Mohamed DIOURI
DOCTEUR INGENIEUR

Adil ELMARHOUM
INGENIEUR D'ETAT

MATHÉMATIQUES FINANCIÈRES

Cours et exercices corrigés

$$E = VN.n.t$$

$$I = C.n.t$$

$$C_n = C_0 (1+t)^n$$

$$Va = V_0 \frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$$

$$a = N.C \frac{t}{1-(1+t)^{-n}}$$

CENTRE DE RECHERCHE EN GESTION DE L'IGA

LES EDITIONS TOUBKAL

INSTITUT SUPERIEUR DU GENIE APPLIQUE

Mohamed DIOURI
Docteur Ingénieur
Président Fondateur de l'IGA

Adil ELMARHOUM
Docteur en statistique et informatique appliquée
Professeur Habilité Université Mohamed V Agdal

MATHEMATIQUES FINANCIERES

Cours et exercices avec solutions

Collection Sciences Techniques et Managements des éditions TOUBKAL
Publications du Centre de Recherche en Gestion (CRG) de l'IGA

MATHEMATIQUES FINANCIERES

Cours et exercices avec solutions

Dépôt légal N° 2008/1648
I.S.B.N. : 9981 – 25 – 587 – 4

Les livres de la collection Sciences Techniques et Management
sont co-édités par les éditions **TOUBKAL** et l'Institut supérieur du Génie Appliqué, **IGA**.

A la mémoire de Myriam

PREFACE

Très curieusement les mathématiques financières ne sont que peu enseignées et ne font l'objet que de très peu d'ouvrages et de manuels alors qu'elles pourraient être utiles à tout le monde.

- *peu enseignées : par exemple, les lycéens qui, en France et au Maroc, suivent la formation économique), et a fortiori les autres formations menant aux baccalauréats généraux, S ou L, (Scientifique ou Littéraire), n'ont aucun enseignement en ce domaine. Il faut attendre les formations de l'enseignement supérieur, et bien souvent, bac+3 voire bac+5, pour que les étudiants aient les mathématiques financières à leur programme et, encore, dans des filières spécialisées telles que économie, gestion ;*

- *peu d'ouvrages : alors que dans beaucoup de domaines de l'économie, de la gestion ou du management il y a pléthore de manuels ,15 ou 20 voire 30 ou plus, pour certaines matières, les manuels de mathématiques financières, en français, se comptent sur les doigts et encore sans doute d'une seule main*

- *Utiles à tout le monde : elles permettent de répondre à de multiples questions telles que par exemple :*

  . par rapport au paiement comptant, la proposition qui m'est faite de payer en x fois, correspond à quel taux d'intérêt sur le crédit qui me serait ainsi fait ?

  . J'envisage d'acheter un appartement en vue de le louer, quel loyer mensuel devrais-je fixer pour obtenir un rendement de y % ?

  . Quel est le rendement effectif de telle obligation ?

  . etc…

Dans ce manuel sont traités les principes de base et les aspects essentiels des mathématiques financières. La première partie est consacrée au court terme : intérêt simple et escompte à intérêt simple. La seconde partie concerne le moyen et le long termes : intérêts composés, annuités, emprunt indivis, emprunts obligataires, rentabilité des investissements. Des exercices, avec leurs solutions, clôturent chaque chapitre, permettant ainsi aux étudiants de s'entraîner s'ils le souhaitent.

Mais si cet ouvrage est en priorité destiné aux étudiants, il peut également être utile à toute personne qui veut prendre ses décisions en toute connaissance de cause. En effet, il est clair, pédagogique, détaillé, l'étudiant, et plus généralement le lecteur est ainsi conduit pas à pas, de nombreux exemples illustrant les différents points traités. Les démonstrations plus complexes, voire académiques, sont renvoyées en notes de lecture, ce qui est pédagogiquement excellent, puisque seuls les étudiants suffisamment formés en mathématiques peuvent les aborder, les autres sont invités à les admettre, ce qu'ils font habituellement avec aisance !

Le lecteur, quel qu'il soit, étudiant ou non, peut faire entière confiance aux auteurs dont les compétences en mathématiques sont certaines. Adil El Marhouh, ingénieur d'Etat en statistique et informatique, est enseignant chercheur à l'Université Mohamed V Agdal. Mohamed Diouri, docteur ingénieur, diplômé de l'université française, est professeur et animateur de séminaires. L'un et l'autre sont auteurs de manuels, notamment dans les domaines des statistiques et des probabilités, de l'électronique, et, pour Mohamed Diouri, du management.

Je félicite les auteurs pour la qualité de cet ouvrage qui, je n'en doute pas, sera très utile aux étudiants et à tous les lecteurs qui ont des décisions à prendre en matière financière.

Nicole Gautras
Professeur de Sciences Economiques à l'Université de Tours
Doyen Honoraire de la Faculté de Droit et Economie de Tours

SOMMAIRE

AVANT PROPOS

Le présent livre est un cours magistral de mathématiques financières conforme aux programmes d'enseignement des premières années des universités et des écoles publiques et privées de l'enseignement supérieur.

Chaque chapitre est organisé comme suit :

- *Des paragraphes consacrés aux différents points relatifs aux chapitres avec un ensemble d'exemples d'application qui font office d'exercices corrigés ;*

- *Des exercices d'application proposés avec indications des résultats sans pour autant donner les solutions ;*

- *Des notes de lectures qui complètent les chapitres par des réflexions et des démonstrations proposées aux étudiants et professeurs qui désirent approfondir leurs connaissances en mathématiques financières.*

Nous espérons, par un tel ouvrage, contribuer à enrichir le palmarès marocains des livres de mathématiques financières, palmarès qui est déjà assez riche et qui ne nous pas dissuader d'ajouter une autre contribution.

Les auteurs

Mohamed DIOURI ***Adil ELMARHOUM***

PARTIE 1

MATHEAMTIQUES FINANCIERES
A COURT TERME

Le court terme, en finance, ne dépasse pas l'année. Il se compte, en jours, en mois, en trimestres, etc.
Les mathématiques financières, à court terme, se déduisent d'une seule et unique formule.

La formule fondamentale de l'intérêt simple :

$$I = C\ n\ t$$

CHAPITRE 1
L'INTERET SIMPLE

1.1. DEFINITIONS.

Le taux d'intérêt simple est l'intérêt que rapporte un DH pendant une période, c'est-à-dire en général, l'année. Ainsi un taux t = 8% = 0,08 veut dire que 1 DH rapporte (ou produit) un intérêt de 0,08 DH pendant une année.

De cette définition simple, découle la règle pour calculer l'intérêt produit par un capital C pendant n périodes. En effet il suffit de multiplier le taux d'intérêt t par C et par n, ce qui donne la **Formule fondamentale de l'intérêt simple** :

$$\mathbf{I = C \times n \times t} \qquad \mathbf{(1)}$$

Avec :

- I : Intérêt produit par C pendant n périodes ;
- C : capital prêté ;
- n : nombre d'unités de temps (n années) ;
- t : le taux d'intérêt simple, pour une année.

Remarque 1 *: La formule (1) diffère de la formule qu'on trouve, habituellement, dans certains ouvrages de mathématiques financières, à savoir la formule suivante :*

$$I = \frac{C \times n \times t}{100} \qquad (2)$$

En effet, la différence entre les formules (1) et (2) vient du fait que :

-dans la formule (1), le taux d'intérêt est pris pour sa vraie valeur mathématique, à savoir, par exemple, si t = 7% on prendra t = 0, 07 ;

-dans la formule (2), le taux d'intérêt n'est pas pris pour sa vraie valeur mathématique, c'est-à-dire que par exemple, pour t = 7% on prendra la valeur t = 7, étant donné que le produit n x C x t est déjà divisé par 100.

Nous avons, pour notre part, privilégié, l'expression (1), celle de la notation qui nous semble mathématiquement parlant, la plus réelle.

Toutes les formules que nous manipulerons, dans les chapitres de cette 1è partie, seront des formules déduites de la formule fondamentale (1) de l'intérêt simple. Ainsi, toute cette 1è partie est basée sur une seule formule, la formule (1).

La formule (1) donne l'intérêt I que l'emprunteur doit débourser, au bout de n années : $I = C \times n \times t$. Le calcul des intérêts simples n'intervient, en principe, que pour le court terme, c'est-à-dire, pour des périodes inférieures à une année (quelques jours ou quelques mois) car, comme nous le verrons, dans la 2è partie, pour des périodes qui dépassent l'année, on calcule, habituellement, des intérêts composés. Dans ces conditions, et pour des durées de court terme, comptées en mois, quinzaines, jours, etc., nous utilisons des formules qui sont déduites de la formule (1) :

¤ **Périodes décomptées en mois** : Si la durée est exprimée en mois, n mois, par exemple, comme n mois équivalent à (n/12) années, la formule fondamentale (1) devient :

$$\mathbf{I = C \times \frac{n}{12} \times t = \frac{C \times n \times t}{12}} \qquad \mathbf{(3)}$$

¤ **Périodes décomptées en quinzaines** : Si la durée est exprimée en quinzaines, n quinzaines, par exemple, comme n quinzaines équivalent à (n/24) années, la formule fondamentale (1) devient :

$$\mathbf{I = C \times \frac{n}{24} \times t = \frac{C \times n \times t}{24}} \qquad \mathbf{(4)}$$

¤ **Périodes décomptées en jours** : Si la durée est exprimée en jours, n jours, par exemple, comme n jours équivalent (n/360) années (l'année commerciale étant de 360 jours), la formule fondamentale (1) devient :

$$\mathbf{I = C \times \frac{n}{360} \times t = \frac{C \times n \times t}{360}} \qquad \mathbf{(5)}$$

Les formules des intérêts simples (1), (3), (4) et (5) sont des relations entre les 4 paramètres, I (intérêt simple), C (capital prêté), n (nombres d'unités de temps) et t (taux d'intérêt simple) ; elles permettent, par conséquent, de résoudre quatre problèmes différents : déterminer un paramètre, connaissant les trois autres.

Pour ce faire, et dans le cas de durées comptées par exemple en jours, on a recours à l'une des 4 expressions suivantes :

$\mathbf{I = \dfrac{C \times n \times t}{360}}$ **(6)**	$\mathbf{C = \dfrac{360 \, x \, I}{n \times t}}$ **(7)**
$\mathbf{t = \dfrac{360 \, x \, I}{C \times n}}$ **(8)**	$\mathbf{n = \dfrac{360 \, x \, I}{C \times t}}$ **(9)**

Exemple 1 : Calculer l'intérêt simple que produit un capital de 50 000,00 DH placé à intérêt simple, au taux annuel de 7%, du 5 avril au 16 octobre de la même année :

On commence par déterminer, d'abord, la durée de placement en nombre de jours :

Mois	Nombre de jours de placement
Avril	30 – 5 = 25 jours (on exclue la date initiale)
Mai	31 jours
Juin	30 jours
Juillet	31 jours
Août	31 jours
Septembre	30 jours
Octobre	16 jours (on inclue la date finale)
TOTAL	**194 jours**

On utilise la formule (6) donnant la valeur de l'intérêt I en fonction des autres paramètres :

$$I = \frac{C.n.t}{360} = \frac{50000 \times 194 \times 0{,}07}{360} = 1\ 886{,}11 \text{ DH}$$

Exemple 2 : Quel capital faut-il placer, au taux d'intérêt simple de 5% l'an, pendant 25 jours pour avoir un intérêt de 350,00 DH ?

On utilise la formule (7) donnant la valeur du capital C en fonction des autres paramètres :

$$C = \frac{360.I}{n.t} = \frac{350 \text{ x } 360}{25 \times 0{,}05} = 100\ 800{,}00 \text{ DH}$$

Exemple 3 : Quel taux d'intérêt simple t faut-il appliquer pour qu'un capital d'un montant égal à 15 000,00 DH prêté pendant 80 jours produise un intérêt de 300,00 DH ?

On utilise la formule (8) donnant la valeur du taux d'intérêt t en fonction des autres paramètres :

$$t = \frac{360\,.\,I}{C.n} = \frac{360 \text{ x } 300{,}00}{15\ 000 \times 80} = 0{,}09 = 9\,\%$$

Exemple 4 : Au bout de combien de temps un capital de 10 000,00 DH placé au taux d'intérêt simple de 6,5%, par an, produira un intérêt de 325,00 DH ?

On utilise la formule (9) donnant la durée n de placement en fonction des autres paramètres :

$$n = \frac{360\,.\,I}{C.t} = \frac{360 \times 325}{10000 \times 0{,}065} = 180 \text{ jours}$$

1.2. VALEUR ACQUISE ET VALEUR ACTUELLE.

1.2.1. Définition de la valeur acquise.

La valeur acquise CA ou C_n, par un capital placé à un taux d'intérêt simple, pendant n périodes est égale au capital placé C augmenté de l'intérêt produit I.

La valeur acquise est donnée, par définition, par les formules suivantes :

$$\mathbf{CA = C_n = C + I = C + C\,.\,n\,.\,t}$$

Soit : $$\mathbf{CA = C\,(\,1 + t\,)} \qquad \mathbf{(10)}$$

Avec toujours :
- CA ou C_n : Valeur acquise ;
- I : Intérêt produit pendant n périodes ;
- C : Capital placé ou prêté ;
- n : nombre de périodes de placement ;
- t : le taux d'intérêt simple, pour une période.

Cette dernière formule (10) devient, dans le cas de périodes comptées, respectivement, en mois ou en jours :

¤ **Périodes décomptées en mois** :

$$\mathbf{C_n = C + \frac{C \times n \times t}{12} = C\ (1 + \frac{nt}{12})} \qquad \mathbf{(11)}$$

¤ **Périodes décomptées en jours** :

$$\mathbf{C_n = C + \frac{C \times n \times t}{360} = C\ (1 + \frac{nt}{360})} \qquad \mathbf{(12)}$$

De même que pour les formules de l'intérêt simple (3), (4) et (5), les formules (11) et (12) de la valeur acquise, à intérêt simple, sont des relations qui lient les 4 paramètres C, C_n, t et n ; elles permettent, par conséquent, de résoudre quatre problèmes différents : Déterminer un paramètre connaissant les 3 autres ; pour ce faire, on a recours aux séries des 4 formules suivantes :

¤ **Périodes décomptées en mois** :

$\mathbf{C_n = C + \frac{C \times n \times t}{12}}$ **(13)**	$\mathbf{C = \frac{12 \times C_n}{12 + n \times t}}$ **(14)**
$\mathbf{t = \frac{12 \times (C_n - C)}{n \times C}}$ **(15)**	$\mathbf{n = \frac{12 \times (C_n - C)}{C \times t}}$ **(16)**

¤ **Périodes décomptées en jours** :

$\mathbf{C_n = C + \frac{C \times n \times t}{360}}$ **(17)**	$\mathbf{C = \frac{360 \times C_n}{360 + n \times t}}$ **(18)**
$\mathbf{t = \frac{360 \times (C_n - C)}{n \times C}}$ **(19)**	$\mathbf{n = \frac{360 \times (C_n - C)}{C \times t}}$ **(20)**

Exemple 5 : Quelle est la valeur acquise par un capital de 20 000,00 DH prêté, pendant 35 jours, au taux d'intérêt annuel simple de 7% ?

On utilise la formule (17) donnant la valeur acquise C_n en fonction des autres paramètres :

$$C_n = C + I = C\,(1 + \frac{n \times t}{360}) = 20\,000 + \frac{20\,000 \times 35 \times 0{,}07}{360} = 20136{,}11\ \mathbf{DH}$$

Exemple 6 : Quel taux d'intérêt simple faut-il appliquer pour qu'un capital de 15 000 DH prêté pendant 74 jours ait une valeur acquise, à la fin du prêt, égale à 15 231 DH ?

On utilise la formule (19) donnant le taux d'intérêt t en fonction des autres paramètres :

$$t = \frac{360 \times (C_n - C)}{n \times C} = \frac{360 \times 231{,}00}{74 \times 15000} = 7{,}5\,\%$$

Exemple 7 : Quel capital faut-il placer au taux d'intérêt simple de 5% pendant 7 mois pour avoir une valeur acquise de 25 367 DH ?

On utilise la formule (14) donnant le capital C en fonction des autres paramètres :

$$C = \frac{12 \times C_n}{12 + n \times t} = \frac{12 \times 25367}{12 + 7 \times 0{,}05} = 24\,648{,}10\ \text{DH}$$

Exemple 8 : Au bout de combien de temps un capital de 10 500 DH placé au taux d'intérêt simple de 6,5% aura acquis une valeur de 10 949,00 DH ?

