $p = 0$ et $q \in \mathbb{N}$, $u_{p,q} = \dfrac{0!q!}{(q+2)!} = \dfrac{1}{(q+1)(q+2)}$. La série $\sum\limits_{q\geq 0} u_{0,q}$ est une série à termes positifs et $u_{0,q} \underset{q\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{q^2}$. Par comparaison avec une série de Riemann, la série $\sum\limits_{q\geq 0} u_{0,q}$ converge.

On remarque que pour tout entier q, $u_{0,q} = \dfrac{1}{q+1} - \dfrac{1}{q+2}$. On pouvait aussi mettre en place une décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\frac{1}{(X+1)(X+2)}$.

On en déduit que pour tout entier n,

$$\sum_{q=0}^{n} u_{0,q} = \sum_{q=0}^{n} \frac{1}{q+1} - \frac{1}{q+2} = 1 - \frac{1}{n+2}$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient la somme de la série : $\sum\limits_{q=0}^{+\infty} u_{0,q} = 1$.

2 Pour $p = 1$ et $q \in \mathbb{N}$, $u_{p,q} = \dfrac{1!q!}{(q+3)!} = \dfrac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)}$. La série $\sum\limits_{q\geq 0} u_{1,q}$ est une série à termes positifs et $u_{1,q} \underset{q\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{q^3}$. Par comparaison avec une série de Riemann, la série $\sum\limits_{q\geq 0} u_{1,q}$ converge.

On remarque que pour tout entier q, $u_{1,q} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{(q+1)(q+2)} - \dfrac{1}{(q+2)(q+3)}\right)$.
On pouvait aussi mettre en place une décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\frac{1}{(X+1)(X+3)}$ puis tout multiplier par $\frac{1}{X+2}$.
On en déduit que pour tout entier n,

$$\sum_{q=0}^{n} u_{01q} = \frac{1}{2}\sum_{q=0}^{n} \frac{1}{(q+1)(q+2)} - \frac{1}{(q+2)(q+3)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+2)(n+3)}$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient la somme de la série : $\sum\limits_{q=0}^{+\infty} u_{0,q} = \frac{1}{2^2}$.

3 On procède de même pour tout entier p. On fixe p, on a alors

$$u_{p,q} = p!\frac{q!}{(p+q+2)!} = p!\frac{1}{(q+1)(q+2)\cdots(q+p+2)} \underset{q\to\infty}{\sim} p!\frac{1}{q^{p+2}}$$

On en déduit, par comparaison de série à termes positifs avec une série de Riemann que pour tout entier p, $\sum\limits_{q\geq 0} u_{p,q}$ est convergente.

On réalise d'une décomposition en éléments simples de $\frac{1}{(X+1)(X+p+2)}$:

$$\frac{1}{(X+1)(X+p+2)} = \frac{1}{p+1}\left(\frac{1}{X+1} - \frac{1}{X+p+2}\right)$$

En évaluant en q et en multipliant par $\dfrac{1}{(q+2)\cdots(q+p+1)}$ on obtient que

$$u_{p,q} = \frac{p!}{p+1}\left(\frac{1}{(q+1)(q+2)\cdots(q+p+1)} - \frac{1}{(q+2)(q+3)\cdots(q+p+2)}\right)$$

Solutions

De ce fait, pour tout entier n,

$$\begin{aligned}\sum_{q=0}^{n} u_{p,q} &= p!\sum_{q=0}^{n}\frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)\cdots(q+p+2)}\\ &= \frac{p!}{p+1}\sum_{q=0}^{n}\frac{1}{(q+1)(q+2)\cdots(q+p+1)}-\frac{1}{(q+2)(q+3)\cdots(q+p+2)}\\ &= \frac{p!}{p+1}\left(\frac{1}{(p+1)!}-\frac{1}{(n+2)(n+3)\cdots(n+p+2)}\right)\end{aligned}$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient

$$\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q}=\frac{p!}{p+1}\times\frac{1}{(p+1)!}=\frac{1}{(p+1)^2}$$

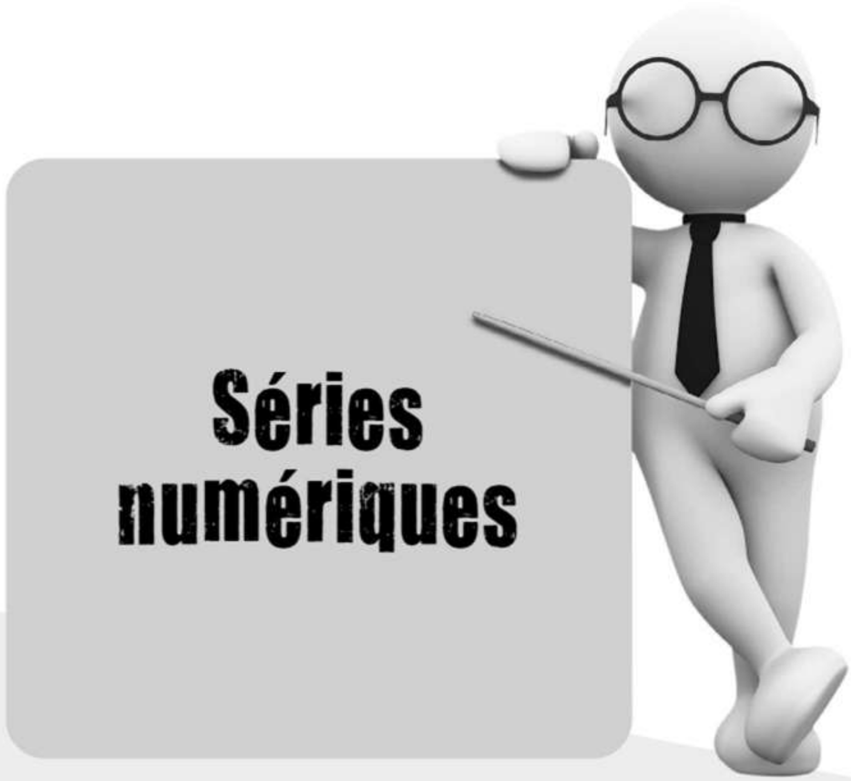
On peut alors appliquer le théorème de sommation par paquets. On considère l'ensemble des indices $\mathbb{N}^2$. On le partionne en écrivant que $\mathbb{N}^2 = \bigcup_{p=0}^{+\infty} C_p$ où pour tout entier p, $C_p=\{(i,j)\in\mathbb{N}^2\ ,\ i=p\}$.
On vient de voir que pour tout $p\in\mathbb{N}$, la famille $(u_{i,j})_{(i,j)\in C_p}$ était sommable et que $\sum_{(i,j)\in C_p} u_{i,j}=\dfrac{1}{(p+1)^2}$.

On en déduit alors en utilisant les séries de Riemann que la série $\sum_{p\geq 0}\left(\sum_{(i,j)\in C_p} u_{i,j}\right)$ converge. Cela implique que la famille $(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et de plus,

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} u_{p,q}=\sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{(i,j)\in C_p} u_{i,j}\right)=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(p+1)^2}=\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2}=\zeta(2)$$

On en déduit que

$$\sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q}\right)=\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}.$$


Séries
numériques

46 Étudier la nature d'une série à termes positifs

Quand on ne sait pas !

Pour étudier une série à termes positifs, on peut utiliser les critères suivants :

Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ deux suites à termes positifs.

- Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$. Alors :
  — La convergence de $\sum v_n$ implique la convergence de $\sum u_n$ et on a dans ce cas :
  $$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$$
  — La divergence de $\sum u_n$ implique la divergence de $\sum v_n$.
- Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature (toutes les deux convergentes ou toutes les deux divergentes). Cette implication reste vraie si les suites sont négatives.
- Si $u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n)$ ou si $u_n \underset{+\infty}{=} O(v_n)$ alors la convergence de $\sum v_n$ implique la convergence de $\sum u_n$.

Que faire ?

- On commence par justifier que la série étudiée est une série à termes positifs (ou de signe constant pour le critère lié à l'équivalence). On compare alors le terme général de la série étudiée à celui d'une série usuelle (séries de Riemann, séries géométriques, série exponentielle).