On utilise la formule (20) donnant la période n en fonction des autres paramètres :

$$n = \frac{360 \times (C_n - C)}{C \times t} = \frac{360 \times (10\,949{,}00 - 10\,500{,}00)}{10\,500{,}00 \times 0{,}065} = 237 \text{ jours}$$

1.2.1. Définition de la valeur actuelle.

De même que nous l'avons fait pour la valeur acquise, nous pouvons définir la valeur actuelle Ca, d'un capital qui atteint la valeur C après un placement, à un taux d'intérêt simple t, pendant n périodes, par la formule simple :

$$\mathbf{Ca} = \frac{\mathbf{C}}{\mathbf{1 + n \times t}} \qquad \textbf{(21)}$$

Dans cette relation, C joue le rôle d'une valeur acquise et Ca celui du capital placé ou prêté puisqu'on est parti de la relation fondamentale de l'intérêt simple : C = Ca (1 + n t) pour établir cette dernière relation.

Avec toujours :
- Ca : Valeur actuelle ;
- C : Valeur du capital après n périodes de placement ;
- n : nombre de périodes de placement ;
- t : le taux d'intérêt simple, pour une période.

Cette formule de la valeur actuelle d'un capital devient, dans le cas de périodes données, respectivement, en mois ou en jours :

¤ **Périodes décomptées en mois** : $$\mathbf{Ca} = \frac{\mathbf{12 \times C}}{\mathbf{12 + n \times t}} \qquad \textbf{(22)}$$

¤ **Périodes décomptées en jours** : $$\mathbf{Ca} = \frac{\mathbf{360 \times C}}{\mathbf{360 + n \times t}} \qquad \textbf{(23)}$$

De même que pour la formule de la valeur acquise, la formule de la valeur actuelle, à intérêt simple, est une relation qui lie les 4 paramètres C, C_a, t et n ; elle permet, par conséquent, de résoudre quatre problèmes différents : Déterminer un paramètre connaissant les 3 autres.

¤ **Périodes décomptées en mois** :

$\mathbf{Ca = \dfrac{12 \times C}{12 + n \times t}}$ **(24)**	$\mathbf{C = \dfrac{C_a(12 + n \times t)}{12}}$ **(25)**
$\mathbf{t = \dfrac{12 \times (C - C_n)}{n \times C_a}}$ **(26)**	$\mathbf{n = \dfrac{12 \times (C - C_n)}{t \times C_a}}$ **(27)**

¤ **Périodes décomptées en jours** :

$\mathbf{Ca = \dfrac{360 \times C}{360 + n \times t}}$ **(28)**	$\mathbf{C = \dfrac{C_a(360 + n \times t)}{360}}$ **(29)**
$\mathbf{t = \dfrac{360 \times (C - C_n)}{n \times C_a}}$ **(30)**	$\mathbf{n = \dfrac{360 \times (C - C_n)}{t \times C_a}}$ **(31)**

Exemple 9 : Un capital placé, pendant 5 mois, à un taux d'intérêt simple de 6%, atteint une valeur de 15 000,00 DH, quelle est sa valeur actuelle ?

On utilise la formule (24) donnant la valeur actuelle C_a en fonction des autres paramètres :

$$Ca = \frac{12 \times C}{12 + n \times t} = \frac{12 \times 15\,000{,}00}{12 + 5 \times 0{,}06} = 14\,634{,}15\text{DH}$$

Exemple 10 : Quel taux d'intérêt simple faut-il appliquer pour qu'un capital de 20 000 DH prêté pendant 60 jours ait une valeur actuelle, au début du prêt, égale à 18 181,82 DH ?

On utilise la formule (30) donnant le taux d'intérêt t en fonction des autres paramètres :

$$t = \frac{360 \times (C - C_n)}{n \times C_a} = \frac{360 \times (20000 - 19801{,}98)}{60 \times 19801{,}98} = 6\ \%$$

1.3. INTERET PRODUIT PAR PLUSIEURS CAPITAUX.

1.3.1. Méthode des nombres et du diviseur fixe.

Cette méthode est appliquée dans le cas de plusieurs capitaux C_1, C_2, …, C_k placés au même taux d'intérêt t pendant des durées différentes respectives n_1, n_2,…..n_k.

L'intérêt total produit par les k capitaux si la durée est exprimée en jours est :

$I_{tot} = I_1 + I_2 + \ldots\ldots + I_k$.

En remplaçant chaque I_k par son expression :

$$I_{Tot} = \frac{C_1 \times n_1 \times t}{360} + \frac{C_2 \times n_2 \times t}{360} + \cdots + \frac{C_k \times n_k \times t}{360}$$

$$\mathbf{I_{Tot}} = \frac{\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{k}} \mathbf{n_i C_i}}{\mathbf{360}} \times t \qquad \mathbf{(32)}$$

Si l'on pose le nombre : $N_i = n_i \times C_i$ et $D = \frac{360}{t}$

On appelle D : diviseur fixe

L'expression (3) devient une expression qui rend les calculs très simples :

$$\mathbf{I_{Tot}} = \frac{\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{k}} \mathbf{N_i}}{\mathbf{D}} \qquad \mathbf{(33)}$$

Exemple 11 : Soit à calculer l'intérêt produit par les trois capitaux suivants, placés à intérêt simple, au taux annuel de 6%.

1è capital : 35 000 DH placé du 1er Avril au 15 Juillet de la même année ;
2è capital : 40 000 DH placé du 1er Avril au 25 Août de la même année ;
3è capital : 50 000 DH placé du 1er avril au 2 octobre de la même année.

Capital : Ci	**Durée : ni**	**Le nombre Ni = ni Ci**
35 000	105	3 675 000
40 000	146	5 840 000
50 000	184	9 200 000
- - -	Total	18 715 000

Le diviseur fixe D = 360/0,06 = 6000.

L'intérêt total produit par les trois capitaux :

$$I_{tot} = \frac{\sum_{i=1}^{3} N_i}{D} \frac{18715000}{6000} = 3119{,}17 \text{ DH}$$

> ***Remarque 2** : La méthode du diviseur fixe était très utile lorsqu'on ne disposait pas, dans le temps, de petites calculettes puissantes. Nous la donnons, cependant pour l'histoire, car de nos jours, les calculs peuvent être faits aisément et très rapidement par des machines (calculettes générales, calculettes financières, ordinateurs, etc.)*

1.3.2. Taux moyen d'une série de placements effectués simultanément.

Soit k capitaux C_1, C_2, ….., C_k placés simultanément à intérêt simple aux taux respectifs t_1, t_2,……,t_k et pendant les durées respectives n_1 , n_2 ,…..n_k, l'intérêt total produit par les k capitaux est égal à la somme des intérêts simples produits par chaque capital.

$$I_{Tot} = C_1.n_1.t_1 + C_2.n_2.t_2 + \ldots + C_k.n_k.t_k$$

Par définition, le taux moyen de plusieurs placements est le taux unique qui, appliqué aux capitaux respectifs et pour leurs durées respectives donnerait le même intérêt total. Nous avons donc par définition :

$$C_1.n_1.t_{moy} + C_2.n_2.t_{moy} + \ldots + C_k.n_k.t_{moy} = C_1.n_1.t_1 + C_2.n_2.t_2 + \ldots + C_k.n_k.t_k$$

$$(C_1.n_1 + C_2.n_2 + \ldots + C_k.n_k) .t_{moy} = C_1.n_1.t_1 + C_2.n_2.t_2 + \ldots + C_k.n_k.t_k$$

Ce qui donne pour t_{moy} :

$$\mathbf{t_{moy}} = \frac{\sum_{i=1}^{k} \mathbf{C_i n_i t_i}}{\sum_{i=1}^{k} \mathbf{C_i n_i}} \qquad \textbf{(33)}$$

Le taux moyen de plusieurs placements est donc la moyenne arithmétique des différents taux pondérés par les produits n_iC_i. Ceci est tout à fait évident du fait que l'intérêt est, comme il ressort de la formule fondamentale (1), proportionnel à n et à C.

Si l'on avait utilisé la formule donnant I avec le temps compté en jours ou en mois, nous aurions abouti à la même formule (33) qui donne le taux d'intérêt moyen, en effet, on aura successivement :

¤ **Pour des durées comptées en jours** :

$$\frac{\sum_{i=1}^{k} C_i \times n_i \times t_i}{360} = \frac{C_1 n_1 t_{moy}}{360} + \frac{C_2 n_2 t_{moy}}{360} + \cdots + \frac{C_k n_k t_{moy}}{360} = t_{moy} \times \frac{\sum_{i=1}^{k} C_i \times n_i}{360}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{k} C_i \times n_i \times t_i}{360} = t_{moy} \times \frac{\sum_{i=1}^{k} C_i \times n_i}{360}$$

Ce qui donne, après simplification par 360, la même formule (33) pour t_{moy}.

¤ **Pour des durées comptées en jours** :

$$I_{Tot} = \frac{\sum_{i=1}^{k} C_i \times n_i \times t_i}{12} = t_{moy} \times \frac{\sum_{i=1}^{k} C_i \times n_i}{12}$$

Ce qui donne, après simplification par 12, la même formule (33) pour t_{moy}.

De même que pour la formule fondamentale de l'intérêt simple et celle de la valeur acquise, la formule du taux d'intérêt moyen de plusieurs capitaux placés, pendant des périodes différentes à des taux d'intérêt différents, est une relation qui lie plusieurs ensembles de paramètres qui sont : , t_{moy}, les différents C_i, les différents t_i et les différents n_i ; elle permet, par conséquent, de résoudre plusieurs types de problèmes différents : Déterminer un paramètre connaissant tous les autres.

Puisque les capitaux C_i jouent des rôles symétriques, nous proposons d'étudier les 4 cas possibles suivants :

1è cas : Calcul du taux d'intérêt moyen t_{moy} à partir de la connaissance de tous les autres paramètres.

Exemple 12 : Trois capitaux de montants respectifs 10 000,00 DH, 20 000,00 DH et 40 000,00 DH ont été placés à intérêt simple aux taux respectifs : 8%, 6%, et 10% pendant les durées respectives de 8 mois, 9 mois et 6 mois.

Calculer le taux moyen de placement de ces trois capitaux.

Le taux moyen de ces trois placements est donné par la formule (33) :

$$t_{moy} = \frac{\sum_{i=1}^{3} C_i n_i t_i}{\sum_{i=1}^{3} C_i n_i} = \frac{10000 \times 8 \times 0{,}08 + 20000 \times 9 \times 0{,}06 + 40000 \times 6 \times 0{,}10}{10000 \times 8 + 20000 \times 9 + 40000 \times 6} = 8{,}24\%$$

2è cas : Calcul du taux d'intérêt de placement d'un des capitaux à partir de la connaissance de tous les autres paramètres.

Exemple 13 : Trois capitaux de montants respectifs 15 000,00 DH, 31 500,00 DH et 5 000,00 DH ont été placés, à intérêt simple, pendant les durées respectives de 30 jours, 50 jours et 45 jours. Les taux d'intérêt annuels auxquels ont été placés les deux premiers capitaux sont respectivement 7% et 5%. Quel doit être le taux d'intérêt de placement du 3è capital pour que le taux moyen de placement annuel des 3 capitaux soit 6% ?

Pour résoudre un tel problème, revenons à la définition du taux d'intérêt moyen :

$$\frac{C_1 n_1 t_{moy}}{360} + \frac{C_2 n_2 t_{moy}}{360} + \frac{C_3 n_3 t_{moy}}{360} = \frac{C_1 n_1 t_1}{360} + \frac{C_2 n_2 t_2}{360} + \frac{C_3 n_3 t_3}{360}$$

Cette formule devient après simplification par 360 :

$$t_{moy}(C_1n_1 + C_2n_2 + C_3n_3) = (C_1n_1t_1 + C_2n_2t_2 + C_3n_3t_3)$$

On cherche à calculer t_3, pour ce faire, on isole le terme contenant t_3 et on calcule après t_3.

$$C_3n_3t_3 = t_{moy}(C_1n_1 + C_2n_2 + C_3n_3) - (C_1n_1t_1 + C_2n_2t_2)$$

$$t_3 = \frac{t_{moy}(C_1n_1 + C_2n_2 + C_3n_3) - (C_1n_1t_1 + C_2n_2t_2)}{C_3n_3}$$

$$t_3 = \frac{0{,}06(15000 \times 30 + 31500 \times 50 + 5000 \times 45) - (15000 \times 30 \times 0{,}07 + 31500 \times 50 \times 0{,}05)}{5000\text{x}45}$$

Ce qui donne bien t_3 = 11%.

3è cas : Calcul du montant d'un des capitaux à partir de la connaissance de tous les autres paramètres.

Exemple 14 : Trois capitaux de montants respectifs 7 000,00 DH, 20 000,00 DH et C_3 ont été placés aux taux d'intérêt simple annuels respectifs 9%, 5% et 10%, pendant les durées respectives de 100 jours, 55 jours et 36 jours. Quel est le montant du 3è capital pour que le taux moyen de placement annuel des 3 capitaux soit 7% ?

Pour résoudre un tel problème, revenons à la définition du taux d'intérêt moyen :

$$\frac{C_1 n_1 t_{moy}}{360} + \frac{C_2 n_2 t_{moy}}{360} + \frac{C_3 n_3 t_{moy}}{360} = \frac{C_1 n_1 t_1}{360} + \frac{C_2 n_2 t_2}{360} + \frac{C_3 n_3 t_3}{360}$$

Cette formule devient après simplification par 360 :

$t_{moy}(C_1n_1 + C_2n_2 + C_3n_3) = (C_1n_1t_1 + C_2n_2t_2 + C_3n_3t_3)$

On cherche à calculer C_3, pour ce faire, on isole les termes contenant C_3 :

$C_3.(n_3.t_3 - n_3.t_{moy}) = t_{moy}(C_1n_1 + C_2n_2) - (C_1n_1t_1 + C_2n_2t_2)$

$$C_3 = \frac{t_{moy}(C_1n_1 + C_2n_2) - (C_1n_1t_1 + C_2n_2t_2)}{(n_3t_3 - n_3t_{moy})}$$

$$C_3 = \frac{0{,}07(7\,000\times 100 + 20\,000\times 55) - (7000\times 100\times 0{,}09 + 20000\times 55\times 0{,}05)}{36\times(0{,}10 - 0{,}07)}$$

Ce qui donne bien C_3 = 7 407,41 DH.

4è cas : Calcul du montant de la durée de placement d'un des capitaux à partir de la connaissance de tous les autres paramètres.

Exemple 15 : Trois capitaux de montants respectifs 6 000,00 DH, 9 000,00 DH et 4 000,00 ont été placés aux taux d'intérêt simple annuels respectifs 5%, 9% et 8%, pendant les durées respectives de 4 mois, 3 mois et n_3 mois, pour le 3è capital. Quelle est la durée n_3 de placement du 3è capital pour que le taux moyen annuel des 3 capitaux soit 7,5% ?

Pour résoudre un tel problème, revenons à la définition du taux d'intérêt moyen :

$$\frac{C_1n_1t_{moy}}{12} + \frac{C_2n_2t_{moy}}{12} + \frac{C_3n_3t_{moy}}{12} = \frac{C_1n_1t_1}{12} + \frac{C_2n_2t_2}{12} + \frac{C_3n_3t_3}{12}$$

Cette formule devient après simplification par 12 :

$t_{moy}(C_1n_1 + C_2n_2 + C_3n_3) = (C_1n_1t_1 + C_2n_2t_2 + C_3n_3t_3)$

On cherche à calculer n_3, pour ce faire, on isole les termes contenant n_3 :

$C_3.n_3.(t_3 - t_{moy}) = t_{moy}(C_1n_1 + C_2n_2) - (C_1n_1t_1 + C_2n_2t_2)$

$$n_3 = \frac{t_{moy}(C_1n_1 + C_2n_2) - (C_1n_1t_1 + C_2n_2t_2)}{(C_3t_3 - C_3t_{moy})}$$

$$n_3 = \frac{0{,}075(6000\times 4 + 9000\times 3) - (6000\times 4\times 0{,}05 + 9000\times 3\times 0{,}09)}{4\ 000{,}00\mathrm{x}(0{,}08 - 0{,}075)}$$

Ce qui donne n_3 = 9,75 mois soit 9 mois et 23 jours.

1.4. DIFFERENTS TAUX D’INTERET.

1.4.1. Taux effectif pour intérêt précompté.

Le taux d’intérêt simple qu’on a défini, jusqu’à maintenant, suppose un paiement des intérêts, à la fin de la période de prêt ; dans le cas contraire où l’on exige de l’emprunteur de payer les intérêts, au début de la période de prêt, c’est-à-dire au moment du versement par le prêteur du capital prêté, le prêt est dit, prêt à intérêt précompté à la date de la souscription.

Dans le cas d’un prêt précompté, l’emprunteur ne paie pas un intérêt calculé au taux d’intérêt annoncé mais, en réalité, il paie un intérêt calculé à un taux plus élevé appelé taux effectif. C’est le cas notamment des bons du Trésor public qui paie les intérêts au moment de leur souscription.

Exemple 16 : Kamal prête une somme de 10 000,00 DH à Said, aux conditions suivantes :
¤ Durée : 6 mois ;
¤ Taux d’intérêt simple : t = 10% l’an ;
¤ L’intérêt est versé lors de la signature du contrat.

L’intérêt I engendré par ce prêt est :

$$I = \frac{10000{,}00 \times 6 \times 0{,}1}{12} = 500{,}00 \text{ DH}$$

Kamal qui prête 10 000,00 DH, reçoit immédiatement 500,00 DH. Donc tout se passe comme si Kamal n’a prêté que 9 500,00 DH et reçoit, en fin de prêt, la somme de 10 000 DH. Le problème se pose alors de la façon suivante :

Quel est le taux d’intérêt d’un capital de 9 500,00 DH qui, au bout de 6 mois, produit un intérêt de 500,00 DH ? Ce taux s’appelle le taux effectif ou t_{eff}.

C’est là une question à laquelle nous savons répondre facilement en utilisant la formule (8) donnant le taux d’intérêt en fonction de C, n et I :

$$t_{eff} = \frac{12 \times I}{C \times n} = \frac{12 \times 500}{6 \times 9500} = 10{,}53\%$$

Said qui a emprunté, va donc payer un taux effectif de 10,53% supérieur au taux affiché qui est de 10%.

Cas général : Soit un capital C prêté à intérêt précompté au taux annoncé t_a pendant une durée n exprimée en jours.

L’intérêt engendré par ce prêt est : $I = \frac{C \times n \times t_a}{360}$

Pour l'emprunteur, du moment que l'intérêt est précompté, c'est-à-dire qu'il est payé, d'avance, le capital effectivement emprunté est :

$$C' = C - I = C - \frac{C \times n \times t_a}{360} = C \times \frac{360 - n \times t_a}{360}$$

Le taux effectif payé par l'emprunteur est donc : $t_{eff} = \frac{360 \times I}{n \times C'} = \frac{360 \times \frac{C \times n \times t_a}{360}}{C \times n \times \frac{360 - n \times t_a}{360}}$

On déduit l'expression donnant le taux effectif t_{eff} en fonction du taux annoncé t_a :

$$\mathbf{t_{eff} = \frac{360 \times t_a}{360 - n \times t_a}} \qquad \textbf{(34)}$$

Si la durée est exprimée en mois, cette formule devient :

$$\mathbf{t_{eff} = \frac{12 \times t_a}{12 - n \times t_a}} \qquad \textbf{(35)}$$

On remarque que le taux effectif ne dépend pas du capital C, ce qui est normal. Il ne doit dépendre que du taux affiché et de la durée de l'emprunt.

Exemple 17 : Le taux effectif correspondant à un taux d'intérêt précompté de 10% pendant une durée de placement de 6 mois est :

$$t_{eff} = \frac{12 \times t_a}{12 - n \times t_a} = \frac{12 \times 0{,}1}{12 - 6 \times 0{,}1} = 10{,}53\%$$

Il s'agit purement et simplement du même exemple 15 pour lequel on trouve évidemment le même résultat.

Exemple 18 : Calculer le taux annoncé t_a d'un prêt à intérêt précompté, octroyé pendant 150 jours, dont le taux effectif est de 8% :

A partir de la formule donnant le taux effectif, on peut calculer le taux annoncé :

$$t_a = \frac{360 \times t_{eff}}{360 + n \times t_{eff}} = \frac{360 \times 0{,}08}{360 + 150 \times 0{,}08} = 7{,}74\%$$

1.4.2. Taux d’intérêt réel.

Généralement, la banque facture, lors de l’octroi d’un prêt, certains frais, (frais d’ouverture de dossier, etc.), dans ces conditions, l’emprunteur paie un taux d’intérêt réel supérieur au taux annoncé, en effet, si le capital prêté, pendant n jours est C, que le taux d’intérêt annoncé est t_a et que les frais facturés, par la banque sont f, le taux réel t_r, dans le cas où les intérêts ne sont pas précomptés, se calcule comme suit :

Intérêt : $I = \frac{C.n.t_a}{360}$

Capital accordé comme prêt : $C' = C - f$

Taux d’intérêt réel : $t_r = \frac{360 \times I}{C' \times n}$

Ce qui donne après remplacement de C’ par (C – f) et I par $\frac{C.n.t_a}{360}$ pour t_r :

$$\mathbf{t_r = \frac{C.t_a}{C - f}} \qquad \textbf{(36)}$$

Remarquons que le taux d’intérêt réel t_r est bien supérieur au taux annoncé t_a et qu’il ne dépend pas de la durée du prêt.

Exemple 19 : Quel est le taux d’intérêt réel d’un prêt de 10 000,00 DH, accordé pendant 75 jours, au taux annoncé de 7% si les frais de dossier retenus par la banque s’élèvent à 150,00 DH

On reprend la formule (36) du taux d’intérêt réel qu’on vient d’établir :

$$t_r = \frac{C.t_a}{C - f} = \frac{10\,000 x 0,07}{10\,000 - 150} = 7,11\%$$

Exemple 20 : Quel sont les frais que facture la banque si lors de l’octroi d’un prêt de 25 000,00 DH, le taux annoncé et le taux réel sont égaux respectivement à 7% et 7,05% ?

En reprenant la formule donnant le taux réel t_r en fonction du taux annoncé t_a, nous pouvons calculer les frais f facturés par la banque :

$$t_r = \frac{C.t_a}{C - f} \quad \Rightarrow \quad (C - f).t_r = C.t_a \quad \Rightarrow \quad f = \frac{C \times (t_r - t_a)}{t_r}$$

$$f = \frac{25\ 000,00 \times (0,0705 - 0,07)}{0,0705} = 177,30 \text{ DH}$$

1.5. EQUIVALENCE DE CAPITAUX.

La notion d'équivalence de 2 capitaux intervient lorsqu'on désire remplacer un capital placé ou prêté par un autre capital de façon qu'il n'y ait aucun avantage pour le préteur ou l'emprunteur. Pour ce faire et comme un capital placé ou prêté produit un intérêt, en fin de période, les 2 capitaux doivent avoir la même date d'échéance et la même valeur acquise à cette date.

La définition de l'équivalence de 2 capitaux se déduit facilement de ce qui vient d'être dit :

1.5.1. Equivalence de deux capitaux placés le même jour et ayant la même échéance.

On considère 2 capitaux ayant les caractéristiques suivantes :

- C_1 : placé aujourd'hui pour n jours : au taux d'intérêt simple t_1 ;
- C_2 : placé aujourd'hui pour n jours : au taux d'intérêt simple t_2.

Les 2 capitaux C_1 et C_2 sont équivalents, c'est-à-dire que l'un peut remplacé l'autre, si leur valeur acquise sont égales, à leur date commune d'équivalence.

Par définition, on a donc :

$$\mathbf{C_1 + nC_1t_1 = C_2 + nC_2t_2} \qquad \textbf{(37)}$$

Dans le cas où les périodes sont comptées en jours ou en mois, l'expression (37) devient :

¤ **Périodes décomptées en mois** :

$$\mathbf{C_1 + \frac{nC_1t_1}{12} = C_2 + \frac{nC_2t_2}{12}} \qquad \textbf{(38)}$$

¤ **Périodes décomptées en jours** :

$$\mathbf{C_1 + \frac{nC_1t_1}{360} = C_2 + \frac{nC_2t_2}{360}} \qquad \textbf{(39)}$$

Les relations (37), (38) et (39) lient 5 paramètres relatifs au capital C_1 et au capital C_2, elles peuvent donc être utilisées pour résoudre 3 types différents de problèmes : déterminer un des paramètres connaissant tous les autres.

Exemple 21 : Quelle est la valeur d'un capital qui placé, aujourd'hui 5 mai pour une échéance au 25 juin de la même année, au taux d'intérêt simple de 7% est équivalent au capital de 25 000,00 DH placé, aujourd'hui 5 mai pour une échéance jusqu'au 25 juin de la même année au taux d'intérêt simple de 4% ?

Remarquons que la durée de placement qui s'étend du 5 mai au 25 juin, dure 51 jours.

La relation d'équivalence des 2 capitaux donne :

$$C_1 + \frac{n\,C_1 t_1}{360} = C_2 + \frac{n\,C_2 t_2}{360}$$

Soit après multiplication des 2 membres par 360

$$360\,C_1 + n\,C_1 t_1 = 360\,C_2 + n\,C_2 t_2$$

Pour calculer C_2, on isole les terme contenant C_2 :

$$C_2(360 + n\,t_2) = C_1(360 + n\,t_1)$$

$$C_2 = \frac{(360 + n\,t_1)C_1}{360 + n\,t_2} = \frac{(360 + 51 \times 0{,}04) \times 25\,000}{360 + 51 \times 0{,}07} = 24\,894{,}79 \text{ DH}$$

Exemple 22 : Quelle est le taux d'intérêt simple d'un capital de 21 500,00 DH qui placé, aujourd'hui 15 avril est équivalent, à la date d'échéance le 7 juin, au capital de 21 650,00 DH placé, au taux d'intérêt simple de 4,25%, aujourd'hui 15 avril pour une échéance le 7 juin de la même année ?

Remarquons que la durée de placement qui s'étend du 15 avril au 7 juin, dure 53 jours.

La relation d'équivalence des 2 capitaux donne :

$$C_1 + \frac{n\,C_1 t_1}{360} = C_2 + \frac{n\,C_2 t_2}{360}$$

Soit après multiplication des 2 membres par 360 :

$$360\,C_1 + n\,C_1 t_1 = 360\,C_2 + n\,C_2 t_2$$

Pour calculer t_2, on isole les terme contenant t_2 :

$$t_2 = \frac{360(C_1 - C_2) + n\,C_1 t_1}{n\,C_2} = \frac{360(21650 - 21500) + 53 \times 21650 \times 0{,}0425}{53 \times 21500} = 9{,}02\%$$

Pour introduire la notion d'équivalence de 2 capitaux, nous avons pris les exemples de capitaux placés le même jour et ayant la même échéance. Pour justifier notre démarche, prenons le cas général de 2 capitaux C_1 et C_2 placés respectivement les jours j_1 et j_2, pendant n_1 et n_2 jours aux taux d'intérêt simple t_1 et t_2. La relation d'équivalence de ces 2 capitaux est :

$$C_1 + \frac{n_1 C_1 t_1}{360} = C_2 + \frac{n_2 C_2 t_2}{360}$$

Cette relation veut dire qu'à la date $J_1 = j_1 + n_1$, le capital C_1 a une valeur acquise égale à celle qu'atteint le capital C_2, à la date $J_2 = j_2 + n_2$, or du moment que les dates J_1 et J_2 sont généralement différentes, cette égalité des valeurs acquises par les 2 capitaux ne présente aucun intérêt et donc aucun sens du fait que l'équivalence doit permettre de remplacer un capital par un autre, le même jour.

Voilà pourquoi lorsque nous avons parlé d'équivalence de 2 capitaux, nous avons pris 2 capitaux placés le même jour et ayant la même échéance pour que les 2 valeurs acquises soient égales le même jour et que le remplacement d'un capital par un autre soit possible, ce jour. Mais pour que l'échéance soit la même, il n'est pas nécessaire que les jours de placements soient identiques, en effet :

1.5.2. Equivalence de deux capitaux ayant la même échéance.

On considère 2 capitaux ayant les caractéristiques suivantes:

- C_1 : placé le jour j_1 pour n_1 jours : au taux d'intérêt simple t_1 ;
- C_2 : placé le jour j_2 pour n_2 jours : au taux d'intérêt simple t_2.

Les 2 capitaux C_1 et C_2 sont équivalents, le jour j de leur échéance commune, c'est-à-dire que l'un peut remplacer l'autre, si leur valeur acquise sont égales, ce jour là.

Par définition, on a donc :

$$C_1 + n_1C_1t_1 = C_2 + n_2C_2t_2 \quad (40) \qquad \text{avec} \qquad j = j_1 + n_1 = j_2 + n_2 \quad (41)$$

La définition de l'équivalence de deux capitaux implique donc deux conditions :
- qu'ils aient la même échéance ;
- qu'ils aient la même valeur acquise, à cette date d'échéance commune.

Dans le cas où les périodes sont comptées en jours ou en mois, les expressions (40) et (41) deviennent :

¤ **Périodes décomptées en jours** :

$$\mathbf{C_1 + \frac{n_1\, C_1 t_1}{360} = C_2 + \frac{n_2\, C_2 t_2}{360}} \qquad \textbf{(42)} \qquad \textbf{avec} \quad \mathbf{j = j_1 + n_1 = j_2 + n_2}$$

¤ **Périodes décomptées en mois** :

$$\mathbf{C_1 + \frac{n_1\, C_1 t_1}{12} = C_2 + \frac{n_2\, C_2 t_2}{12}} \qquad \textbf{(43)} \qquad \textbf{avec} \quad \mathbf{j = j_1 + n_1 = j_2 + n_2}$$

Les relations (42) et (43) lient 6 paramètres, 3 relatifs au capital C_1 et les 3 autres relatifs au capital C_2, elles peuvent, par conséquent, être utilisées pour résoudre 3 types de problèmes différents : déterminer un des 3 paramètres de l'un des capitaux connaissant les 2 autres et ceux de l'autre capital.

Exemple 23 : Quelle est la valeur d'un capital qui placé, le 15 mai pour une échéance au 25 juin de la même année, au taux d'intérêt simple de 7% est équivalent au capital de 7 000,00 DH placé, le 28 avril pour une échéance 25 juin de la même année, au taux d'intérêt simple de 8,5% ?

Remarquons que les durées des placements qui s'étendent comme suit :
- du 15 mai au 25 juin, dure 41 jours ;
- du 28 avril au 25 juin, dure 58 jours.

La relation d'équivalence des 2 capitaux, le 25 juin, donne :

$$C_1 + \frac{n_1\, C_1 t_1}{360} = C_2 + \frac{n_2\, C_2 t_2}{360}$$

En multipliant les 2 membres de cette égalité par 360 on trouve :

$$360\, C_1 + n_1\, C_1 t_1 = 360\, C_2 + n_2\, C_2 t_2$$

Pour calculer C_2, on isole les terme contenant C_2 :

$$C_2 (360 + n_2\, t_2) = C_1 (360 + n_1\, t_1)$$

Pour calculer C_2, on isole les terme contenant C_2 :

$$C_2 = \frac{(360 + n_1 t_1) C_1}{360 + n_2 t_2} = \frac{(360 + 58 \times 0{,}085) \times 7\,000}{360 + 41 \times 0{,}07} = 7\,039{,}74 \text{ DH}$$

Exemple 24 : Quel est le taux d'intérêt simple d'un capital de 10 000,00 DH qui placé, le 2 mars pour une échéance le 31 mai de la même année est équivalent au capital de 10 250,00 DH placé, le 15 avril pour une échéance le 31 mai de la même année au taux d'intérêt simple de 10% ?

Remarquons que les durées des placements qui s'étendent comme suit :
- du 15 avril au 31 mai, dure 46 jours ;
- du 2 mars au 31 mai, dure 90 jours.

La relation d'équivalence des 2 capitaux, le 31 mai, donne :

$$C_1 + \frac{n_1 C_1 t_1}{360} = C_2 + \frac{n_2 C_2 t_2}{360}$$

En multipliant les 2 membres de cette égalité par 360 on trouve :

$$360\,C_1 + n_1 C_1 t_1 = 360\,C_2 + n_2 C_2 t_2$$

Pour calculer t_2, on isole les termes contenant t_2 :

$$t_2 = \frac{360(C_1 - C_2) + n_1 C_1 t_1}{n_2 C_2} = \frac{360(10250 - 10\,000) + 46 \times 10250 \times 0{,}10}{90 \times 10\,000} = 15{,}24\%$$

Exemple 25 : Quelle est la date de placement simple d'un capital de 36 650,00 DH qui placé au taux d'intérêt simple de 9%, a pour une échéance le 25 novembre est équivalent au capital de 37 000,00 DH placé, le 7 Octobre a pour une échéance le 25 novembre de la même année au taux d'intérêt simple de 8% ?