EXEMPLE 1 Étudions la nature de la série $\sum n \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n^2} \in]0,1]$ et $[0,1] \subset \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ donc $\sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \geq 0$ et la série étudiée est à termes positifs. On a :

$$n \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$$

car $\frac{1}{n^2}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. On sait que la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ est divergente et à termes positifs. Par critère de comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que $\sum n \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ est divergente.

- La suite des sommes partielles d'une séries à termes positifs est croissante. Si celle-ci est majorée, alors la série converge et si elle n'est pas majorée, la suite des sommes partielles diverge vers $+\infty$ et la série diverge.

EXEMPLE 2 En reprenant l'exemple précédent, on en déduit que :

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} k \sin\left(\frac{1}{k^2}\right) = +\infty$$

Conseils

- Ne pas oublier de préciser que la série étudiée est à termes positifs.
- Connaitre parfaitement la convergence des séries usuelles :
  - Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
  - Pour tout réel q, la série $\sum q^n$ converge si et seulement si $q \in]-1,1[$.
  - Pour tout réel λ, la série $\sum \frac{\lambda^n}{n!}$ converge.
- Il est important de connaitre tous les équivalents usuels au voisinage de 0 ($\sin(x)$, $\tan(x)$, $1-\cos(x)$, $e^x - 1$, $\ln(1+x)$, ...).
- Il est important de reconnaitre les séries télescopiques et le résultat associé : la série de terme général $a_{n+1} - a_n$ converge si et seulement si la suite (a_n) converge (voir fiche 51).

Exemple traité

Pour tout entier naturel non nul p, on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u(n,p) = \frac{1}{n(n+1) \times \cdots \times (n+p)}$$

Montrer que $\sum u(n,p)$ converge.

SOLUTION

Soit $p \geq 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u(n,p)$ est bien défini et positif. De plus, on a :

$$u(n,p) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{p+1}} \geq 0$$

Sachant que $p+1>1$, la série de Riemann de terme général $\dfrac{1}{n^{p+1}}$ converge donc, par critère de comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum u(n,p)$ converge.

Exercices

EXERCICE 46.1

Étudier la nature de $\sum e^{-n^2}$.

EXERCICE 46.2

Étudier la nature de $\sum \dfrac{\ln(n)}{n^3}$ puis celle de $\sum \dfrac{\ln(n)}{n^2}$.

EXERCICE 46.3

Considérons une série de terme général u_n à termes strictement positifs et notons pour tout $n \in \mathbb{N}$, S_n la somme partielle d'ordre n associée.
On suppose que la série $\sum u_n$ converge. Quelle est la nature de $\sum \dfrac{u_n}{S_n}$?

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 46.1 Il doit être facile de déterminer un réel positif q tel que pour tout $n \geq 0$, $e^{-n^2} \leq q^n$.

EXERCICE 46.2 Montrer que les termes généraux de ces séries sont négligeables devant des termes généraux de séries de Riemann convergentes

EXERCICE 46.3 Utiliser un équivalent sachant qu'une série converge si sa suite des sommes partielles converge.

EXERCICE 46.1

La série étudiée est à termes positifs. Pour tout $n \geq 0$, on a $n^2 \geq n$ (car n est un entier) donc $-n^2 \leq -n$ et ainsi par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$:

$$0 \leq e^{-n^2} \leq e^{-n} = q^n$$

où $q = e^{-1} \in [0, 1[$. La série de terme général q^n converge (série géométrique convergente) donc par critère de comparaison, la série de terme général e^{-n^2} converge.

EXERCICE 46.2

Par théorème des croissances comparées, on a :

$$n^2 \times \frac{\ln(n)}{n^3} = \frac{\ln(n)}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

donc

$$\frac{\ln(n)}{n^3} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Les séries étudiées sont à termes positifs et la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann convergente car $2 > 1$) donc par critère de comparaison, on en déduit que la série de terme général $\frac{\ln(n)}{n^3}$ converge.

De même, par théorème des croissances comparées, on a :

$$n^{\frac{3}{2}} \times \frac{\ln(n)}{n^2} = \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

donc

$$\frac{\ln(n)}{n^2} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$$

Les séries étudiées sont à termes positifs et la série de terme général $\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ converge (série de Riemann convergente car $\frac{3}{2} > 1$) donc par critère de comparaison, on en déduit que la série de terme général $\frac{\ln(n)}{n^2}$ converge.

EXERCICE 46.3

La série de terme général u_n converge. Puisque pour tout $n \geq 0$, $u_n > 0$, la suite des sommes partielles est croissante et converge vers un réel $S > 0$. Ainsi $S_n \underset{+\infty}{\sim} S$ donc :

$$\frac{u_n}{S_n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{u_n}{S}$$

Les termes généraux des séries étudiées sont à termes positifs et la série de terme général $\frac{u_n}{S}$ converge par hypothèse (S est une constante). Ainsi, par critère de comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que la série de terme général $\frac{u_n}{S}$ converge.

Solutions

47 Étudier la nature d'une série alternée

Quand on ne sait pas !

Une série alternée est une série dont le terme général est de la forme $(-1)^n u_n$ où (u_n) est une suite de nombres réels de signe constant.

Le théorème clé est le critère spécial des séries alternées :

Soit $\sum (-1)^n u_n$ une série alternée telle que $(|u_n|)_{n \geq 0}$ soit décroissante et convergente vers 0. Alors :

- La série $\sum (-1)^n u_n$ converge.
- Pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=m}^{+\infty} (-1)^k u_k$ est du signe de $(-1)^m u_m$ et on a :

$$\left| \sum_{k=m+1}^{+\infty} (-1)^k u_k \right| \leq |u_{m+1}|$$

Que faire ?

- Ne pas oublier de préciser que la suite (u_n) est de signe constant et bien vérifier les hypothèses.

  EXEMPLE 1 Les séries $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ sont des séries alternées.

  Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n^\alpha} \geq 0$, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$ et la suite de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha}$ est décroissante. D'après le critère spécial des séries alternées, les séries $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ sont donc convergentes.

  Remarquons que si $\alpha < 1$, elles ne sont pas absolument convergentes ce qui donne des exemples de séries semi-convergentes : convergentes mais non absolument convergentes.
- Le critère spécial permet à la fois de majorer une somme en valeur absolue mais aussi d'obtenir le signe de celle-ci.

EXEMPLE 2 Reprenons l'exemple précédent avec $\alpha = 2$. Le critère spécial précise que pour tout $m \geq 1$,

$$\left| \sum_{k=m}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \right| \leq \frac{1}{m^2}$$

et que le signe de cette somme est celui de $(-1)^m$.

On peut aussi montrer par exemple que :

$$0 \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

- Ce théorème est très utile pour montrer la convergence uniforme de certaines séries de fonctions : voir fiche 57.

Conseils

- Dès que le terme général d'une série fait intervenir $(-1)^n$, il faut penser au critère spécial des séries alternées.
- Il faut parfois être malin et ne pas se lancer tête baissée : toujours vérifier au préalable si la série ne serait pas, par hasard, absolument convergente.

Exemple traité

Étudier la nature de $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+2}}$.

SOLUTION

La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x+2}}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$: en effet, celle-ci est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ par les opérations usuelles et on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$f'(x) = -\frac{1}{2}(x+2)^{-3/2} < 0$$

Ainsi, la suite de terme général $\frac{1}{\sqrt{n+2}}$ est aussi décroissante, positive et converge vers 0.

Par critère spécial des séries alternées, on en déduit que la série de terme général $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+2}}$ converge.

Exercices

EXERCICE 47.1

Étudier la nature de $\sum \frac{(-1)^n}{n^3+1}$.

EXERCICE 47.2

Étudier la nature de $\sum (-1)^n u_n$ où pour tout $n \geq 0$,

$$u_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$$

EXERCICE 47.3

Posons pour tout entier $n \geq 1$,

$$u_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$$

1. Soient $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ deux suites à termes strictement positifs et divergentes vers $+\infty$. Montrer que si $a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n$ alors $\ln(a_n) \underset{+\infty}{\sim} \ln(b_n)$.
2. Étudier les variations de $(\ln(u_n))_{n\geq 1}$ et déterminer à l'aide de la formule de Stirling, un équivalent de $\ln(u_n)$ en $+\infty$. En déduire la nature de la série de terme général $\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n!}}$.