Remarquons que la durée de placement du 1è capital qui s'étend du 7 octobre au 25 novembre, dure 49 jours.

La relation d'équivalence des 2 capitaux, le 25 novembre, donne :

$$C_1 + \frac{n_1 C_1 t_1}{360} = C_2 + \frac{n_2 C_2 t_2}{360}$$

En multipliant les 2 membres de cette égalité par 360 on trouve :

$$360\,C_1 + n_1 C_1 t_1 = 360\,C_2 + n_2 C_2 t_2$$

Pour calculer n_2, on isole les terme contenant n_2 :

$$n_2 = \frac{360(C_1 - C_2) + n_1 C_1 t_1}{t_2 C_2} = \frac{360(37000 - 36650) + 49 \times 37000 \times 0{,}08}{0{,}09 \times 36650} = 82{,}17 \text{ jours}$$ soit le 83è jours.

Ce qui donne pour j_2, jour de placement du capital C_2, $j_2 = j - n_2$ soit 83 jours avant le 25 novembre, c'est-à-dire le 3 septembre de la même année.

1.5.3. Equivalence d'un capital avec plusieurs capitaux.

Dans le cas d'un crédit d'un montant C que la banque accorde à son client, en fonction des revenus de ce dernier, et pour une durée donnée, le remboursement du crédit s'effectue sous forme de traites mensuelles constantes. Si le montant du crédit n'est pas assez important et si la durée de l'emprunt n'est pas assez longue (quelques mois), le calcul du montant de la traite s'effectue comme suit :

Si l'on désigne par :

- C : somme d'argent empruntée ;
- T : montant de la traite mensuelle, payée en fin de mois ;
- t : taux d'intérêt simple ;
- n : le nombre de traites constantes ;
- 1, 2, 3, . . . n : les n échéances mensuelles respectives des différentes traites.

Mois	Valeur de la traite	Valeur acquise de la traite
1	T	$T+\frac{(n-1)Tt}{12}$
2	T	$T+\frac{(n-2)Tt}{12}$
3	T	$T+\frac{(n-3)Tt}{12}$
. . .	. . .	
k	T	$T+\frac{(n-k)Tt}{12}$
. . .	. . .	. . .
(n-1)	T	$T+\frac{Tt}{12}$
n	T	T

Si nous faisons la somme des valeurs acquises par les différentes traites en commençant par les valeurs du bas du tableau, on trouve, sachant que cette somme doit être égale à la valeur acquise du capital prêté :

$$C(1+\frac{n\times t}{12}) = T + T(1+\frac{t}{12}) + T(1+\frac{2t}{12}) + \ldots + T(1+\frac{kt}{12}) + \ldots + T(1+\frac{(n-1)t}{12})$$

$$C(1+\frac{n\times t}{12}) = n\times T + \frac{T\times t}{12}\times\sum_{k=0}^{n-1}k = T\times\frac{(12\times n + t\times\sum_{k=0}^{n-1}k)}{12}$$

En multipliant les 2 membres de cette égalité par 12 on trouve :

$$C(12 + n\times t) = T(12n + t\times\sum_{k=0}^{n-1}k$$

Or nous savons que : $\sum_{k=0}^{k=n-1}k = \frac{(n-1)n}{2}$

Nous pouvons déduire la valeur de l'échéance T :

$$\mathbf{T = \frac{C \times (24 + 2nt)}{n(24 + t \times (n-1))}} \qquad \textbf{(44)}$$

Le taux d'intérêt peut être calculé, si nous connaissons la valeur de T :

$$\mathbf{t = \frac{nT - C}{2nC - (n-1)T} \times 24} \qquad \textbf{(45)}$$

En pratique, la banque retient des frais de crédit ; l'emprunteur paie un taux d'intérêt réel supérieur au taux d'intérêt annoncé t. En effet, la somme d'argent effectivement empruntée est : (C – f) (f correspond au montant des frais de crédit).

Le montant de la traite et taux d'intérêt réel t_r vérifient l'équation d'équivalence suivante :

$$(C - f)(1 + \frac{n \times t_r}{12}) = T + (T + \frac{Tt_r}{12}) + (T + \frac{2Tt_r}{12}) + \ldots + (T + \frac{kTt_r}{12}) + \ldots + (T + \frac{(n-1)Tt_r}{12})$$

$$(C - f)(1 + \frac{n \times t_r}{12}) = T \times (n + \frac{t_r}{12} \times \sum_{k=0}^{n-1} k)$$

Or sachant que : $\sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}$

$$(C - f) - n \times T = -(C - f) \times \frac{n \times t_r}{12} + \frac{T \times t_r}{12} \times \frac{n(n-1)}{2} = \frac{t_r}{24}(T \times n(n-1) - 2n(C - f))$$

On trouve pour le taux réel t_r :

$$\mathbf{t_r = \frac{(C - f) - n \times T}{T \times n(n-1) - 2n(C - f)} \times 24} \qquad \textbf{(46)}$$

Exemple 26 : Jamal souhaite avoir un crédit à la consommation de 25 000,00 DH à rembourser en 9 mensualités constantes. Le taux d'intérêt est de 7 %, les frais de crédit sont de 350,00 DH, et la première traite doit être payée 1 mois après la date d'octroi du crédit.

Quel est le montant de la traite et quel est le taux d'intérêt réel du crédit ?

Le montant de la traite T est d'après la formule (44) :

$$T = \frac{C \times (24 + 2nt)}{n(24 + t \times (n-1))} = \frac{25000 \times (24 + 2 \times 9 \times 0{,}07)}{9 \times (24 + 0{,}07 \times 8)} = 2\ 856{,}95 \text{ DH}$$

Le taux réel t_r est d'après la formule (46) :

$$t_r = \frac{(C - f) - n \times T}{Tn(n-1) - 2n(C - f)} \times 24 = \frac{(25\,000{,}00 - 350{,}00) - 9 \times 2\,856{,}95}{2\,856{,}95 \times 9 \times 8 - 2 \times 9 \times (25\,000{,}00 - 350{,}00)} \times 24 = 10{,}71\%$$

Pour rembourser ce crédit, Jamal doit payer 2 856,95 DH par mois pendant 9 mois, ce qui correspond à un taux d'intérêt réel de 10,71 % qui est supérieur au taux d'intérêt annoncé 7 %.

1.5.4. Equivalence de deux ensembles de capitaux.

On considère maintenant 2 ensembles de capitaux ayant les caractéristiques suivantes :

1è ensemble : p capitaux C_i avec i allant de 1 à p
- C_i : placé le jour j_i pour n_i jours : au taux d'intérêt simple t_i ;

2è ensemble : q capitaux C_j avec j allant de 1 à q
- C'_j : placé le jour j'_j pour n'_j jours : au taux d'intérêt simple t'_j.

Les 2 ensembles de capitaux C_i et C'_j sont équivalents, le jour j, c'est-à-dire que l'on peut remplacer un ensemble de capitaux par l'autre, si :
- tous les capitaux constituant les 2 ensembles ont la même date d'échéance ;
- les sommes des valeurs acquises de chacun des deux ensembles de capitaux, sont égales, ce jour là.

Par définition, on a donc :

$$\sum_{i=1}^{i=p} (C_i + n_i C_i t_i) = \sum_{j=1}^{j=q} (C'_j + n'_j C'_j t'_j) \qquad (47) \qquad \text{avec} \qquad j = j_i + n_i = j'_j + n'_j$$

Dans le cas où les périodes sont comptées en jours ou en mois, l'expression devient :

¤ **Périodes décomptées en mois** :

$$\sum_{i=1}^{i=p} \left(C_i + \frac{n_i C_i t_i}{12}\right) = \sum_{j=1}^{j=q} \left(C'_j + \frac{n'_j C'_j t'_j}{12}\right) \qquad (48) \qquad \text{avec} \qquad j = j_i + n_i = j'_j + n'_j$$

¤ **Périodes décomptées en jours** :

$$\sum_{i=1}^{i=p}(\mathbf{C_i} + \frac{\mathbf{n_i\, C_i\, t_i}}{\mathbf{360}}) = \sum_{j=1}^{j=q}(\mathbf{C'_j} + \frac{\mathbf{n'_j C'_j t'_j}}{\mathbf{360}}) \qquad \mathbf{(49)} \qquad \textbf{avec} \qquad \mathbf{j = j_i + n_i = j'_j + n'_j}$$

> ***Remarque 3*** *: Pour que l'équivalence des 2 ensembles de capitaux ait un intérêt et donc un sens, et conformément à ce qui a été dit, dans le paragraphe 1.5.2, nous avons dû supposer que le jour d'équivalence soit justement la date d'échéance de tous les capitaux :* $j = j_i + n_i = j'_j + n'_j$ *et ce quel que soit i allant de 1 à p pour les paramètres du 1è ensemble de capitaux et de 1 à q pour les paramètres du 2è ensemble de capitaux.*

Ces relations (47), (48) et (49) lient 6 ensembles de paramètres, 3 ensembles paramètres relatifs aux capitaux C_i (qui sont C_i, n_i et t_i) et les 3 autres ensembles de paramètres relatifs aux capitaux C'_j (qui sont C'_j, n'_j et t'_j) ; elles peuvent donc être utilisées pour résoudre 3 types différents de problèmes : déterminer un des paramètres de l'ensemble des capitaux C'_i connaissant tous les autres paramètres du même ensemble de capitaux et tous les paramètres de l'ensemble des capitaux C_i.

Les exemples qu'on pourrait donner de ces types de problèmes ne diffèrent pas beaucoup des 3 derniers exemples qu'on vient d'étudier, on se contentera d'en donner un seul.

Exemple 27 : On considère 2 ensembles de capitaux ayant les caractéristiques suivantes :

1è ensemble	: 2 capitaux C_1 et C_2 tel que :				
	- C_1 = 7 500 DH	:	placé le 2 février pour 57 jours	:	au taux 5% ;
	- C_2 = 6 500 DH	:	placé le 6 mars pour 25 jours	:	au taux 7% ;
2è ensemble	: 3 capitaux C'_1, C'_2 et C'_3 tel que :				
	- C'_1 = 4 300 DH	:	placé le 8 février pour 51 jours	:	au taux 9% ;
	- C'_2 = 3 600 DH	:	placé le 15 mars pour 16 jours	:	au taux 7% ;
	- C'_3 = ?	:	placé le 21 mars pour 10 jours	:	au taux 8%.

Calculer la valeur du capital C'_3 afin que l'ensemble des capitaux C_1 et C_2 soient équivalents à l'ensemble des capitaux C'_1 , C'_2 et C'_3 :

D'après les jours de placement et le nombre de jours de placement des 5 capitaux, leur date commune d'échéance est le 31 mars. Pour que les 2 ensembles de capitaux soient équivalents, il faut que les sommes des valeurs acquises constituant les 2 ensembles de capitaux, soient égales, justement ce 31 mars.

La relation d'équivalence des 2 ensembles de capitaux est :

$$C_1 + \frac{C_1 n_1 t_1}{360} + C_2 + \frac{C_2 n_2 t_2}{360} = C_1^{'} + \frac{C_1^{'} n_1^{'} t_1^{'}}{360} + C'_2 + \frac{C'_2\, n'_2\, t'_2}{360} + C'_3 + \frac{C'_3\, n'_3\, t'_3}{360}$$

En multipliant les 2 membres de l'égalité par 360 on trouve :

$$360C_1 + C_1 n_1 t_1 + 360C_2 + C_2 n_2 t_2 = 360C_1^{'} + C_1^{'} n_1^{'} t_1^{'} + 360C'_2 + C'_2\, n'_2\, t'_2 + 360C'_3 + C'_3\, n'_3\, t'_3$$

Pour calculer C'_3, on isole les termes en C'_3 et on trouve :

$$C'_3\,(360 + n'_3\, t') = C_1(360 + n_1 t_1) + C_2(360 + n_2 t_2) - C_1^{'}(360 + n_1^{'} t_1^{'}) - C'_2\,(360 + n'_2\, t'_2\,)$$

$$C_3^{'} = \frac{C_1(360 + n_1 t_1) + C_2(360 + n_2 t_2) - C_1^{'}(360 + n_1^{'} t_1^{'}) - C_2^{'}(360 + n_2^{'} t_2^{'})}{360 + n_3^{'} t_3^{'}}$$

$$C_3^{'} = \frac{7500(360 + 57 \times 0{,}05) + 6500(360 + 25 \times 0{,}07) - 4300(360 + 51 \times 0{,}09) - 3600(360 + 16 \times 0{,}07)}{360 + 10 \times 0{,}08}$$

= 6 111,37 DH.

Arrivé à ce niveau, nous conseillons aux lecteurs de lire la note de lecture 1, donnée à la fin du présent chapitre.

1.6. LES COMPTES COURANTS ET D'INTERETS.

1.6.1. Définitions.

• Le compte courant est un compte à vue, c'est à dire dont la durée est non déterminée, c'est un compte non rémunéré qui permet une liberté totale à son titulaire d'effectuer des versements, des retraits ou des transferts. Son solde doit toujours être créditeur.

• Le compte courant et d'intérêt est un compte à vue rémunéré. C'est un compte courant sur lequel les sommes d'argent produisent des intérêts créditeurs ou débiteurs selon le sens des soldes, à partir d'une date dite date de valeur.

• La date de valeur est la date à laquelle l'opération est prise en compte. La date de valeur diffère le plus souvent de la date de l'opération. En général :

¤ **Pour les retraits**, la date de valeur est antérieure d'un ou de plusieurs jours à celle de l'opération ;

¤ **Pour les versements**, la date de valeur est postérieure d'un ou de plusieurs jours à la date du dépôt.

La date de valeur correspond toujours à un jour où la banque travaille, elle tient compte des samedis, dimanches, des jours fériés et des délais de transfert de compte à compte.

Exemple 28 : Donnons un exemple d'un compte sur lequel on a effectué plusieurs opérations :

Date de l'opération	Sens de l'opération	Date de valeur	Remarques
Me 16 janvier	Retrait	Ma 15 janvier	
Me 16 janvier	Dépôt	Je 17 janvier	
Lu 16 janvier	Retrait	Ve 13 janvier	Un dimanche et un samedi
Ve 16 janvier	Dépôt	Lu 19 janvier	Un dimanche et un samedi
Me 12 janvier	Retrait	Lu 10 janvier	Le 11 janvier est férié
Me 10 janvier	Dépôt	Ve 12 janvier	Le 11 janvier est férié
Ma 12 janvier	Retrait	Ve 8 janvier	Samedi, dimanche et jour férié
Je 10 janvier	Dépôt	Lu 14 janvier	Samedi, dimanche et jour férié

Dans ce cas on a supposé que la banque paie :

- Plus 1 jour pour tout versement.
- Moins 1 jour pour tout retrait.

1.6.2. Tenu d'un compte courant.

A la fin de chaque mois, le solde du compte courant est arrêté.

A chaque opération est associée une date de valeur qui est égale à la date d'opération majorée ou minorée d'un ou de plusieurs jours de banque suivant que l'opération est créditrice ou débitrice.

Les opérations sont ensuite classées par dates de valeur croissantes.

Exemple 29 : Une personne dispose, dans une banque d'un compte courant. Le solde de ce compte, au 28 février, est créditeur de 10 827,54 DH.

Au cours du mois de mars de la même année, le titulaire de ce compte a effectué les opérations suivantes :

¤ Mardi 7 mars : retrait de 1000,00 DH ;
¤ Mercredi 8 mars : versement de 1948,90 DH ;
¤ Jeudi 9 mars : retrait de 8413,01 DH ;
¤ Lundi 13 mars : retrait de 1000,00 DH ;
¤ Lundi 20 mars : versement de 4000,00 DH ;
¤ Lundi 27 mars : versement de 4673,40 DH ;
¤ Mardi 28 mars : versement de 3000,00 DH ;
¤ Mercredi 29 mars : retrait de 2146,64 DH ;

¤ Vendredi 31 mars : retrait de 5000,00 DH.

Le relevé bancaire du mois de mars se présente sous forme du tableau suivant si l'on suppose que la date de valeur est :

- Plus 1 jour pour un versement.
- Moins 1 jour pour un retrait.

Date		**Sens de l'opération**	**Capitaux**	
Opération	**Valeur**		**Débit**	**Crédit**
	28/02	Solde précédent		10827,54
07/03	06/03	Retrait	1000,00	
09/03	08/03	Retrait	8413,01	
08/03	09/03	Versement		1948,90
13/03	10/03	Retrait	1000,00	
20/03	21/03	Versement		4000,00
27/03	28/03	Versement		4673,40
29/03	28/03	Retrait	2146,64	
28/03	29/03	Versement		3000,00
31/03	30/03	Retrait	5000,00	
- - -	**Total des mouvements**		**17559,65**	**13622,30**
	Nouveau solde au 31/03			**6890,19**

1.6.3. Tenu du compte courant et d'intérêt.

Le compte courant et d'intérêt est tenu de la même manière que le compte courant, la différence vient, du fait que pour ce compte, on calcule des intérêts :

- si les soldes sont débiteurs, les intérêts sont calculés à l'aide d'un taux d'intérêt simple débiteur ;
- si les soldes sont créditeurs, les intérêts sont calculés à l'aide d'un taux d'intérêt simple créditeur.

Généralement, le taux débiteur est supérieur au taux créditeur. Si les deux taux sont égaux on parle de taux réciproques.

A la fin de chaque mois, le solde du compte courant et d'intérêt est arrêté.

A chaque opération est associée une date de valeur qui est égale à la date d'opération majorée ou minorée d'un ou de plusieurs jours de banque suivant que l'opération est créditrice ou débitrice.

Les opérations sont en suite classées par dates de valeur croissantes.

Chaque fois qu'une opération est effectuée, un nouveau solde est calculé.

L'intérêt I est calculé, pour une durée de placement du solde S, égale au nombre de jours J séparant deux dates de valeurs de deux opérations successives en appliquant la formule fondamentale des intérêts simples à un taux d'intérêt t.

$$I = \frac{S \times J \times t}{360}$$

Exemple 30 : Calculer les intérêts payés et/ou encaissés par le compte courant et d'intérêt d'une personne. Le solde de ce compte, au 28 février, est créditeur de 5827,54 DH.

Au cours du mois de mars de la même année, le titulaire de ce compte a effectué les opérations suivantes :

¤ Mardi 7 mars : retrait de 1000,00 DH ;
¤ Mercredi 8 mars : versement de 1948,90 DH ;
¤ Jeudi 9 mars : retrait de 8413,01 DH ;
¤ Lundi 13 mars : retrait de 1000,00 DH ;
¤ Lundi 20 mars : versement de 4000,00 DH ;
¤ Lundi 27 mars : versement de 4673,40 DH ;
¤ Mardi 28 mars : versement de 3000,00 DH ;
¤ Mercredi 29 mars : retrait de 2146,64 DH ;
¤ Vendredi 31 mars : retrait de 5000,00 DH.

Le taux d'intérêt créditeur est de 6% et le taux d'intérêt débiteur est de 11%.

Le relevé bancaire du mois de mars se présente sous la forme d'un tableau :

Dates		**sens**	**Capitaux**		**Soldes**		**J**	**Intérêts**	
Opéra	**Valeur**	**opération**	**Débit**	**Crédit**	**Débit**	**Crédit**	**(1)**	**Débit**	**Crédit**
	28/02	Solde				5827,54	6		5,83
07/03	06/03	Retrait	1000,00			4827,54	2		1,61
09/03	08/03	Retrait	8413,01		3585,47		1	1,10	
08/03	09/03	Versement		1948,90	1636,57		1	0,50	
13/03	10/03	Retrait	1000,00		2636,57		11	8,86	
20/03	21/03	Versement		4000,00		1363,43	7		1,59
27/03	28/03	Versement		4673,40		6036,83	0		0,00
29/03	28/03	Retrait	2146,64			3890,19	1		0,65
28/03	29/03	Versement		3000,00		6890,19	1		1,15
31/03	30/03	Retrait	5000,00			1890,19	1		0,32
Total des intérêts								10,46	11,15
	31/03	**Solde**				**1890,19**			
	Nouveau solde créditeur au 31/03					**1890,88**			

(1) : J : Nombre de jours.

1.6.4. Compte sur carnet.

Le compte sur carnet est un compte à vue rémunéré. Des intérêts créditeurs s'ajoutent à la fin de chaque trimestre au crédit du compte. Les intérêts créditeurs sont calculés sur des périodes exprimées en nombre de quinzaines civiles.

Les dates de valeur sont imposées le 1è ou le 16 du mois :

¤ **Pour un dépôt**, la date de valeur est le premier ou le 16 du mois qui suit la date de l'opération ;

¤ **Pour un retrait**, la date de valeur est la fin ou le 15 du mois qui précède la date de l'opération.

Exemple 31 : Donnons un exemple d'un compte sur carnet avec quelques opérations possibles :

Date opération	Opération	Date valeur
11/06/1998	Retrait	31/05/1998
11/06/1998	Dépôt	16/06/1998
20/06/1998	Retrait	15/06/1998
20/06/1998	Dépôt	01/07/1998
15/07/1998	Retrait	30/06/1998
16/07/1998	Dépôt	01/08/1998

L'intérêt I est calculé pour une durée de placement du solde S égale au nombre de quinzaines entières civiles q, séparant les dates de valeurs de deux opérations successives en appliquant la formule fondamentale des intérêts simples à un taux d'intérêt t (durée exprimée en quinzaines).

$$I = \frac{S \times q \times t}{24}$$

Une taxe libératoire de 30 % des intérêts créditeurs est retenue par la banque au titre de la retenue à la source.

Exemple 32 : Une personne a ouvert un compte sur carnet le 03 janvier 2007, avec un versement de 10 000 DH. Au cours de l'année, le titulaire de ce compte a effectué les opérations suivantes :

¤ Le 20 janvier : versement de 8000 DH ;
¤ Le 13 février : retrait de 5000 DH ;
¤ Le 19 février : retrait de 3000 DH ;
¤ Le 10 mars : versement de 7500 DH ;
¤ Le 25 avril : versement de 10000 DH ;
¤ Le 17 mai : retrait de 3000 DH ;
¤ Le 6 juin : versement de 5000 DH ;

¤ Le 18 juin	: versement de 4000 DH ;
¤ Le 20 juillet	: retrait de 2000 DH ;
¤ Le 5 août	: versement de 3000 DH ;
¤ Le 25 août	: versement de 2000 DH ;
¤ Le 10 septembre	: retrait de 2500 DH ;
¤ Le 17 septembre	: retrait de 1000 DH ;
¤ Le 19 octobre	: versement de 1500 DH ;
¤ Le 10 novembre	: versement de 2000 DH ;
¤ Le 12 décembre	: retrait de 3000 DH.

Le taux d'intérêt est de 6,5 % et l'impôt libératoire sur les produits financiers est de 30 % des intérêts.

Les intérêts sont calculés et s'ajoutent à la fin de chaque trimestre civil au crédit du compte.

L'évolution de ce compte au cours de l'année 2007 peut se présenter sous forme du tableau suivant :

Date		Opération	Capitaux		Solde	Q	Intérêts
Opér	Valeur		Débit	Crédit		(1)	
03/01	16/01	Versement		10000,00	10000,00	1	27,08
20/01	01/02	Versement		8000,00	18000,00	0	0,00
13/02	01/02	Retrait	5000,00		13000,00	1	35,21
19/02	15/02	Retrait	3000,00		10000,00	2	54,17
10/03	16/03	versement		7500,00	17500,00	1	47,40
	31/03	Intérêts		163,86	17663,86		
	31/03	Taxe	49,16		17614,70		
	01/04	Solde			17614,70	2	95,41
25/04	01/05	Versement		10000	27614,70	1	74,79
17/05	15/05	Retrait	3000		24614,70	2	133,33
06/06	16/06	Versement		5000	29614,70	1	80,21
	30/06	Intérêts		383,74	24998,44		
	30/06	Taxe	115,12		24883,32		
	01/07	Solde			24883,32	0	0,00
18/06	01/07	Versement		4000	28883,32	1	78,23
20/07	15/07	Retrait	2000		26883,32	2	145,62
05/08	16/08	Versement		3000	29883,32	1	80,93
25/08	01/09	Versement		2000	31883,32	0	0,00
10/09	01/09	Retrait	2500		29383,32	1	79,58
17/09	15/09	Retrait	1000		28383,32	1	76,87
	30/09	Intérêts		461,23	28844,54		
	30/09	Taxe	138,37		28706,18		
	01/10	Solde			28706,18	2	155,49
19/10	01/11	Versement		1500	30206,18	1	81,81
10/11	16/11	Versement		2000	32206,18	1	87,23
12/12	01/12	Retrait	3000		29206,18	2	158,20
	31/12	Intérêts		482,73	29688,91		
	31/12	Taxe	144,82		29544,09		
	Solde au 31/12/2005				**29544,08**		

(1) : Q : quinzaine.

1.7. EXERCICES D'APPLICATION.

1.7.1. Exercice.

a) Calculer l'intérêt produit par le placement de 50 000,00 DH, au taux d'intérêt simple de 12% l'an, du 25 avril au 12 septembre de la même année.

b) Calculer le capital qui, placé à 9% du 10 mars au 15 juin, de la même année, a acquis une valeur de 10 242,50 DH.

c) A quel taux d'intérêt simple un capital de 25 000,00 DH, placé du 16 avril au 15 septembre de la même année, produit un intérêt de 844,44 DH ?

d) Un capital de 8000,00 DH prêté au taux de 15% a été remboursé, le 10 juin, par le paiement d'une somme de 8 200,00 DH. A quelle date ce capital a été prêté?

Réponses : a) 2 333,33 DH ; b) 10 000,00 DH ; c) 8% ; d) le 11 avril.

1.7.2. Exercice.

a) Calculer le capital qui placé, pendant 5 mois, produit un intérêt simple de 256,37 DH, sachant que le taux d'intérêt est 7,5%.

b) Calculer la durée, en mois, d'un capital de 12 341,50 DH pour qu'il atteigne un montant de 13 000,00 DH si le taux d'intérêt simple est de 8%.

c) Calculer le taux d'intérêt simple d'un capital de 7 850,00 DH qui, placé, pendant 7 mois, produit des intérêts de 297,65 DH.

d) Calculer le taux d'intérêt simple d'un capital de 9 325,00 DH qui, placé, pendant 3 mois, atteigne le montant de 9 490,52 DH.

Réponses : a) 8 203,84 DH ; b) 8 mois ; c) 6,5% ; d) 7,1%.

1.7.3. Exercice.

On considère les 4 capitaux suivants placés comme suit :

- ¤ 52 000,00 DH placés du 15 avril au 23 juillet de la même année, à 6% ;
- ¤ 20 000,00 DH placés du 10 mai au 25 août de la même année, à 7% ;
- ¤ 18 500,00 DH placés du 5 juin au 10 septembre de la même année, à 6,5% ;
- ¤ 36 000,00 DH placés du 20 juillet au 12 août de la même année, à 9%.

a) Calculer l'intérêt global.
b) Calculer le taux moyen de placement des 4 capitaux.

Réponses : a) 1805,12 DH ; b) 6,56%

1.7.4. Exercice.

On considère les 3 capitaux suivants placés comme suit :

¤ 6 500,00 DH placés du 7 mars au 30 juin de la même année au taux de 7% ;
¤ 3 800,00 DH placés du 15 avril 10 juillet de la même année au taux de 10% ;
¤ 8 000,00 DH placés du 20 avril au 15 octobre de la même année au taux de 12%.

a) Calculer l'intérêt global.
b) Calculer le taux moyen de placement des 3 capitaux.
c) A quel taux devrait-on placer un 4è capital de 7 500,00 DH pour que ce taux moyen devienne égal à 10% si la durée de placement de ce capital est de 25 jours ?

Réponses : a) 710,79 DH ; b) 10,24% ; c) 6,77%

1.7.5. Exercice.

On considère les 3 capitaux :

¤ C_1 = 5 265,00 DH, placé du 24 mai au 30 juin, à 7% ;
¤ C_2 = 6 326,00 DH, placé du 15 juin au 23 juillet, à 8% ;
¤ C_3 = 6 000,00 DH, placé du 11 juin au 13 août, à 6,5%.

a) Quel est le taux moyen de placement de ces 3 capitaux ?
b) Quel est le taux réel de placement de chaque capital si la banque facture, pour chaque capital, des frais de dossier de 120,00 DH ?
c) Quel est, dans ces conditions, le taux réel moyen ?

Réponses : a) 7,06% ; b) 7,16% ; 8,15% et 6,63% ; c) 7,21%

1.7.6. Exercice.

Un capital a été placé, à intérêt précompté, du 10 mars au 30 juillet de la même année, calculer le taux effectif de cette opération si le taux affiché est de :

a) 8% ; b) 12% ; c) 16%.

Un capital a été placé, à intérêt précompté, du 15 février au 30 mai de la même année, calculer le taux annoncé de cette opération si le taux effectif est de :

d) 7% ; e) 5% ; f) 8,25%.

Réponses : a) 8,26% ; b) 12,60% ; c) 17,08% ; d) 6,86% ; e) 4,93% ; f) 8,06%

1.7.7. Exercice.

Un capital a été placé pendant 100 jours au taux de 11%. Entre l'intérêt commercial (année à 360 jours) et l'intérêt civil (année à 365 jours) il y une différence de 8,37 DH.

a) Calculer le montant du capital qui produirait cette différence.
b) Calculer l'intérêt produit par ce capital.
c) Que devient le taux si l'on comptait une année de 365 jours ?

Réponses : a) 19 996,69 DH, b) 611,01 DH c) 11,15%

1.7.8. Exercice.

a) Un capital de 24 500,00 DH est placé, à un taux d'intérêt simple de 7,5% entre le 14 février et le 16 avril de la même année. Quelle est la valeur acquise par ce capital ?

b) Un capital de 4 850,00 DH acquiert, au bout de 11 mois, la valeur de 5 325,00 DH. Quel est son taux d'intérêt de placement ?

c) Un capital placé, à un taux d'intérêt simple de 6%, acquiert une valeur de 12 550,00 DH, au bout de 5 mois. Quelle est la valeur de ce capital ?

d) Un capital de 5 000,00 DH placé à un taux d'intérêt de 7,5% acquiert une valeur de 5 250,00 DH ; quelle est la durée de son placement ?

Réponses : a) 24 811,35 DH ; b) 10,68% ; c) 12 243,90 DH ; d) 240 jours.

1.7.9. Exercice.

Pour s'acquitter entièrement de sa dette, un débiteur effectue à la fin du 1è et du 2è trimestre d'une seule année, 2 versements dont les montants sont successivement :

¤ 8 000,00 DH à la fin du 1è trimestre ;
¤ 9 000,00 DH à la fin du 2è trimestre ;

Ce débiteur paie à la fin de chaque trimestre des intérêts trimestriels calculés sur la dette restante.

a) Quel est le montant de sa dette si le taux d'intérêt simple est de 8% l'an ?
b) Quel est le montant de sa dette si le taux d'intérêt simple est de 12% l'an ?

Réponses : a) 16 500,00 DH, b) 16 264,15 DH

1.7.10. Exercice.

Deux personnes placent chacune 5 000,00 DH, le premier juin. A partir de fin juin de la même année :

- la première personne effectue des versements mensuels, à la fin de chaque mois, de 500,00 DH et ce jusqu'à fin octobre compris ;
- la deuxième personne effectue des versements mensuels, à la fin de chaque mois, de 600,00 DH et ce jusqu'à fin novembre compris.

Tous les versements portent intérêt simple de 6% l'an.

a) Quelle sera la valeur acquise le 31 décembre de la même année, pour chaque personne ?
b) Même question si les versements mensuels des deux personnes étaient constants et égaux à 1 000,00 DH.

Réponses : a) 7 725,00 DH et 8 838,00 DH ; b) 10 275,00 DH et 11 280,00 DH.

1.7.11. Exercice.

Le trésor affiche, pour tout achat, d’un bon du trésor, sur 6 mois, un intérêt simple annuel de 6,5%.

a) Quel est le taux effectif si l’intérêt est précompté ?

b) Quelle est la valeur de cession du bon, par le trésor, si sa valeur, après 6 mois est de 10 000,00 DH ?

c) Retrouver le résultat de la question a) en considérant la valeur de cession à l’achat et celle à la vente, après 6 mois.

Réponses : a) 6,72%, b) 9 675,00 DH, c) 6,72%.