➲ Source : Centrale PSI

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 47.1 Appliquer le critère spécial.

EXERCICE 47.2 Étudier tout d'abord la suite $(u_n)_{n\geq 0}$: monotonie, signe, convergence.

EXERCICE 47.3

1. Remarquer que $u_n = v_n \times \frac{u_n}{v_n}$.
2. Rappelons la formule de Stirling : $n! \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$.

EXERCICE 47.1

La suite de terme général $\dfrac{1}{n^3+1}$ est positive, décroissante (la fonction associée l'est sur $\mathbb{R}_+$) et converge vers 0. D'après le critère spécial des séries alternées, la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^3+1}$ est donc convergente.

EXERCICE 47.2

Pour tout $n \geq 0$, la fonction $x \mapsto x^n e^{-x}$ est positive et continue sur $[0,1]$ donc par positivité de l'intégrale (les bornes sont dans l'ordre croissant), u_n est positif.

Pour tout $n \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \int_0^1 x^{n+1} e^{-x} dx - \int_0^1 x^n e^{-x} dx \\ &= \int_0^1 x^n e^{-x}(x-1) dx \end{aligned}$$

Or pour tout $x \in [0,1]$, $x^n e^{-x} \geq 0$ et $x - 1 \leq 0$ donc par positivité de l'intégrale (bornes dans l'ordre croissant), $u_{n+1} - u_n$ est négatif et ainsi la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.

Pour tout $x \in [0,1]$, on a par décroissance de $t \mapsto e^{-t}$ sur $\mathbb{R}$:

$$e^{-1} \leq e^{-x} \leq 1$$

puis sachant que $x^n \geq 0$:

$$e^{-1} x^n \leq x^n e^{-x} \leq x^n$$

Par croissance de l'intégrale, on en déduit que :

$$\int_0^1 e^{-1} x^n dx \leq u_n \leq \int_0^1 x^n dx$$

ou encore :

$$\frac{e^{-1}}{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$$

Par théorème d'encadrement, on en déduit que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0.

Finalement, la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est positive, décroissante et converge vers 0. D'après le critère spécial des séries alternées, la série $\sum (-1)^n u_n$ est donc convergente.

EXERCICE 47.3

1 Pour tout entier $n \geq 0$, a_n et b_n sont strictement positifs donc on a :

$$\ln(a_n) = \ln\left(b_n \times \frac{a_n}{b_n}\right) = \ln(b_n) + \ln\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$$

Sachant que $a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n$ et par continuité du logarithme népérien en 1, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \ln\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = 0$$

Sachant que $\ln(b_n)$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, on en déduit que :

$$\ln\left(\frac{a_n}{b_n}\right) \underset{+\infty}{=} o(\ln(b_n))$$

donc $\ln(a_n) \underset{+\infty}{=} \ln(b_n) + o(\ln(b_n))$ et finalement $\ln(a_n) \underset{+\infty}{\sim} \ln(b_n)$.

2 Pour tout $n \geq 1$, on a :

$$\ln(u_n) = -\frac{1}{n}\ln(n!)$$

Sachant que $n!$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, on a d'après la formule de Stirling et la première question :

$$\ln(u_n) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{n}\ln(n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}) = -\ln(n) + 1 - \frac{1}{2n}\ln(2\pi n)$$

donc $\ln(u_n) \underset{+\infty}{\sim} -\ln(n)$. Ainsi $(\ln(u_n))_{n\geq 1}$ diverge vers $-\infty$ et par composition avec l'exponentielle, on en déduit que (u_n) converge vers 0.

Étudions maintenant la monotonie de $(u_n)_{n\geq 1}$. Pour tout $n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned}
\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) &= \frac{\ln(n!)}{n} - \frac{\ln((n+1)!)}{n+1} \\
&= \frac{(n+1)\ln(n!) - n\ln((n+1)!)}{n(n+1)} \\
&= \frac{(n+1)\ln(n!) - n\ln(n+1) - n\ln(n!)}{n(n+1)} \\
&= \frac{\ln(n!) - n\ln(n+1)}{n(n+1)} \\
&= \frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}(\ln(k) - \ln(n+1))
\end{aligned}$$

Chaque terme de la somme est négatif donc on en déduit que $(\ln(u_n))_{n\geq 1}$ est décroissante donc $(u_n)_{n\geq 1}$ l'est aussi (par composition avec la fonction exponentielle qui est croissante sur $\mathbb{R}$).

Finalement, $(u_n)_{n\geq 1}$ est une suite positive décroissante convergeant vers 0 donc par le critère spécial des séries alternées, la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n!}}$ converge.

Solutions

48

Étudier la nature d'une série qui n'est pas de signe constant

Quand on ne sait pas !

Si une série n'est pas de signe constant, il est impossible d'utiliser les critères liés aux séries à termes positifs. L'étude du signe du terme général d'une série est donc très important quand on débute un exercice.

Que faire ?

- On commence par étudier la convergence absolue de la série : on se ramène ainsi à une série à termes positifs (voir fiche 46).

  EXEMPLE 1 Étudions la nature de la série $\sum \frac{(-1)^n}{n} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

  Pour tout entier $n \geq 1$,

$$\left|\frac{(-1)^n}{n} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right| = \frac{1}{n} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$$

  La série de terme général positif $\frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann convergente car $2 > 1$) donc par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ converge absolument donc converge.
- Si le terme général de la série est de la forme $(-1)^n v_n$: penser au critère spécial des séries alternées (voir fiche 47).
- Il est parfois possible d'obtenir un développement asymptotique du terme général de la série : cela permet de conclure par somme de séries convergentes/divergentes.

Conseils

- La première étape lors de l'étude d'une série est de savoir si la série est de signe constant ou non.

- Attention : les critères de comparaison ne s'appliquent par pour des séries à signe non constant.
- L'étude de la convergence absolue est intéressant quand des expressions du type $(-1)^n$, $\cos(n)$ ou encore $\sin(n)$, interviennent dans la définition du terme général.

Exemple traité

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \exp\left((-1)^n \dfrac{\ln(n)}{n}\right) - 1$.

SOLUTION

D'après le théorème des croissances comparées (et par produit avec une suite bornée), on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{(-1)^n \ln(n)}{n} = 0$$

Ainsi, d'après le développement limité de la fonction exponentielle en 0 à l'ordre deux, on a :

$$u_n \underset{+\infty}{=} \frac{(-1)^n \ln(n)}{n} + \frac{\ln(n)^2}{2n^2} + o\left(\frac{\ln(n)^2}{n^2}\right)$$

La série de terme général $\dfrac{(-1)^n \ln(n)}{n}$ converge par critère spécial des séries alternées : une simple étude de fonction montre que $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$ est décroissante sur $[e, +\infty[$ donc la suite de terme général $\dfrac{\ln(n)}{n}$ est décroissante (à partir du rang 3) et est positive et convergente vers 0. On a maintenant :

$$\frac{\ln(n)^2}{2n^2} + o\left(\frac{\ln(n)^2}{n^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)^2}{2n^2}$$

Or par théorème des croissances comparées, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} n^{3/2} \times \frac{\ln(n)^2}{2n^2} = \frac{1}{2} \lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(n)^2}{\sqrt{n}} = 0$$

donc

$$\frac{\ln(n)^2}{2n^2} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

La série de terme général positif $\dfrac{1}{n^{3/2}}$ est convergente (série de Riemann) donc par critère de comparaison, la série de terme général $\dfrac{\ln(n)^2}{2n^2}$ est convergente et par critère de comparaison des séries à termes positifs (la première série étudiée est à termes positifs donc l'autre aussi à partir d'un certain rang par équivalences) la série de terme général :

$$\frac{\ln(n)^2}{2n^2} + o\left(\frac{\ln(n)^2}{n^2}\right)$$

l'est aussi. Par somme, on en déduit que la série de terme général u_n converge.