1.7.12. Exercice.

On considère le placement de 3 capitaux :

¤ 10 000,00 DH placés pour 25 jours à 6,75% l’an ;
¤ 12 500,00 DH placés pour 65 jours à 5,65% l’an ;
¤ 54 325,00 DH placés pour 12 jours à 7,15% l’an.

a) Quel est l’intérêt global produit par un tel placement ?

b) Quel est le taux moyen de placement des 3 capitaux ?

c) Que deviendrait ce taux moyen si les 3 capitaux étaient placés pendant 25 jours ?

d) Que deviendrait ce taux moyen si les 3 capitaux étaient tous placés à 7% ?

Réponses : a) 303,87 DH ; b) 6,38% ; c) 6,85% ; d) 7%.

1.7.13. Exercice.

a) Un compte courant et d’intérêt a, pour solde débiteur, le 31 décembre 2005, la somme de - 12 345,87 DH. Quel est son solde, au 31 mai 2006, si l’on suppose que le taux d’intérêt simple débiteur est de 9,75% et que les intérêts pour solde débiteur sont enregistrés, à la fin de chaque mois, sur le solde du compte ?

b) Un compte sur carnet a, pour solde, le 31 mars 2005, 23 567,89 DH. Quel est son solde, au 30 juin 2006, si l’on suppose que le taux d’intérêt simple est de 4,25%, que la retenue à la source pour produits financiers est de 30% et que les intérêts sont enregistrés, à la fin de chaque trimestre, sur le solde du carnet ?

Réponses : a) 12 960,09 DH ; b) 23 743,18 DH.

1.7.14. Exercice.

Au cours du mois de janvier, le titulaire d'un compte courant et d'intérêt a effectué les opérations suivantes:

¤ Le 31 décembre le solde était créditeur de 4650,12 DH.
¤ Le 3 janvier : il a retiré 3 000 DH.
¤ Le 5 janvier : il a retiré 2 470 DH.
¤ Le 13 janvier : il a retiré 2 000 DH.
¤ Le 19 janvier : il a retiré 1 500 DH.
¤ Le 21 janvier : il a versé 7 000 DH.
¤ Le 23 janvier : il a versé 3 000 DH.
¤ Le 29 janvier : il a retiré 1 000 DH.

En supposant, pour simplifier, que le date de valeur soit la même que la date d'opération, en appliquant des taux d'intérêts réciproques de 7% et une commission de 1% sur le total des opérations débitrices, donner le solde de compte à la fin du mois de janvier, si les intérêts gagnés par le détenteur du compte sont soumis à une retenue à la source de 30%.

Réponses : 4 681,85 DH

1.7.15. Exercice.

Le solde d'un compte courant et d'intérêt le 2 février est créditeur de 323,11 DH. Au cours du mois de février les opérations suivantes ont été effectuées :

¤ 09 février : retrait de 1950 DH.
¤ 11 février : versement de 6926 DH.
¤ 13 février : versement de 1162 DH.
¤ 16 février : retrait de 860 DH.
¤ 23 février : retrait de 7500 DH.
¤ 24 février : versement de 3000 DH.
¤ 25 février : retrait de 2000 DH.

Quel est le solde du compte bancaire à la fin du mois de février 98 sachant que le taux d'intérêt débiteur est de 9% alors que le taux d'intérêt créditeur est de 4,5% ? On suppose que les intérêts gagnés par le détenteur du compte soient soumis à une retenue à la source de 30% et, pour simplifier, que les dates de valeur coïncident avec les dates d'opération.

Réponses : solde débiteur de – 894,50 DH.

Note de lecture 1

NOTION D'INTERET
NOTION D'EQUIVALENCE DE CAPITAUX

On a souvent tendance, pour expliquer le principe de l'intérêt, à utiliser des histoires de prêts, de consommations reportées, d'inflation, etc. Dans chaque cas, c'est un côté du problème qui est privilégié.

Histoire d'un prêt et d'une consommation reportée.

Ali dispose de 100,00 DH pour acheter un article qui coûte 100,00 DH. Afin d'aider son ami Rachid, Ali a prêté les 100,00 DH à Rachid pendant une période déterminée et il a retardé l'achat de l'article jusqu'au jour du remboursement.

Le jour du remboursement, le prix de l'article a augmenté de 20 DH. Si Rachid rembourse 100,00 DH, Ali doit ajouter 20,00 DH pour acheter l'article, dans ce cas, Ali qui a rendu service à Rachid, sera perdant. Pour qu'Ali ne soit ni gagnant ni perdant, les 20,00 DH doivent être supportés par Rachid qui doit donc rembourser 120,00 DH : 100,00 DH qui correspond à la somme prêtée et 20,00 DH qui permet de compenser la perte du pouvoir d'achat du prêteur.

Le service rendu par Ali à Rachid suppose donc une rémunération au bénéfice de Ali dite intérêt.

L'intérêt représente la rémunération ou le coût résultant de l'arbitrage entre la consommation présente et la consommation future selon que l'on privilégie celle-ci ou celle-la.

L'intérêt est la rémunération qu'un emprunteur verse à un prêteur pour disposer d'un certain montant de capital pendant une période donnée.

Le taux d'intérêt t est un cas particulier des indices spécifiques à un bien qui est la monnaie. Il permet de relier la valeur d'une unité monétaire aujourd'hui à sa valeur future ou passée.

Le même montant d'argent C peut valoir, à des périodes différentes, tps = 0 et tps = 1 :

$$C_1 / C_0 = (1 + t)$$

D'où il ressort que le capital C_0 au tps = 0 vaut C_1, une période plus tard : $C_1 = C_0(1 + t)$

Réciproquement, le C_1au tps = 1 valait C_0, une période avant : $C_0 = C_1\,(1 + t)^{-1}$.

Il s'agit d'une première approche de l'équivalence de capitaux selon la période à laquelle on les considère. Les valeurs C_0 et C_1 sont deux expressions différentes du même capital, à deux époques différentes. Elles peuvent être considérés comme deux capitaux équivalents puisqu'il s'agit du même capital considéré à deux périodes différentes.

Nous aurons l'occasion de revenir, régulièrement, tout au long du présent ouvrage, sur cette notion d'équivalence de capitaux qui est une notion essentielle en mathématiques financières.

Remarquons, pour le moment, que le facteur qui permet de passer d'une valeur C_0 à une autre valeur C_1 du même capital à des instants différents, est la quantité $(1 + t)$ ou $(1 + t)^{-1}$ dans laquelle t représente le taux d'intérêt pour une période donnée.

Signalons que le taux d'intérêt varie essentiellement selon :

***- L'inflation** : l'inflation fait augmenter le taux d'intérêt car les prêteurs exigent des taux d'intérêt leur permettant de compenser la perte de leur pouvoir d'achat ;*

***- La loi de l'offre et de la demande** : Lorsque l'offre de capitaux est élevée alors que la demande est faible, le taux d'intérêt tendra à baisser. Il aura tendance à augmenter dans le cas inverse.*

CHAPITRE 2
L'ESCOMPTE A INTERET SIMPLE

2.1. DEFINITION DE L'EFFET DE COMMERCE.

Pour définir ce qu'est un effet de commerce, nous exposons la situation classique dans laquelle intervient un tel document : Lorsqu'un fournisseur vend à un client des marchandises pour un montant M et que le règlement doit intervenir n jours après la date d'achat, le fournisseur, désigné par le créancier, doit donc attendre la date convenue, dite échéance, pour encaisser son argent, désigné par créance.

Si le fournisseur a besoin d'argent, avant la date d'échéance, il peut demander à sa banque une avance garantie par la créance qu'il possède. Pour cela il doit justifier, par un document écrit, l'existence de cette créance. Cette preuve écrite est appelée effet de commerce. Il peut prendre 2 formes :

- Le client, désigné par le débiteur, rédige un papier dans lequel il promet de payer à son fournisseur le montant M, à la date d'échéance. On parle dans ce cas de billet à ordre ;
- Le débiteur peut uniquement apposer sa signature sur un papier rédigé par le créancier reconnaissant l'existence de la dette. On parle dans ce cas de lettre de change ou traite.

On doit donc noter, sur un effet de commerce, les mentions suivantes :

- Le nom du créancier ;
- Le nom du débiteur ;
- Le montant de la dette appelé valeur nominale de l'effet ;
- La date convenue pour le paiement appelée échéance.

Le créancier peut donc disposer de l'argent, avant l'échéance, en vendant l'effet de commerce à sa banque ; on dit qu'il négocie son effet de commerce ou qu'il le remet à l'escompte.

L'effet de commerce est donc un document par lequel un débiteur reconnaît vis-à-vis d'un créancier, une dette exigible à une date donnée.

2.2. ESCOMPTE COMMERCIAL.

Le service rendu par la banque, à son client, en lui accordant une avance sur la base de l’effet de commerce a un prix. Ce prix est appelé escompte commercial.

L’escompte commercial est l’intérêt produit par la valeur nominale de l’effet, à un taux d’intérêt simple, appelé taux d’escompte, pendant la durée qui sépare la date de remise à l’escompte et la date d’échéance.

De cette définition simple, découle la règle pour calculer l’escompte produit par un effet de commerce. En effet il suffit d’appliquer la **Formule fondamentale des intérêts simples** :

$$\mathbf{E = VN\ .\ n\ .\ t} \qquad \textbf{(1)}$$

Avec
- E : Escompte commercial produit par l’effet de commerce ;
- VN : valeur nominale de l’effet de commerce ;
- n : durée d’escompte ;
- t : taux d'escompte.

Remarque 1 *: Notre première remarque faite au premier chapitre 1 est valable aussi pour la formule de calcul de l’escompte commercial. En effet la formule (2) que nous allons utiliser diffère de la formule qu’on a l’habitude de trouver, dans les ouvrages de mathématiques financières, et qui est :*

$$E = \frac{n\,.VN\,.\,t}{36\,000} \qquad (2)$$

En effet, nous avons relevé que la différence entre les formules (2) et (3) vient du fait que :

- dans la formule (1), le taux d’intérêt est pris pour sa vraie valeur, à savoir, par exemple, si t = 7% on prendra t = 0, 07 ;

- dans la formule (2), le taux d’intérêt n’est pas pris pour sa vraie valeur, c’est-à-dire que par exemple, pour t = 7% on prendra la valeur t = 7 seulement, étant donné que le produit (VN . n . t) est déjà divisé par 100.

Nous avions précisé, au chapitre 1, que nous avons, pour notre part, privilégié, l’expression (1), celle de la notation qui nous semble mathématiquement parlant, la plus réelle.

L’opération d’escompte est une opération à court terme, la durée est exprimée en nombre de jours qui sépare la date de remise à l’escompte de l’effet de la date d’échéance, si n est le nombre de jours (il y a 360 jours dans une année commerciale) la formule de calcul de l’escompte commercial devient :

$$\mathbf{E = \frac{n \,.\, VN \,.\, t}{360}} \qquad \textbf{(3)}$$

L’opération d’escompte est une opération commerciale et non une opération de crédit, ainsi on applique la même formule de calcul de l’intérêt simple mais on parle d’escompte et de taux d’escompte au lieu d’intérêt et de taux d’intérêt.

La formule (3) est une relation entre les 4 variables : E (l’escompte), VN (la valeur nominale), n (la durée d’escompte en jours) et t (le taux d’escompte) ; elle permet de résoudre 4 problèmes différents : calculer une de ces variables connaissant les 3 autres. Pour ce faire on utilise les relations suivantes :

$\mathbf{E = \frac{n \times VN \times t}{360}}$ **(4)**	$\mathbf{VN = \frac{360 \times E}{n \times t}}$ **(5)**
$\mathbf{n = \frac{360 \times E}{VN \times t}}$ **(6)**	$\mathbf{t = \frac{360 \times E}{VN \times n}}$ **(7)**

Exemple 1 : Calculer l’escompte produit par un effet de commerce d’une valeur nominale de 40 000,00 DH dont l’échéance est le 30 novembre, s’il est remis à l’escompte le 5 octobre de la même année au taux d’escompte de 12%.

La durée d’escompte est le nombre de jours qui sépare le 5 octobre du 30 novembre soit 56 jours.

L’escompte commercial produit par cet effet de commerce est d’après la formule (3) :

$$E = \frac{56 \times 40000 \times 0{,}12}{360} = 746{,}67 \text{ DH}$$

Le créancier doit attendre la date du 30 novembre pour disposer du montant de 40 000,00 DH, par contre s’il veut disposer de son argent le 5 octobre il doit payer à la banque 746,67 DH et ne recevoir que :

40 000,00 – 746,67 = 39 253,33 DH

Exemple 2 : Calculer la valeur nominale d’un effet de commerce qui, escompté à 9%, pour une durée de 65 jours, coûte un escompte de 345,25 DH.

La valeur nominale de l’effet de commerce est donnée par la formule (5) :

$$VN = \frac{360 \times E}{n \times t} = \frac{360 \times 345{,}25}{65 \times 0{,}09} = 21\ 246{,}15 \text{ DH}$$

Exemple 3 : Calculer la durée d’échéance d’un effet de commerce de valeur nominale d’un montant de 5 000,00 DH, qui escompté à 9%, produit un escompte de 75,00 DH.

La durée de l’escompte est donnée par la formule (6) :

$$n = \frac{360 \times E}{VN \times t} = \frac{360 \times 75{,}00}{5000 \times 0{,}09} = 60 \text{ jours}$$

Exemple 4 : Calculer le taux d’escompte d’un effet de commerce de valeur nominale 15 000,00 DH, qui escompté pendant une durée de 60 jours, produit un escompte de 250 DH.

Le taux d’escompte est donnée par la formule (7) :

$$t = \frac{360 \times E}{VN \times n} = \frac{360 \times 250}{15000 \times 60} = 10\%$$

2.3. VALEUR ACTUELLE COMMERCIALE.

La valeur nominale correspond à la valeur de l’effet à sa date d’échéance, mais à la date d’escompte l’effet vaut moins. En effet l’escompte est retenu immédiatement par la banque qui remet au client la différence entre la valeur nominale de l’effet et l’escompte, cette différence est appelée valeur actuelle commerciale (notée VA) de l’effet de commerce.

$$\mathbf{VA = VN - E} \qquad \mathbf{(8)}$$

Si l’on reprend les formules (1) et (4), on pourra écrire :

$$VA = VN - VN \text{ x } n \text{ x } t = VN\ (1 - n \text{ x } t)$$

Dans le cas où la durée de l’escompte est comptée en jour, cette relation devient :

$$\mathbf{VA = VN - \frac{n\,.\,VN\,.\,t}{360} = VN\ (1 - \frac{n\,x\,t}{360})} \qquad \mathbf{(9)}$$

La formule (9) est une relation entre les 4 variables : VA (la valeur actuelle), VN (la valeur nominale), n (la durée d'escompte en jour) et t (le taux d'escompte) ; elle permet de résoudre 4 problèmes différents : calculer une de ces variables connaissant les 3 autres. Pour ce faire on utilise les relations suivantes :

$\mathbf{VA = VN\ (1 - \frac{n\,x\,t}{360})}$ **(10)**	$\mathbf{VN = = \frac{360\,VA}{360 - n\,t}}$ **(11)**
$\mathbf{n = \frac{360\,(VN - VA)}{t\,x\,VN}}$ **(12)**	$\mathbf{t = \frac{360\,(VN - VA)}{n\,x\,VN}}$ **(13)**

Exemple 5 : calculer la valeur actuelle d'un effet de commerce de valeur nominale 15 000 DH, d'échéance le 15 juin s'il est remis à l'escompte le 13 avril de la même année au taux d'escompte de 9%.

Il y a 63 jours entre le 13 avril, date de remise de l'effet à l'escompte et le 15 juin, date de son échéance.

La valeur actuelle de l'effet de commerce est donnée par la formule (10) :

$$VA = VN\ (1 - \frac{n\ x\ t}{360}) = 15\,000(1 - \frac{63 \times 0{,}09}{360}) = 14\,763{,}75\ DH$$

Le créancier doit attendre la date du 15 juin pour disposer des 15 000,00 DH, par contre s'il veut disposer de son argent le 13 avril, il ne recevra de la banque que 14 763,75 DH.

Exemple 6 : Calculer la valeur nominale d'un effet de commerce dont la durée d'escompte est 35 jours, le taux d'escompte 8% et la valeur à la date de la remise à l'escompte est de 25 000 DH.

La formule (11) donne la valeur nominale en fonction de la valeur actuelle, du taux d'escompte et de la durée comptée en nombre de jours :

$$VN = \frac{360 \times VA}{360 - n \times t} = \frac{360 \times 25\,000{,}00}{360 - 35 \times 0{,}08} = 25195{,}97\ DH$$

Exemple 7 : Calculer l'échéance d'un effet de commerce dont la valeur nominale est 12 500,00 DH, la valeur actuelle est 12 000,00 DH si le taux d'escompte est de 7,5%.