Exercices

EXERCICE 48.1

Étudier la nature de $\sum \sin\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right)$.

EXERCICE 48.2

Étudier la nature de $\sum \tan\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$.

EXERCICE 48.3

Étudier la nature de $\sum \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$ suivant les valeurs de $\alpha > 0$.

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 48.1 $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$

EXERCICE 48.2 Utiliser le développement limité de $\tan(x)$ en 0 à l'ordre trois.

EXERCICE 48.3 Utiliser le développement limité de $\ln(1+x)$ en 0 à l'ordre deux.

Solutions des exercices

EXERCICE 48.1

Par produit d'une suite bornée et d'une suite convergeant vers 0, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = 0$ donc d'après l'indication,

$$\left|\sin\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right)\right| \underset{+\infty}{\sim} \left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}$$

La série de terme général positif $\frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann avec $2 > 1$) donc par critère de comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que la série de terme général $\sin\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right)$ converge absolument donc converge.

EXERCICE 48.2

On sait que $\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$ donc

$$\begin{aligned}\tan\left(\frac{(-1)^n}{n}\right) &\underset{+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{3} \times \left(\frac{(-1)^n}{n}\right)^3 + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\\ &\underset{+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{n} + \frac{(-1)^n}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\end{aligned}$$

Les séries de termes généraux $\frac{(-1)^n}{n}$ et $\frac{(-1)^n}{3n^3}$ sont convergentes (critère spécial des séries alternées), la série de terme général $\frac{1}{n^3}$ est convergente (série de Riemann avec $3 > 1$) donc par critère de comparaison pour des séries à termes positifs, la série de terme général $o\left(\frac{1}{n^3}\right)$ converge. Ainsi, par somme de séries convergentes, la série étudiée converge.

EXERCICE 48.3

On sait que α est strictement positif donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha} = 0$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) &\underset{+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - \frac{1}{2}\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)^2 + \mathrm{o}\left(\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)^2\right)\\ &\underset{+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - \frac{1}{2n^{2\alpha}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)\end{aligned}$$

La série de terme général $\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge (critère spécial des séries alternées). De plus, on a $-\frac{1}{2n^{2\alpha}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^{2\alpha}}$ et la série de terme général $-\frac{1}{2n^{2\alpha}}$ (termes négatifs) converge si et seulement si $2\alpha > 1$ donc par critère de comparaison des séries à termes négatifs (l'autre terme général est négatif à partir d'un certain rang), la série de terme général $-\frac{1}{2n^{2\alpha}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)$ converge si et seulement si $2\alpha > 1$. Ainsi, par somme, la série étudiée converge si et seulement $\alpha > \frac{1}{2}$.

Solutions

49 Utiliser le critère de d'Alembert

Quand on ne sait pas !

Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs. Supposons que :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$$

avec éventuellement $\ell = +\infty$. Alors :

- Si $\ell \in [0, 1[$, la série $\sum u_n$ converge.
- Si $\ell > 1$ ou $\ell = +\infty$, la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.
- Si $\ell = 1$, on ne peut rien conclure.

Que faire ?

- Ne pas oublier de préciser que la suite (u_n) est à termes strictement positifs.
- Le critère de d'Alembert est très utile quand le terme général de la série étudiée est définie à l'aide de produits, puissances ou factorielles.

EXEMPLE 1 Étudions la nature de la série $\sum \frac{a^n}{n!}$ où $a \in \mathbb{R}$.

Soit $a \in \mathbb{R}$. Si $a = 0$ alors les termes de la série sont nuls à partir du rang 1 donc la série converge. Si $a \neq 0$, la série étudiée a des termes différents de 0 mais n'est pas à termes strictement positifs si $a < 0$: nous étudions donc la convergence absolue. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\left|\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\right|}{\left|\frac{a^n}{n!}\right|} = \frac{|a|^{n+1} n!}{|a|^n (n+1)!} = \frac{|a|}{n+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 < 1$$

D'après le critère de d'Alembert, la série $\sum \frac{a^n}{n!}$ est absolument convergente donc convergente. Cette série s'appelle la série exponentielle et permet de définir la loi de Poisson.

Conseils

- Si le terme général u_n de la série étudiée n'est pas strictement positif mais ne s'annule jamais, il est toujours possible d'étudier la convergence absolue de celle-ci à l'aide du critère de d'Alembert. Il suffit d'appliquer celui-ci à la série de terme général $|u_n|$.
- Le cas limite $\ell = 1$ est fréquent. Il faut dans ce cas utiliser un autre critère pour étudier la série (voir fiches 46 et 47).

Exemple traité

Étudier la nature de la série $\sum \frac{n!}{n^n}$.

SOLUTION

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{n!}{n^n}$. Alors $(u_n)_{n\geq 1}$ est une suite de réel strictement positifs et pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{n!}{n^n}} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \mathrm{e}^{-n\ln(1+\frac{1}{n})}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc

$$-n\ln(1+\frac{1}{n}) \underset{+\infty}{\sim} -1$$

et ainsi, par continuité de la fonction exponentielle en -1 :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \mathrm{e}^{-1} < 1$$

D'après le critère de d'Alembert, on en déduit que $\sum u_n$ converge.

Exercices

EXERCICE 49.1 Étudier la nature de $\sum \frac{n!}{2^{2n}}$.

EXERCICE 49.2 Soit $a > 0$. On pose pour tout $n \geq 1$,

$$u_n = \frac{a^n n!}{n^n}$$

1 Étudier la convergence de la série de terme général u_n lorsque a est différent de e.

2 Supposons que $a = \mathrm{e}$. Montrer que quand n tend vers $+\infty$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{+\infty}{=} \exp\left(\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

En déduire que la suite (u_n) est croissante à partir d'un certain rang. Qu'en déduit-on ?

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 49.1 Ne pas oublier de vérifier le signe du terme général.

EXERCICE 49.2

1 Utiliser le critère de d'Alembert.

2 Penser à faire un développement limité. Remarquer que :

$$\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2} + o(1)\right)$$

La terme général peut-il tendre vers 0 ?

Solutions des exercices

EXERCICE 49.1 Pour tout $n \geq 0$, $\dfrac{n!}{2^{2n}} > 0$ et

$$\frac{\frac{(n+1)!}{2^{2(n+1)}}}{\frac{n!}{2^{2n}}} = \frac{(n+1)!}{n!} \times \frac{2^{2n}}{2^{2n+2}} = \frac{n+1}{4} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

D'après le critère de d'Alembert, on en déduit que $\sum \dfrac{n!}{2^{2n}}$ diverge.

EXERCICE 49.2

1 Supposons que a est différent de e. Pour tout $n \geq 1$, on a $u_n = \dfrac{a^n n!}{n^n} > 0$ et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{a^n n!}{n^n}} = a(n+1) \times \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = a\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = a\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n}$$

Or $\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}$ et on a déjà montré dans l'exemple traité que :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} = \mathrm{e}^{-1} < 1$$

Ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = a\mathrm{e}^{-1}$$

Sachant que $a\mathrm{e}^{-1} < 1$ si et seulement si $a < e$ et $a\mathrm{e}^{-1} > 1$ si et seulement si $a >$ e, on en déduit d'après le critère de d'Alembert que la série de terme général u_n converge si $a <$ e et diverge si $a >$ e.

2 Supposons que $a =$ e. Les calculs de la question précédente impliquent que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \mathrm{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} = \mathrm{e}\times\exp\left(-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$$

Sachant que $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0$, on a au voisinage de $+\infty$:

$$-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = -n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = -1+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

et ainsi :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \mathrm{e}\times\exp\left(-1+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \exp\left(\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

On remarque que :

$$\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}+o(1)\right)$$

Le terme $\frac{1}{2}+o(1)$ tend vers $\frac{1}{2}$ quand n tend vers $+\infty$ donc on en déduit qu'à partir d'un certain rang, $\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right) > 0$ et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \exp\left(\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) > 1$$

Ainsi, à partir d'un certain rang, la suite (u_n) est croissante. La suite étant strictement positive, celle-ci ne peut pas converger vers 0 donc la série de terme général u_n diverge grossièrement lorsque $a =$ e.

50 Reconnaitre un produit de Cauchy

Quand on ne sait pas !

On appelle produit de Cauchy des séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$, la série $\sum_{n\geq 0} w_n$ où pour tout $n \geq 0$, le terme w_n est défini par :

$$w_n = \sum_{p+q=n} u_p v_q = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} u_{n-k} v_k$$

Le théorème clé est le suivant :

Si les deux séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ convergent absolument alors le produit de Cauchy de ces deux séries est absolument convergent et on a :

$$\left(\sum_{k=0}^{+\infty} w_k\right) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} v_k\right)$$

Que faire ?

On commence par justifier la convergence absolue des deux séries étudiées puis on détermine le terme général du produit de Cauchy.

EXEMPLE 1 Étudions le produit de Cauchy de $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n}$ avec elle-même.

Posons pour tout entier $n \geq 0$, $u_n = \frac{1}{2^n}$ et $v_n = \frac{1}{2^n}$. Les séries de termes généraux u_n et v_n convergent absolument car ce sont des séries géométriques avec une raison appartenant à $]-1,1[$. Ainsi, le produit de Cauchy étudié est absolument convergent. Pour tout entier $n \geq 0$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2^k} \times \frac{1}{2^{n-k}}\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^n} = \frac{n+1}{2^n}$$

On en déduit alors que la série de terme général $\dfrac{n+1}{2^n}$ converge absolument et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)}{2^n} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}\right)^2 = \left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right)^2 = 2^2 = 4$$

Conseils

- Ne pas oublier de justifier la convergence absolue des deux séries.
- Il est plus simple de travailler avec des suites dont le premier indice est 0. Si ce n'est pas le cas, ne pas hésiter à rajouter des termes nuls à la suite.

Exemple traité

On définit pour tout nombre complexe z, $\exp(z)$ de la manière suivante :

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$$

Justifier que cela a un sens pour tout nombre complexe z et montrer que :

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2,\ \exp(z+z') = \exp(z)\exp(z')$$

SOLUTION

Soit $z \in \mathbb{C}$. La série $\sum\limits_{k\geq 0} \dfrac{z^k}{k!}$ converge (absolument) pour $z = 0$ car ses termes sont nuls à partir du rang 1. Si z est différent de 0, le terme général de cette série ne s'annule pas et on a pour tout $k \geq 0$,

$$\frac{\left|z^{k+1}/(k+1)!\right|}{\left|z^k/k!\right|} = \frac{|z|}{k+1}$$

et

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{|z|}{k+1} = 0 < 1$$

D'après le critère de d'Alembert, on en déduit que la série est absolument convergente. Ainsi, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\exp(z)$ est bien défini.

Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$. Les séries dont les sommes sont $\exp(z)$ et $\exp(z')$ convergent absolument donc le produit de Cauchy de celles-ci converge absolument. Déterminons son terme général : pour tout $n \geq 0$,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \times \frac{(z')^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!}\binom{n}{k} z^k (z')^{n-k} = \frac{1}{n!}(z+z')^n$$

par linéarité et d'après la formule du binôme de Newton. Ainsi :

$$\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(z')^k}{k!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z+z')^n}{n!}$$

ou encore $\exp(z)\exp(z') = \exp(z+z')$.

Exercices

EXERCICE 50.1

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose :

$$a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

1. Montrer que les séries de termes généraux a_n et b_n convergent.
2. Déterminer la série produit de Cauchy de ces deux séries. Est-elle convergente ?
3. Qu'en déduit-on ?

EXERCICE 50.2

Soit z un nombre complexe tel que $|z| < 1$. Écrire $\dfrac{e^z}{1-z}$ comme la somme d'une série convergente.

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 50.1

1. Utiliser le critère spécial des séries alternées.
2. Minorer, en valeur absolue, le terme général de la série produit de Cauchy.
3. Les séries de termes généraux a_n et b_n sont-elles absolument convergentes ?

EXERCICE 50.2 Utiliser la série exponentielle et la série géométrique.

EXERCICE 50.1

1 La suite de terme général $\dfrac{1}{n}$ est positive, décroissante et converge vers 0. D'après le critère spécial des séries alternées, on en déduit que les séries de termes généraux a_n et b_n convergent.

2 Notons pour tout $n \geq 1$, w_n le terme général du produit de Cauchy des séries de termes généraux a_n et b_n. On a pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} w_n &= \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k(-1)^{n-k}}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}} \\ &= (-1)^n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$|w_n| = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}}$$

Pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$, on a $\sqrt{k} \leq \sqrt{n}$ et $\sqrt{n-k} \leq \sqrt{n}$ donc par produit de termes positifs,

$$0 < \sqrt{k}\sqrt{n-k} \leq n$$

Par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que :

$$\frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}} \geq \frac{1}{n}$$

puis par sommation :

$$|w_n| \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = 1$$

Ainsi (w_n) ne peut pas converger vers 0 et la série de terme général w_n diverge grossièrement.

3 Pour tout $n \geq 1$,

$$|a_n| = |b_n| = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

On reconnait le terme général d'une série de Riemann divergente donc les séries de termes généraux a_n et b_n ne convergent pas absolument. On en déduit que l'hypothèse de convergence absolue des séries étudiées est importante pour obtenir la convergence de la série produit de Cauchy associée.

EXERCICE 50.2

Soit z un nombre complexe tel que $|z| < 1$. D'après le cours, les séries de termes généraux $\frac{z^n}{n!}$ et z^n sont absolument convergentes et on a :

$$\frac{e^z}{1-z} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n\right)$$

Par convergence absolue des deux séries, le produit de Cauchy de celles-ci est aussi absolument convergent. Déterminons son terme général : pour tout entier $n \geq 0$,

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{z^k}{k!} \times z^{n-k}\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^n}{k!} = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right) z^n$$

Ainsi,

$$\frac{e^z}{1-z} = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right) z^n$$

Utiliser une comparaison suite-série

51

Quand on ne sait pas !

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite. Pour tout entier $n \geq 0$, on a par télescopage :

$$\sum_{k=0}^{n}(u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_0$$

On en déduit le résultat suivant :

La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge si et seulement si la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge.

Que faire ?

- Si le but est d'étudier la suite $(u_n)_{n\geq 0}$, la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ peut être étudiée à l'aide d'un critère de comparaison (en obtenant un équivalent ou un développement asymptotique).

Conseils

- Si le terme général d'une série est une fraction rationnelle, une décomposition en éléments simple permet parfois de se ramener à une série télescopique.
- Le calcul de la somme partielle permettant de prouver le résultat principal est très important et doit pouvoir être refait rapidement car il permet de déterminer la somme de la série en cas de convergence. On peut en fait se passer du théorème et reprouver directement celui-ci.

Exemple traité

Déterminer la nature de la série suivante et donner sa somme en cas de convergence :

$$\sum \ln\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)$$

SOLUTION

Pour tout entier $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right) &= 2\ln(n+1) - \ln(n) - \ln(n+2) \\ &= \ln(n+1) - \ln(n) + \ln(n+1) - \ln(n+2)\end{aligned}$$

On en déduit que pour tout entier $N \geq 1$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N} \ln\left(\frac{(k+1)^2}{k(k+2)}\right) &= \sum_{k=1}^{N}(\ln(k+1) - \ln(k) + \ln(k+1) - \ln(k+2)) \\ &= \sum_{k=1}^{N}(\ln(k+1) - \ln(k)) + \sum_{k=1}^{N}(\ln(k+1) - \ln(k+2)) \\ &= \ln(N+1) - \ln(1) + \ln(2) - \ln(N+2) \quad \text{(télescopage)} \\ &= \ln(2) + \ln\left(\frac{N+1}{N+2}\right)\end{aligned}$$

On sait que :

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{N+1}{N+2} = 1$$

donc par continuité du logarithme népérien en 1, on en déduit que la série étudiée converge et que :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{(k+1)^2}{k(k+2)}\right) = \ln(2)$$

Exercices

EXERCICE 51.1

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1} - \alpha\ln(n)$$

1. Donner un équivalent de $u_{n+1} - u_n$ quand n tend vers $+\infty$.
2. Déterminer α pour que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge.