La formule (12) donne la durée de l'escompte en nombre de jours en fonction de la valeur nominale, de la valeur actuelle et du taux d'escompte :

$$n = \frac{360\,(VN - VA)}{t \text{ x } VN} = \frac{360 \times (12\,500 - 12\,000)}{12\,500 \times 0{,}075} = 192 \text{ jours}$$

Exemple 8 : Calculer le taux d'escompte d'un effet de commerce de valeur nominale 26 000,00 DH, de valeur actuelle 25 650,00 DH est de durée d'escompte 45 jours.

La formule (13) donne le taux d'escompte en nombre de jours en fonction de la valeur nominale, de la valeur actuelle et de la durée de l'escompte en nombre de jours :

$$t = \frac{360\,(VN - VA)}{n \times VN} = \frac{360 \times (26000 - 25650)}{45 \times 26000} = 10{,}77\%$$

2.4. VALEUR NETTE COMMERCIALE.

L'opération commerciale d'escompte comprend d'autres frais financiers en plus de l'escompte. Ces frais sont composés essentiellement de commissions, qui peuvent être de différents types (commission de courrier, jours de banque, .etc.), et de la Taxe sur la Valeur Ajoutée (TVA).

La somme de l'escompte et des commissions donne ce qu'on appelle les Agios, hors taxe auquel on applique un taux de TVA pour avoir les Agios TTC.

Les AGIOS TTC peuvent être calculés directement à partir des AGIOS HT, sachant que :

AGIOS TTC = (AGIOS HT) x (1 + Taux de TVA)

AGIOS HT = Escompte + Commissions

AGIOS TTC = (Escompte + Commissions) (1 + taux TVA)

Les AGIOS sont retenus immédiatement par la banque qui remet au client la différence entre la valeur nominale de l'effet et les AGIOS TTC, cette différence est appelée valeur Nette Commerciale de l'effet de commerce.

Valeur Nette = VN – AGIOS TTC (14)

Exemple 9 : Calculer la valeur nette commerciale de l'effet de commerce de valeur nominale de 40 000,00 DH, d'échéance le 30 novembre et de date de remise à l'escompte le 5 octobre de la même année aux conditions suivantes :

- Taux d'escompte : 12 % ;
- Commission de courrier : 10,00 DH ;
- Jours de valeur – jours d'opération = 1 ;
- Taux de TVA : 10 %.

La durée réelle de l'escompte est le nombre de jours qui sépare le 5 octobre du 30 novembre soit 56 jours. Pour le calcul de l'escompte on considère les 56 jours plus un jour de banque soit 57 jours.

$$E = \frac{57 \times 40\,000{,}00 \times 0{,}12}{360} = 760{,}00 \text{ DH}$$

AGIOS HT = 760,00 + 10,00 = 770,00 DH

TVA = 770,00 x 0,10 = 77,00 DH

AGIOS TTC = 770,00 + 77,00 = 847,00 DH

Valeur Nette = 40 000,00 – 847,00 = 39 153,00 DH

Le créancier doit attendre la date du 30 novembre pour disposer du montant de 40 000,00 DH, par contre s'il veut disposer de son argent le 5 octobre il recevra réellement la somme de 39 153,00 DH.

Dans le cas où l'entreprise remet à l'escompte plusieurs effets d'échéances différentes, la banque élabore un bordereau d'escompte dans lequel elle traite tous les effets.

Exemple 10 : Quelle est la valeur nette commerciale de 4 effets qu'une entreprise remet à l'escompte le 10 mars, avec les informations suivantes :

- 15 000,00 DH à échéance le 15 mai de la même année ;
- 16 000,00 DH à échéance le 20 juin de la même année ;
- 10 000,00 DH à échéance le 12 juillet de la même année ;
- 22 000,00 DH à échéance le 24 septembre de la 1me année.

Les conditions d'escompte sont :

- Taux d'escompte = 14 % ;
- Commission de service = 10 DH par effet ;
- Compter 1 jour de banque supplémentaire ;
- Taux de TVA = 10 %.

Le bordereau d'escompte se présente comme suit :

Valeur nominale	Durée d'escompte	Escompte
15 000,00 DH	67 jours	390,83 DH
16 000,00 DH	103 jours	640,89 DH
10 000,00 DH	125 jours	486,11 DH
22 000,00 DH	199 jours	1702,55 DH
63 000,00 DH	**Total Escompte**	**3220,38 DH**
	Total commissions (4 effets)	40,00 DH
	AGIOS HT	3260,38 DH
	TVA (10%)	326,04 DH
	AGIOS TTC	**3586,42 DH**
Valeur Nette Commerciale		**59 413,58 DH**

2.5. DIFFERENTS TAUX RELATIFS A L'ESCOMPTE.

2.5.1. Escompte rationnel.

La banque, en prélevant immédiatement l'escompte fait un prêt précompté. L'intérêt qui devrait être réellement payé est l'intérêt calculé sur la somme effectivement prêtée et non l'intérêt calculé sur la valeur nominale de l'effet.

L'intérêt ainsi calculé est appelé escompte rationnel E_r et la valeur actuelle correspondante est appelée Valeur Actuelle Rationnelle V_{ar}.

L'escompte rationnel E_r représente l'intérêt réel que la banque devrait, en principe, retenir de la valeur nominale de l'effet de commerce pour rémunérer la valeur actuelle de l'effet. L'escompte rationnel E_r est donc l'intérêt calculé sur la valeur actuelle rationnelle V_{ar} pendant une durée d'escompte de n jours à un taux d'escompte t.

En appliquant la formule fondamentale des intérêts simples on a :

$$E_r = \frac{n \,.\, \mathbf{Va_r} \,.\, t}{360} \qquad \text{donc} \qquad Va_r = \frac{360 \,.\, \mathbf{E_r}}{n \,.\, t}$$

La valeur nominale VN représente une valeur acquise :

$$VN = Va_r + E_r \qquad \Rightarrow \qquad VN = \frac{360 \,.\, \mathbf{E_r}}{n \,.\, t} + \mathbf{E_r} = \frac{\mathbf{E_r}}{n \times t}(360 + n \times t)$$

Ce qui donne pour l'escompte rationnel E_r :

$$\mathbf{E_r = \frac{VN\,.\,n\,.\,t}{360 + n\,.\,t}} \qquad \mathbf{(15)}$$

La valeur actuelle rationnelle V_{ar} est égale à $V_{ar} = VN - E_r$

$$V_{ar} = VN - \frac{VN\,.\,n\,.\,t}{360 + n\,.\,t} \Rightarrow \qquad V_{ar} = \frac{VN\,.\,(360 + n\,.\,t) - VN\,.\,n\,.\,t}{360 + n\,.\,t}$$

Ce qui donne pour la valeur actuelle rationnelle V_{ar} :

$$\mathbf{V_{ar} = \frac{360 \times VN}{360 + n\,.\,t}} \qquad \mathbf{(16)}$$

L'escompte rationnel est inférieur à l'escompte commercial, ce qui signifie que la banque prélève plus qu'il ne faut pour une opération d'escompte.

Ceci fait que la valeur actuelle rationnelle est supérieure à la valeur actuelle commerciale, ce qui signifie qu'au jour de remise à l'escompte, la banque donne moins que ce qu'il faut donner.

Exemple 11 : Calculer l'escompte rationnel et la valeur actuelle rationnelle d'un effet de commerce de valeur nominale 23 250,00 DH, de taux d'escompte 6% et de durée d'escompte 45 jours, entre le 2 avril, jour de remise à l'escompte et le 17 mai, date de l'échéance de l'effet.

Comparer les résultats avec l'escompte commercial et la valeur actuelle commerciale.

La durée de l'escompte est le nombre de jours qui sépare le 2 avril du 12 mai soit 45 jours.

$$E_r = \frac{VN\,.\,n\,.\,t}{360 + n\,.\,t} = \frac{23250{,}00 \times 45 \times 0{,}06}{360 + 45 \times 0{,}06} = 173{,}08 \text{ DH}$$

$$E = \frac{VN \times n \times t}{360} = \frac{23250 \times 45 \times 0{,}06}{360} = 174{,}38 \text{ DH}$$

$$V_{ar} = \frac{360 \times VN}{360 + n\,.\,t} = \frac{360 \times 23250{,}00}{360 + 45 \times 0{,}06} = 23\,076{,}92 \text{ DH}$$

VA = VN - E = 23 250,00 - 174,38 = 23 075,63 DH

On remarque bien que :

- la valeur actuelle rationnelle est supérieure à la valeur actuelle commerciale, en effet, le 2 avril, jour de remise à l’escompte, la banque considère que l’effet de commerce vaut 23 075,63 DH alors qu’en réalité il vaut 23 076,92 DH.

- L’escompte rationnel est inférieur à l’escompte commercial. La banque prélève 174,38 DH pour cette opération d’escompte alors qu’elle devrait, en principe, ne retenir que 173,08 DH.

Exemple 12 : Calculer l’escompte rationnel et la valeur actuelle rationnelle d’un effet de commerce de valeur Nominale égale à 50 000,00 DH et d’échéance le 31 décembre, remis à l’escompte le 20 juillet de la même année au taux de 12%.
Comparer les résultats à l’escompte commercial et à la valeur actuelle commerciale.

La durée de l’escompte est le nombre de jours qui sépare le 20 juillet du 31 décembre soit 164 jours.

L’escompte commercial : $E = \frac{164 \times 50000 \times 0{,}12}{360} = 2\,733{,}33$ DH

La Valeur actuelle commerciale : VA = VN – E

VA = 50 000 – 2 733,33 = 47 266,67 DH.

L’escompte rationnel : $E_r = \frac{VN \times n \times t}{360 + n \times t} = \frac{50000 \times 164 \times 0{,}12}{360 + 164 \times 0{,}12} = 2\,591{,}66$ DH

La valeur actuelle rationnelle : $V_{ar} = VN - E_r$

V_{ar} = 50 000 – 2591,66 = 47 408,34 DH.

On remarque bien que :

- la valeur actuelle rationnelle est supérieure à la valeur actuelle commerciale, en effet, le 20 juillet, jour de remise à l’escompte, la banque considère que l’effet de commerce vaut 47 266,67 DH alors qu’en réalité il vaut 47408,34 DH.

- L’escompte rationnel est inférieur à l’escompte commercial. La banque prélève 2733,33 DH pour cette opération d’escompte alors qu’elle devrait, en principe, ne retenir que 2 591,66 DH.

Par la définition que nous avons donnée à l'escompte rationnel E_r et à la valeur actuelle rationnelle V_{ar} à savoir que $E_r = \dfrac{n \cdot V_{ar} \cdot t}{360}$, nous avons considéré qu'on ne peut nommer de taux rationnel puisqu'il se confond avec le taux d'escompte t affiché.

Toutes ces considérations nous amènent à introduire un certain nombre de taux d'escompte, selon qu'on se place du coté de la banque ou de celui du client :

2.5.2. Taux d'escompte effectif.

Comme nous l'avons signalé, dans le paragraphe précédent,, l'escompte est prélevé par la banque à la date de remise à l'escompte, c'est à dire en début de période, ce qui correspond à ce qu'on a appelé prêt à intérêt précompté.

Dans le cas d'une opération d'escompte, le créancier ne paie pas un escompte calculé au taux d'escompte annoncé t_a mais, en réalité, il paie un escompte calculé à un taux plus élevé appelé taux effectif t_{eff}. Ce taux effectif doit être calculé sur la base du capital réellement avancé, par la banque, à savoir, la valeur actuelle VA :

$$t_{eff} = \frac{360 \times E}{VA \times n} = \frac{360 \times E}{(VN - E) \times n} = \frac{360 \times \dfrac{VN \times n \times t_a}{360}}{(VN - \dfrac{VN \times n \times t_a}{360}) \times n}$$

Ce qui donne pour le taux effectif :

$$\mathbf{t_{eff} = \frac{360 \times t_a}{360 - n \times t_a}} \qquad \textbf{(17)}$$

Cette relation permet de calculer le taux affiché t_a en fonction du taux effectif t_{eff} :

$$\mathbf{t_a = \frac{360 \times t_{eff}}{360 + n \times t_{eff}}} \qquad \textbf{(18)}$$

Remarquons que, dans la formule (17) (respectivement (18)), le taux effectif (respectivement le taux annoncé) ne dépend que du taux annoncé (respectivement le taux effectif) et de la durée d'escompte.

Exemple 13 : Calculer le taux d'escompte effectif d'un effet de commerce dont la durée d'escompte est 56 jours et le taux d'escompte est de 12%.

$t_{eff} = \dfrac{360 \cdot 0{,}12}{360 - 56 \cdot 0{,}12}$ = 12,23 %.

Exemple 14 : A quel taux doit escompter une banque les effets de commerce qu'on lui présente si elle désire que son taux effectif soit 9% pour une durée d'escompte de 90 jours ?

D'après la formule donnant le taux effectif, nous pouvons calculer le taux annoncé :

$$t_{eff} = \frac{360 \times t_a}{360 - n \times t_a} \quad => \quad t_a = \frac{360 \times t_{eff}}{360 + n \times t_{eff}} = \frac{360 \times 0{,}09}{360 + 90 \times 0{,}09} = 8{,}8\% .$$

Exemple 15 : Calculer la durée d'escompte d'un effet dont les taux d'escompte affiché et le taux effectif sont respectivement 9,85% et 10,15% ?

La formule liant taux affiché et taux effectif permet de déterminer la durée d'escompte en fonction de ces deux paramètres :

$$t_{eff} = \frac{360 \times t_a}{360 - n \times t_a} \quad => \quad n = \frac{360 \times (t_{eff} - t_a)}{t_{eff} \times t_a} = \frac{360 \times (0{,}1015 - 0{,}0985)}{0{,}1015 \times 0{,}0985} \approx 108 \text{ jours}$$

On trouve un résultat presque égal à 108 jours.

2.5.3. Le taux d'escompte réel.

En considérant l'ensemble de ce qui est retenu par la banque (AGIOS TTC) comme intérêt de la valeur nominale VN de l'effet de commerce, pendant la durée réelle d'escompte n, on obtient le taux réel d'escompte t_r donné par la formule :

$$\mathbf{t_r = \frac{360 . (AGIOS\ TTC)}{VN . n}} \qquad \mathbf{(19)}$$

Ce taux est supérieur au taux d'escompte annoncé t.

Exemple 16 : Considérons un effet de commerce d'une Valeur Nominale de 40 000,00 DH, d'échéance le 30 novembre et remis à l'escompte le 5 octobre de la même année aux conditions suivantes :

- Taux d'escompte : 12%.
- Commission : 10 DH.
- Tenir compte d'un jour de banque.
- Taux de TVA : 10 %.

La durée de l'escompte est le nombre de jours qui sépare le 5 octobre du 30 novembre, soit 56 jours. Pour le calcul de l'escompte on considère les 56 jours plus un jour de banque soit 57 jours.

$$E = \frac{57 \times 40000{,}00 \times 0{,}12}{360} = 760 \text{ DH.}$$

AGIOS HT = 760,00 + 10,00 = 770,00 DH.

TVA = 770,00 x 0,10 = 77,00 DH.

AGIOS TTC = 770,00 + 77,00 = 847,00 DH.

V_{nette} = 40 000,00 – 847,00 = 39 153,00 DH.

Le taux réel d'escompte t_r est :

$$t_r = \frac{360 \times \text{AGIOS TTC}}{VN \times n} = \frac{360 \times 847{,}00}{40\,000{,}00 \times 56} = 13{,}61 \ \%$$

On constate que le taux réel d'escompte est supérieur au taux annoncé qui est de 12 %.

2.5.4. Le taux d'escompte de revient.

Si l'on se place du coté client, ce dernier a décaissé les AGIOS TTC pour bénéficier d'un capital effectif qui est la valeur nette de l'effet. Les AGIOS TTC retenus par la banque correspondent donc à un intérêt sur le capital effectivement prêté qui est la valeur nette et pour une durée qui est la durée réelle de l'escompte. Le taux correspondant est un taux de revient de l'entreprise t_{re}, c'est le coût réel de cette opération payé par le client.

$$\mathbf{t_{re}} = \frac{\mathbf{360 \times AGIOS\ TTC}}{\mathbf{V_{nette} \times n}} \qquad \textbf{(20)}$$

Ce taux est supérieur au taux d'escompte annoncé t.