EXERCICE 51.2

Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $a_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$$a_{n+1} = 1 - \mathrm{e}^{-a_n}$$

1 Étudier la convergence de la suite $(a_n)_{n\geq 0}$.

2 Déterminer la nature de la série de terme général a_n^2.

3 Déterminer la nature de la série de terme général a_n. On pourra commencer par étudier la série de terme général $\ln\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$.

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 51.1

1 Utiliser un développement limité en distinguant deux cas.

2 Utiliser le lien entre suite et série télescopique.

EXERCICE 51.2

1 Utiliser $f : x \mapsto 1 - e^{-x}$ qui vérifie $f(\mathbb{R}_+^*) \subset \mathbb{R}_+^*$.

2 Calculer $a_{n+1} - a_n$ et faire un développement limité pour obtenir un équivalent.

3 Calculer $\ln\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ et faire un développement limité pour obtenir un équivalent.

Solutions des exercices

EXERCICE 51.1

1 Soit $n \geq 1$. Alors :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{2k+1} - \alpha\ln(n+1) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1} + \alpha\ln(n) \\
&= \frac{1}{2n+3} - \alpha\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{2n+3} - \alpha\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\
&\underset{+\infty}{=} \frac{1}{2n+3} - \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\underset{+\infty}{=} \frac{n-\alpha(2n+3)}{n(2n+3)} + \frac{\alpha}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&\underset{+\infty}{=} \frac{(1-2\alpha)n - 3\alpha}{n(2n+3)} + \frac{\alpha}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}
$$

On distingue alors deux cas :

- Si $\alpha = \dfrac{1}{2}$, $1 - 2\alpha = 0$ et ainsi :

$$
\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &\underset{+\infty}{=} -\frac{3}{2n(2n+3)} + \frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&\underset{+\infty}{=} \frac{1}{n^2}\left(-\frac{3n^2}{2n(2n+3)} + \frac{1}{4} + o(1)\right)
\end{aligned}
$$

Sachant que :

$$
\lim_{n\to+\infty} -\frac{3n^2}{2n(2n+3)} = -\frac{3}{4}
$$

On en déduit que :

$$
u_{n+1} - u_n \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}
$$

- Si $\alpha \neq \dfrac{1}{2}$, $1 - 2\alpha \neq 0$ et ainsi :

$$
u_{n+1} - u_n \underset{+\infty}{=} \frac{1}{n}\left(\frac{(1-2\alpha)n - 3\alpha}{2n+3} + \frac{\alpha}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)
$$

On a :

$$
\lim_{n\to+\infty} \frac{(1-2\alpha)n - 3\alpha}{2n+3} = \frac{1-2\alpha}{2}
$$

On en déduit que :

$$
u_{n+1} - u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1-2\alpha}{2n}
$$

2 La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge si et seulement si la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ converge. D'après la question précédente, $u_{n+1} - u_n$ est équivalent, au voisinage de $+\infty$ et à une constante près, au terme général d'une série de Riemann (donc de signe constant) convergente si $\alpha = 1/2$ et divergente si $\alpha \neq 1/2$.

A partir d'un certain rang, $u_{n+1} - u_n$ est donc aussi de signe constant et par critère de comparaison, on en déduit que la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ converge si et seulement $\alpha = 1/2$.

Finalement, la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge si et seulement $\alpha = 1/2$.

EXERCICE 51.2

1 Puisque pour tout $x > 0$, $-x < 0$, on a $e^{-x} < 1$ puis $1 - e^{-x} > 0$. Ainsi, en posant $f : x \mapsto 1 - e^{-x}$, on a $f(\mathbb{R}_+^*) \subset \mathbb{R}_+^*$. Or $a_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = f(a_n)$. Par récurrence, on montre donc que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n > 0$. On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq 1 + x$ donc pour tout $n \geq 0$,

$$a_{n+1} = 1 - \mathrm{e}^{-a_n} \leq 1 - (1 - a_n) = a_n$$

La suite (a_n) est donc décroissante et minorée par 0 donc elle converge. Notons $\ell \geq 0$ sa limite. Puisque la fonction exp est continue sur $\mathbb{R}$, en passant à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans la relation de récurrence définissant la suite, on obtient :

$$\ell = 1 - \mathrm{e}^{-\ell}$$

Or en étudiant la fonction $g : x \longmapsto x + \mathrm{e}^{-x} - 1$, on montre que $g(x) = 0$ n'admet que 0 comme solution et ainsi, la suite (a_n) converge vers 0.

2 On sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$ donc quand n tend vers $+\infty$:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n = 1 - \mathrm{e}^{-a_n} - a_n &= 1 - a_n - \left(1 - a_n + \frac{a_n^2}{2} + o\left(a_n^2\right)\right) \\ &= -\frac{a_n^2}{2} + o\left(a_n^2\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{a_n^2}{2} \end{aligned}$$

Or la suite (a_n) converge donc la série télescopique $\sum (a_{n+1} - a_n)$ converge aussi. Les termes généraux des séries étudiées sont négatifs donc, par critère de comparaison de séries à termes négatifs, la série de terme général $-\dfrac{a_n^2}{2}$ converge. Ainsi, la série $\sum a_n^2$ converge.

3 On a quand n tend vers $+\infty$:

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \ln\left(\frac{1 - \mathrm{e}^{-a_n}}{a_n}\right) &= \ln\left(\frac{1}{a_n}\left(a_n - \frac{a_n^2}{2} + o\left(a_n^2\right)\right)\right) \\ &= \ln\left(1 - \frac{a_n}{2} + o\left(a_n\right)\right) = -\frac{a_n}{2} + o\left(a_n\right) \end{aligned}$$

ce qui implique que :

$$\ln(a_{n+1}) - \ln(a_n) = \ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{a_n}{2}$$

Or la suite $(\ln(a_n))$ diverge vers $-\infty$ car (a_n) converge vers 0 (par valeurs positives) donc la série télescopique de terme général $\ln(a_{n+1}) - \ln(a_n)$ diverge aussi. Les termes généraux des séries étudiées sont négatifs donc par critère de comparaison de séries à termes négatifs, la série de terme général $-\dfrac{a_n}{2}$ diverge donc la série de terme général a_n diverge.

Solutions

52 Mettre en place une comparaison série intégrale

Quand on ne sait pas !

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue et monotone. Si l'on souhaite étudier le comportement asymptotique des $(S_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} f(k)$$

Il est possible de mettre en place une comparaison série-intégrale. Dans le cas où la série de terme général $f(k)$ converge, cette méthode permet aussi d'étudier le comportement de la suite des restes de cette série.

Que faire ?

- Supposons que f soit continue et croissante sur $\mathbb{R}_+$. Alors on prouve par croissance de l'intégrale que pour tout entier $k \geq 0$,

$$f(k) \leq \int_k^{k+1} f(t)\mathrm{d}t \leq f(k+1)$$

  On obtient alors par sommation un encadrement de S_n par des intégrales.
- Supposons que f soit continue et décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Alors pour tout entier $k \geq 0$,

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)\mathrm{d}t \leq f(k)$$

  De même, on obtient alors par sommation un encadrement de S_n par des intégrales.

Conseils

- L'encadrement de l'intégrale se retrouve facilement avec un dessin (comparaison avec l'aire de deux rectangles).
- Cette méthode est appropriée dès que la fonction est monotone et elle est efficace car il est plus simple d'étudier une intégrale qu'une somme.

Exemple traité

Déterminer un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3k+1}$ quand n tend vers $+\infty$.

SOLUTION

Notons pour tout entier $n \geq 1$, S_n la somme de l'énoncé. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{3x+1}$ est continue et décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $t \in [k, k+1]$,

$$\frac{1}{3(k+1)+1} \leq \frac{1}{3t+1} \leq \frac{1}{3k+1}$$

Par croissance de l'intégrale (les bornes sont dans l'ordre croissant), on a alors :

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{3(k+1)+1}\mathrm{d}t \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{3t+1}\mathrm{d}t \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{3k+1}\mathrm{d}t$$

et donc :

$$\frac{1}{3(k+1)+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{3t+1}\mathrm{d}t \leq \frac{1}{3k+1}$$

Par sommation pour k variant de 1 à $n \in \mathbb{N}^*$, on a d'après la relation de Chasles :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3(k+1)+1} \leq \int_1^{n+1} \frac{1}{3t+1}\mathrm{d}t \leq S_n$$

A l'aide d'un changement d'indice, on obtient :

$$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{3k+1} \leq \left[\frac{1}{3}\ln(3t+1)\right]_1^{n+1} \leq S_n$$

On a alors :

$$S_n + \frac{1}{3n+4} - \frac{1}{4} \leq \frac{1}{3}(\ln(3n+4) - \ln(4)) \leq S_n$$

On obtient donc un encadrement de S_n :

$$\frac{1}{3}\ln\left(\frac{3n}{4}+1\right) \leq S_n \leq \frac{1}{3}\ln\left(\frac{3n}{4}+1\right) + \frac{1}{4} - \frac{1}{3n+4}$$

Sachant que $\dfrac{3n}{4}+1 > 1$, $\ln\left(\dfrac{3n}{4}+1\right) > 0$ donc :

$$1 \leq \frac{S_n}{\ln\left(\frac{3n}{4}+1\right)} \leq 1 + \frac{1}{4\ln\left(\frac{3n}{4}+1\right)} - \frac{1}{\ln\left(\frac{3n}{4}+1\right)(3n+4)}$$

Par théorème d'encadrement, on en déduit alors un équivalent de S_n :

$$S_n \underset{+\infty}{\sim} \ln\left(\frac{3n}{4}+1\right)$$

Remarquons que pour tout entier $n \geq 1$,

$$\ln\left(\frac{3n}{4}+1\right) = \ln\left(n\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{n}\right)\right) = \ln(n) + \ln\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{n}\right)$$

Par continuité de la fonction logarithme népérien en $\frac{3}{4}$, on sait que :

$$\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{n}\right) = \ln\left(\frac{3}{4}\right)$$

Ainsi,

$$S_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$$

Exercices

EXERCICE 52.1 On pose pour tout entier $n \geq 1$,

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}(H_{2n} - H_n) = \ln(2)$.

EXERCICE 52.2 Déterminer un équivalent de $\ln(n!)$ au voisinage de $+\infty$.

EXERCICE 52.3 On pose pour tout entier $n \geq 0$,

$$u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2+1}$$

Justifier que u_n est bien défini et montrer que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.
On admettra que pour tout réel $x > 0$,

$$\mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 52.1 Mettre en place une comparaison série-intégrale à l'aide de la fonction inverse.

EXERCICE 52.2 Remarquer que $\ln(n!) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k)$.

EXERCICE 52.3 Mettre en place une comparaison série-intégrale à l'aide de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$.

Solutions des exercices

EXERCICE 52.1 Soit $n \geq 1$. Alors :

$$H_{2n} - H_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc pour tout $t \in [k, k+1]$,

$$\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$$

puis par croissance de l'intégrale (les bornes étant dans l'ordre croissant) :

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1} \mathrm{d}t \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} \mathrm{d}t \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k} \mathrm{d}t$$

et donc

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} \mathrm{d}t \leq \frac{1}{k} \tag{52.1}$$

Soit $n \geq 1$. En sommant l'inégalité de gauche de (52.1) pour k variant de n à $2n-1$, on obtient d'après la relation de Chasles :

$$\sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k+1} \leq \int_n^{2n} \frac{1}{t} \mathrm{d}t$$

A l'aide d'un changement d'indice et en calculant l'intégrale, on obtient :

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \leq \ln(2n) - \ln(n) = \ln(2) + \ln(n) - \ln(n) = \ln(2)$$

En sommant l'inégalité de droite de (52.1) pour k variant de $n+1$ à $2n$, on obtient de la même manière :

$$\ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) \leq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

et ainsi :

$$\ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) \leq H_{2n} - H_n \leq \ln(2)$$

Par continuité de la fonction logarithme en 2, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) = \ln(2)$$

On obtient alors le résultat par théorème d'encadrement.

EXERCICE 52.2 La fonction logarithme népérien est continue est croissante sur $[1,+\infty[$. Pour tout entier $k \geq 1$ et pour tout réel $t \in [k, k+1]$,

$$\ln(k) \leq \ln(t) \leq \ln(k+1)$$

Par croissance de l'intégrale (les bornes sont dans l'ordre croissant), on en déduit que :

$$\int_k^{k+1} \ln(k)\mathrm{d}t \leq \int_k^{k+1} \ln(t)\mathrm{d}t \leq \int_k^{k+1} \ln(k+1)\mathrm{d}t$$

et ainsi :

$$\ln(k) \leq \int_k^{k+1} \ln(t)\mathrm{d}t \leq \ln(k+1)$$

En sommant l'inégalité de gauche pour k variant de 1 à $n \geq 1$, on a :

$$\ln(n!) = \ln(1 \times 2 \times \cdots \times n) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k) \leq \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \ln(t)\mathrm{d}t$$

ce qui donne d'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}
\ln(n!) &\leq \int_1^{n+1} \ln(t)\mathrm{d}t \\
&= [t\ln(t) - t]_1^{n+1} \\
&= (n+1)\ln(n+1) - (n+1) + 1 \\
&= (n+1)\ln(n+1) - n
\end{aligned}$$

On utilise maintenant l'inégalité de droite, en remplaçant k (entier supérieur ou égal à 2) par $k-1 \geq 1$:

$$\int_{k-1}^{k} \ln(t)\mathrm{d}t \leq \ln(k)$$

En remarquant que $\ln(1) = 0$, on obtient par sommation que pour tout entier $n \geq 2$,

$$\sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \ln(t)\mathrm{d}t \leq \sum_{k=2}^{n} \ln(k) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k) = \ln(n!)$$

ce qui donne d'après la relation de Chasles :

$$\int_{1}^{n} \ln(t)\mathrm{d}t \leq \ln(n!)$$

donc en reprenant le calcul précédent :

$$n\ln(n) - n + 1 \leq \ln(n!)$$

Remarquons que pour tout entier $n \geq 1$,

$$\ln(n+1) = \ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

et par continuité de la fonction logarithme népérien en 1 :

$$\lim_{n \to +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0$$

On en déduit que $\ln(n+1) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$ et on a :

$$n\ln(n) - n + 1 \underset{+\infty}{\sim} n\ln(n) \ \text{ et } (n+1)\ln(n+1) - n \underset{+\infty}{\sim} n\ln(n)$$

On sait que pour tout entier $n \geq 2$,

$$n\ln(n) - n + 1 \leq \ln(n!) \leq (n+1)\ln(n+1) - n$$

On divise alors chaque terme de l'inégalité par $n\ln(n)$ (qui est strictement positif) :

$$\frac{n\ln(n) - n + 1}{n\ln(n)} \leq \frac{\ln(n!)}{n\ln(n)} \leq \frac{(n+1)\ln(n+1) - n}{n\ln(n)}$$

On obtient alors par encadrement que :

$$\ln(n!) \underset{+\infty}{\sim} n\ln(n)$$

Solutions

EXERCICE 52.3 On a :

$$\frac{1}{k^2+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{k^2}$$

et la série de terme général $\frac{1}{k^2}$ converge (série de Riemann avec $2 > 1$). Par critère de comparaison pour des séries à termes positifs, on en déduit que la série de terme général $\frac{1}{k^2+1}$ converge donc pour tout $n \geq 0$, u_n est bien défini comme le reste d'une série convergente. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2+1}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ (inverse d'une fonction strictement positive et croissante sur cet intervalle). Ainsi, pour tout $t \in [k, k+1]$,

$$\frac{1}{(k+1)^2+1} \leq \frac{1}{t^2+1} \leq \frac{1}{k^2+1}$$

puis par croissance de l'intégrale (les bornes étant dans l'ordre croissant) :

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{(k+1)^2+1} \mathrm{d}t \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t^2+1} \mathrm{d}t \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k^2+1} \mathrm{d}t$$

donc

$$\frac{1}{(k+1)^2+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t^2+1} \mathrm{d}t \leq \frac{1}{k^2+1} \tag{52.2}$$

Soit $n \geq 1$ et $N \geq n$. On somme l'inégalité de droite précédente pour k variant de n à N :

$$\sum_{k=n}^{N} \int_k^{k+1} \frac{1}{t^2+1} \mathrm{d}t \leq \sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k^2+1}$$

ce qui donne d'après la relation de Chasles :

$$\int_n^{N+1} \frac{1}{t^2+1} \mathrm{d}t \leq \sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k^2+1}$$

On somme maintenant l'inégalité de gauche de (52.2) pour k variant de $n-1$ (qui est positif car $n \geq 1$) à $N-1$ et on utilise encore la relation de Chasles pour obtenir :

$$\sum_{k=n-1}^{N-1} \frac{1}{(k+1)^2+1} \leq \int_{n-1}^{N} \frac{1}{t^2+1} \mathrm{d}t$$

En changeant d'indice dans la somme précédente, on obtient en regroupant les deux inégalités obtenues :

$$\int_n^{N+1} \frac{1}{t^2+1} \mathrm{d}t \leq \sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k^2+1} \leq \int_{n-1}^{N} \frac{1}{t^2+1} \mathrm{d}t$$

ou encore en calculant les intégrales :

$$\mathrm{Arctan}(N+1) - \mathrm{Arctan}(n) \leq \sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k^2+1} \leq \mathrm{Arctan}(N) - \mathrm{Arctan}(n-1)$$

Par passage à la limite quand N tend vers $+\infty$, on obtient alors :

$$\frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}(n) \leq u_n \leq \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}(n-1)$$

D'après l'égalité admise, on a donc pour tout $n > 1$:

$$\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{n}\right) \leq u_n \leq \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{n-1}\right)$$

On sait que $\mathrm{Arctan}(x) \underset{0}{\sim} x$ donc on en déduit que

$$\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n} \text{ et } \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{n-1}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n-1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

En divisant l'inégalité précédente par $\frac{1}{n}$ (qui est strictement positif), on a :

$$n\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{u_n}{\frac{1}{n}} \leq n\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{n-1}\right)$$

Par théorème d'encadrement, on en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\frac{1}{n}} = 1$$

et finalement :

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

Utiliser la sommation des relations de comparaison

Quand on ne sait pas !

Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries. On suppose que pour tout entier $n \geq 0$, $v_n \geq 0$.

Supposons que les séries de termes généraux u_n et v_n convergent. Posons alors :

$$\forall n \geq 0,\ R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \text{ et } Z_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$$

- Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ alors $R_n \underset{+\infty}{\sim} Z_n$.
- Si $u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n)$ alors $R_n \underset{+\infty}{=} o(Z_n)$.
- Si $u_n \underset{+\infty}{=} O(v_n)$ alors $R_n \underset{+\infty}{=} O(Z_n)$.

On a un résultat similaire quand les séries divergent :

Supposons que les séries de termes généraux u_n et v_n divergent. Posons alors :

$$\forall n \geq 0,\ S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \text{ et } T_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$$

- Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ alors $S_n \underset{+\infty}{\sim} T_n$.
- Si $u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n)$ alors $S_n \underset{+\infty}{=} o(T_n)$.
- Si $u_n \underset{+\infty}{=} O(v_n)$ alors $S_n \underset{+\infty}{=} O(T_n)$.

Que faire ?

- Il est fréquent d'utiliser une comparaison série-intégrale pour obtenir l'équivalent d'une somme partielle ou d'un reste d'une série dont le terme général est « simple » puis d'utiliser le résultat précédent pour s'y ramener.
- Penser à préciser la positivité de $(v_n)_{n\geq 0}$.

Conseils

- Les preuves des résultats précédents sont classiques et souvent demandées aux concours : il est important de les retravailler.

Exemple traité

En admettant que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$, déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln(n)} \sum_{k=1}^{n} \frac{(k+1)^k}{k^{k+1}}$.

SOLUTION

Pour tout entier $k \geq 1$, on a :

$$\frac{(k+1)^k}{k^{k+1}} = \frac{1}{k}\left(\frac{k+1}{k}\right)^k = \frac{1}{k}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k$$

Remarquons que :

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^k = \exp\left(k\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)$$

Si k tend vers $+\infty$, $\frac{1}{k}$ tend vers 0 donc

$$\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{k}$$

ce qui implique que :

$$k\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \underset{+\infty}{\sim} 1$$

donc

$$\lim_{k\to+\infty} k\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = 1$$

Par continuité de l'exponentielle en 1, on en déduit que :

$$\lim_{k\to+\infty} \left(1+\frac{1}{k}\right)^k = e$$

On en déduit que :

$$\frac{(k+1)^k}{k^{k+1}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{e}{k}$$

La série (à termes positifs) harmonique diverge donc la série de terme général positif $\dfrac{(k+1)^k}{k^{k+1}}$ aussi et par sommation d'équivalents, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(k+1)^k}{k^{k+1}} \underset{+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n} \frac{e}{k}$$

donc d'après l'énoncé :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(k+1)^k}{k^{k+1}} \underset{+\infty}{\sim} e\ln(n)$$

et ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln(n)} \sum_{k=1}^{n} \frac{(k+1)^k}{k^{k+1}} = e$$

Exercices

EXERCICE 53.1

On admet l'existence d'un réel γ tel que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$$

On pose pour tout entier $n \geq 1$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+\sqrt{k}}$$

1 Déterminer un équivalent simple de S_n quand n tend vers $+\infty$.

2 Montrer l'existence d'un réel C tel que :

$$S_n \underset{+\infty}{=} \ln(n) + C + o(1)$$

EXERCICE 53.2

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle convergeant vers un réel ℓ. Démontrer le lemme de Césaro, c'est-à-dire :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} u_k = \ell$$

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 53.1

1 Déterminer un équivalent de $\dfrac{1}{k+\sqrt{k}}$ quand k tend vers $+\infty$.

2 Calculer $S_n - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

EXERCICE 53.2 Distinguer le cas $\ell = 0$ et le cas $\ell \neq 0$.

Solutions des exercices

EXERCICE 53.1

1 On a :

$$\frac{1}{k+\sqrt{k}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{k}$$

La série de terme général positif $\frac{1}{k}$ diverge donc par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série de terme général $\frac{1}{k+\sqrt{k}}$ aussi et par sommation d'équivalents, on a :

$$S_n \underset{+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

donc d'après l'énoncé :

$$S_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$$

2 Soit $n \geq 1$. On a :

$$S_n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+\sqrt{k}} - \frac{1}{k} \right) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k}}{(k+\sqrt{k})k} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+\sqrt{k})\sqrt{k}}$$

On a :

$$\frac{1}{(k+\sqrt{k})\sqrt{k}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{k^{3/2}}$$

La série de terme général positif $\frac{1}{k^{3/2}}$ converge (série de Riemann avec $\frac{3}{2} > 1$) donc par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série de terme général $\frac{1}{(k+\sqrt{k})\sqrt{k}}$ aussi. Ainsi, il existe un réel K tel que :

$$\lim_{n \to +\infty} S_n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = K$$

donc

$$S_n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{+\infty}{=} K + o(1)$$

D'après l'énoncé, on en déduit que :

$$S_n \underset{+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + K + o(1)$$

ce qui donne le résultat souhaité avec $C = K + \gamma$.

EXERCICE 53.2

Supposons que $\ell = 0$. Alors $u_n \underset{+\infty}{=} o(1)$. La série de terme général positif 1 diverge grossièrement donc par sommation d'une relation de comparaison, on en déduit que :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{+\infty}{=} o\left(\sum_{k=0}^{n} 1\right) = o(n+1)$$

donc

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} u_k \underset{+\infty}{=} o(1)$$

ce qui implique que :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} u_k = 0$$

Supposons que $\ell \neq 0$. Alors $u_n \underset{+\infty}{\sim} \ell$. La série de terme général positif ℓ diverge grossièrement donc par sommation d'équivalents, on en déduit que :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{+\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n} \ell = (n+1)\ell$$

donc

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} u_k \underset{+\infty}{\sim} \ell$$

ce qui implique que :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} u_k = \ell$$