Exemple 17 : Reprenons les données de l'exemple 16 et calculons le taux d'entreprise t_e :

$$t_e = \frac{360 \times \text{AGIOS TTC}}{V_{nette} \times n} = \frac{360 \times 847{,}00}{39153{,}00 \times 56} = 13{,}91\%$$

Dans le cas où l'entreprise est assujettie à la TVA, celle-ci étant récupérée, l'entreprise ne décaisse que les AGIOS HT, pour bénéficier d'un capital effectif qui est la valeur nette de l'effet.

Dans ces conditions, ce sont les AGIOS HT qui correspondent à un intérêt sur le capital effectivement prêté qui est la valeur nette et pour une durée qui est la durée réelle de l'escompte. Le taux de revient d'entreprise t_{re} devient :

$$\mathbf{t_{re} = \frac{360 \times AGIOS\ HT}{Vnette \times n}} \qquad \mathbf{(21)}$$

Exemple 18 : Reprenons les données de l'exemple 16 et calculons le taux de revient d'une entreprise soumise à la TVA :

E = 760,00 DH

AGIOS HT = 770,00 DH

Valeur Nette = 40 000,00 – 770,00 = 39 230,00 DH

Le taux de revient t_e est :

$$t_e = \frac{360 \times AGIOS\,TTC}{V_{nette} \times n} = \frac{360 \times 770,00}{39\,230,00 \times 56} = 12,62\%$$

On constate que le taux de revient de l'entreprise soumise à la TVA est supérieur au taux annoncé 12 %, ce qui signifie que le client paie beaucoup plus que ce qui est annoncé.

2.5.5. Le taux de placement.

Si on se place du coté de la banque, celle ci a effectué un placement d'un montant effectif correspondant à la valeur Nette de l'effet. L'intérêt produit par ce placement correspond uniquement à l'escompte commercial E, les commissions sont destinées à couvrir des charges et la TVA est reversée à l'état. Le taux correspondant est un taux de placement t_p, c'est le rendement réel réalisé par la banque au cours de cette opération.

$$\mathbf{t_p = \frac{360 \times E}{V_{nette} \times n}} \qquad \mathbf{(22)}$$

Ce taux est supérieur au taux d'escompte annoncé t.

Exemple 19 : Reprenons les données de l'exemple 16 et calculons le taux de placement.

E = 760,00 DH

AGIOS HT = 770,00 DH

TVA = 77,00 DH

AGIOS TTC = 847,00 DH

Valeur Nette = 39153,00 DH

Le taux de placement t_p est :

$$t_p = \frac{360 \times E}{V_{nette} \times n} = \frac{360 \times 760{,}00}{39153{,}00 \times 56} = 12{,}48\ \%$$

On constate que le taux de placement est supérieur au taux annoncé 12 %, ce qui signifie que la banque a réalisé un rendement supérieur au taux annoncé.

Le taux de revient de l'entreprise est toujours supérieur au taux réel qui est supérieur au taux de placement.

Ces trois taux relatifs à l'opération d'escompte sont supérieurs au taux d'escompte annoncé.

Exemple 20 : Reprenons les données de l'exemple 16 et vérifions l'ordre des trois taux relatifs à l'opération d'escompte.

$t = 12\ \% < t_p = 12{,}48\ \% < t_r = 13{,}61\ \% < t_e = 13{,}91\ \%$

2.6. EQUIVALENCE D'EFFETS.

Le concept d'équivalence trouve son application dans une opération d'escompte lorsqu'on cherche à remplacer :

- un effet de commerce par un autre effet ;
- un effet de commerce par plusieurs autres effets ;
- plusieurs effets par un seul effet ;
- plusieurs effets par plusieurs autres effets.

Cette opération de remplacement ne peut être opérée que si elle ne procure aucun avantage (ou inconvénient) à la banque ou au client.

2.6.1. Equivalence de deux effets.

La notion d'équivalence de deux effets intervient lorsqu'on désire remplacer un effet négocié par un autre effet de façon qu'il n'y ait aucun avantage pour la banque ou le client. Pour ce faire et comme un effet négocié coûte un escompte, au moment de sa négociation, les deux effets doivent avoir la même date de négociation et la même valeur actuelle à cette date.

Cette définition de l'équivalence de deux effets, qu'on vient de donner, implique donc deux conditions :

- que les deux effets aient la même date de négociation ;
- que les deux effets aient la même valeur actuelle, à cette date.

Deux effets de valeurs nominales VN_1 et VN_2, d'échéances respectives n_1 et n_2 jours, escomptés aux taux d'escompte t_1 et t_2, sont dits équivalents, à leur date commune de leur remise à l'escompte, si à cette date, leur valeur actuelle sont égales :

Par définition, on a donc : $\mathbf{VN_1 - E_1 = VN_2 - E_2}$

$$\mathbf{VN_1 - VN_1\, t_1\, n_1 = VN_2 - VN_2\, t_2\, n_2}$$

Les durées d'escompte peuvent être comptées en mois ou en jours, dans ces cas, l'égalité d'équivalence devient :

¤ **Pour des durées comptées en mois** :

$$\mathbf{VN_1 - \frac{VN_1 n_1 t_1}{12} = VN_2 - \frac{VN_2 n_2 t_2}{12}} \qquad \mathbf{(23)}$$

¤ **Pour des durées comptées en jours** :

$$\mathbf{VN_1 - \frac{VN_1 n_1 t_1}{360} = VN_2 - \frac{VN_2 n_2 t_2}{360}} \qquad \mathbf{(24)}$$

La formule de l'équivalence de 2 effets est une relation entre les 6 paramètres VN_1, VN_2, n_1, n_2, t_1 et t_2, elle permet donc de calculer l'un de ces paramètres si l'on connaît les 5 autres. Comme les 2 effets jouent des rôles symétriques, nous nous contenterons, pour étudier tous les cas possibles, de ne résoudre que des problèmes de détermination des paramètres relatifs à l'effet 2, à savoir de détermination de VN_2 (la valeur nominale) puis de n_2 (l'échéance) et enfin de t_2 (la taux d'escompte).

Exemple 21 : Quel est la valeur nominale d'un effet de commerce d'échéance le 28 juin afin qu'il soit négocié, le 20 mars de la même année, en remplacement d'un effet de commerce de valeur nominale 8 000,00 DH et d'échéance le 5 mai, remis à l'escompte le 20 mars de la même année, au taux d'escompte de 13 %.

Remarquons qu'il y a :

- Pour le 1è effet : 46 jours entre la date de remise à l'escompte (le 20 mars) et la date d'échéance de l'effet (le 5 mai) ;
- Pour le 2è effet : 100 jours entre la date de remise à l'escompte (le 20 mars) et la date d'échéance de l'effet (le 28 juin).

Reprenons l'équation d'équivalence (24) :

$$VN_1 - \frac{VN_1 n_1 t_1}{360} = VN_2 - \frac{VN_2 n_2 t_2}{360}$$

Si on multiplie les deux membres par 360 et qu'on isole les termes en VN_2 :

$360 \text{ x } VN_1 - VN_1 n_1 t = 360\text{x } VN_2 - VN_2 n_2 t = VN_2 (360 - n_2 t)$

$$VN_2 = \frac{VN_1 \times (360 - n_1 t)}{360 - n_2 t} = \frac{8000 \times (360 - 46 \times 0{,}13)}{360 - 100 \times 0{,}13} = 8161{,}84 \text{ DH}$$

Vérifions que les 2 effets ont bien la même valeur actuelle, le jour de leur remise à l'escompte, c'est-à-dire le 20 mars :

Pour le 1è effet $VN_1 - \frac{VN_1 n_1 t_1}{360} = 8000{,}00 - \frac{8000{,}00 \times 46 \times 0{,}13}{360} = 7867{,}11 \text{ DH}$

Pour le 2è effet $VN_2 - \frac{VN_2 n_2 t_2}{360} = 8161{,}84 - \frac{8161{,}84 \times 100 \times 0{,}13}{360} = 7867{,}11 \text{ DH}$

Le 20 mars, les valeurs actuelles des 2 effets sont égales.

Exemple 22 : Quelle est l'échéance d'un effet de commerce de valeur nominale d'un montant égal à 12 867,17 DH qu'on décide, le 1er janvier, de donner en remplacement à un effet de commerce de valeur nominale 12 500,00 DH, d'échéance le 31 janvier, remis à l'escompte le 1er janvier, si les 2 effets sont négociés au même taux d'escompte 8,5% ?

Le 1er effet de valeur nominale 12 500,00 DH a son échéance, le 31 janvier, soit 30 jours après le 1er janvier.

Le 2è effet de valeur nominale 12 867,17 DH a son échéance, n_2 jours après le 1er janvier.

Reprenons l'équation d'équivalence (24) :

$$VN_1 - \frac{VN_1 n_1 t_1}{360} = VN_2 - \frac{VN_2 n_2 t_2}{360}$$

Si on multiplie les deux membres par 360 et qu'on isole le terme en n_2 :

$360 \text{ x } VN_1 - VN_1\, n_1\, t = 360 \text{x } VN_2 - VN_2\, n_2\, t$

$n_2 \text{ x } VN_2\, t = 360\,(VN_2 - VN_1) + VN_1\, n_1\, t$

$$n_2 = \frac{360 \times (VN_2 - VN_1) + VN_1 n_1 t}{VN_2 \times t}$$

$$n_2 = \frac{360 \times (12\,867{,}17 - 12\,500{,}00) + 12\,500{,}00 \times 30 \times 0{,}085}{12\,867{,}17 \times 0{,}085} = 150 \text{ jours}$$

L'échéance du deuxième effet est dans 150 jours après le 1è janvier, ce qui correspond au 31 mai de la même année.

Vérifions que le 1è janvier, les 2 effets ont bien la même valeur actuelle :

Pour le 1è effet :

$$VN_1 - \frac{VN_1 n_1 t_1}{360} = 12\,500{,}00 - \frac{12\,500{,}00 \times 30 \times 0{,}085}{360} = 12\,411{,}46 \text{ DH}$$

Pour le 2è effet :

$$VN_2 - \frac{VN_2 n_2 t_2}{360} = 12\,867{,}17 - \frac{12\,867{,}17 \times 150 \times 0{,}085}{360} = 12\,411{,}46 \text{ DH}$$

Le 1è janvier, les valeurs actuelles des 2 effets sont égales.

Exemple 14 : A quel taux d'escompte doit-on négocier un effet de commerce de valeur nominale 34 134,78 DH, remis, à l'escompte, le 5 avril et ayant comme date d'échéance le 20 avril pour remplacer un effet de commerce de valeur nominale 35 150,00 DH, remis, à l'escompte le 5 avril, aux taux de 10% et ayant comme date d'échéance le 3 août ?

Reprenons l'équation d'équivalence : $VN_1 - \dfrac{VN_1 n_1 t_1}{360} = VN_2 - \dfrac{VN_2 n_2 t_2}{360}$

Si on multiplie les deux membres par 360 et qu'on isole le terme en t_2 :

$360 \text{ x } VN_1 - VN_1 n_1 t_1 = 360\text{x } VN_2 - VN_2 n_2 t_2$

$t_2 \text{ x } VN_2 n_2 = 360 (VN_2 - VN_1) + VN_1 n_1 t_1$

$$t_2 = \frac{360 \times (VN_2 - VN_1) + VN_1 n_1 t_1}{VN_2 \times n_2}$$

$$t_2 = \frac{360 \times (34134{,}78 - 35150{,}00) + 35150{,}00 \times 120 \times 0{,}1}{34134{,}78 \times 120} = 11\%$$

Le taux d'escompte auquel il faut négocier le 2è effet est 11%.

Vérifions que le 5 avril, les 2 effets ont bien la même valeur actuelle :

Pour le 1è effet :

$$VN_1 - \frac{VN_1 n_1 t}{360} = 34134{,}78 - \frac{34134{,}78 \times 15 \times 0{,}11}{360} = 33978{,}33 \text{ DH}$$

Pour le 2è effet :

$$VN_2 - \frac{VN_2 n_2 t}{360} = 35150{,}00 - \frac{35150{,}00 \times 120 \times 0{,}11}{360} = 33978{,}33 \text{ DH}$$

Le 1è janvier, les 2 valeurs actuelles sont égales.

2.6.2. Equivalence d'un effet avec plusieurs effets.

2.6.2.1. Remplacement d'un effet par plusieurs effets.

Dans le cas d'un crédit à la consommation d'un montant que la banque accorde à son client, en fonction des revenus de ce dernier, et pour une durée donnée, le remboursement du crédit s'effectue sous forme de traites mensuelles constantes. Si le montant du crédit n'est pas assez important et si la durée de l'emprunt n'est pas assez longue (quelques mois), le calcul du montant de la traite s'effectue de la même manière que dans le cas de l'achat à crédit.

Si l'on désigne par :

- C : somme d'argent empruntée ;
- T : montant de la traite mensuelle, payée en fin de mois ;
- t : taux d'intérêt simple ;
- n : nombre de traites constantes ;
- 1, 2, 3, . . . n : les n échéances mensuelles respectives des différentes traites.

Mois	Valeur de la traite	Valeur actuelle de la traite
1	T	$T-\frac{Tt}{12}$
2	T	$T-\frac{2Tt}{12}$
3	T	$T-\frac{3Tt}{12}$
. . .	. . .	
k	T	$T-\frac{kTt}{12}$
. .	. .	
(n-1)	T	$T-\frac{(n-1)Tt}{12}$
n	T	$T-\frac{nTt}{12}$

Si nous faisons la somme des valeurs actuelles des différentes traites en commençant par les valeurs du haut du tableau, on trouve, sachant que cette somme doit être égale à la valeur actuelle du capital prêté, valeur actuelle du capital prêté :

$$C = T(1-\frac{t}{12}) + T(1-\frac{2t}{12}) + \ldots + T(1-\frac{kt}{12}) + \ldots + T(1-\frac{(n-1)t}{12}) + T(1-\frac{nt}{12})$$

$$C = n\times T - \frac{T\times t}{12}\times\sum_{k=1}^{n} k = T\times\frac{(12\times n - t\times\sum_{k=1}^{n} k)}{12}$$

En multipliant les 2 membres de cette égalité par 12, on trouve :

$$12\,C = T\times(12\times n - t\times\sum_{k=1}^{n} k)$$

Or nous savons que : $\sum_{k=1}^{k=n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

Nous pouvons déduire la valeur de l'échéance T :

$$\mathbf{T = \frac{24 \times C}{n(24 - t \times (n+1))}} \qquad \textbf{(25)}$$

Les n traites de valeurs constante T remplacent l'effet de valeur C le jour du prêt.

En pratique, la banque retient des frais de crédit ; l'emprunteur paie donc un taux d'intérêt réel supérieur au taux d'intérêt annoncé t. En effet, la somme d'argent effectivement empruntée est : C - f (f correspond au montant des frais de crédit).

Le taux d'intérêt réel t_r correspond à l'équation d'équivalence suivante :

$$(C - f) = T(1 - \frac{t_r}{12}) + T(1 - \frac{2t_r}{12}) + \ldots + T(1 - \frac{kt_r}{12}) + \ldots + T(1 - \frac{nt_r}{12})$$

$$(C - f) = T(n - \frac{t_r}{12} \times \sum_{k=1}^{n} k)$$

Ce qui donne pour le taux réel t_r :

$$\mathbf{t_r = \frac{n \times T - (C - f)}{T \times n(n+1)} \times 24} \qquad \textbf{(26)}$$

Ce qui donne en remplaçant T par sa valeur de la formule :

$$\mathbf{t_r = \frac{24C - (C - f)(24 - t(n+1))}{(n+1)C}} \qquad \textbf{(27)}$$

Exemple 24 : Kamal souhaite avoir un crédit à la consommation de 10 000,00 DH à rembourser en 12 mensualités constantes. Le taux d'intérêt est de 13 %, les frais de dossier du crédit sont de 400,00 DH, et la première traite doit être payée 1 mois après la date d'octroi du crédit.

Quel est le montant de la traite et quel est le taux d'intérêt réel du crédit ?

Le montant de la traite mensuelle T est égal, d'après la formule (25), à :

$$T = \frac{24 \times C}{n(24 - t \times (n+1))} = \frac{24 \times 10\,000{,}00}{12 \times (24 - 0{,}13 \times 13)} = 896{,}46 \text{ DH}$$

Le taux réel t_r est égal, d’après la formule (26), à :

$$t_r = \frac{n \times T - (C - f)}{T \times n(n+1)} \times 24 = \frac{12 \times 896,46 - (10\,000,00 - 400)}{896,46 \times 12 \times 13} \times 24 = 19,86\%$$

Pour rembourser ce crédit, Kamal doit payer 896,46 DH par mois pendant 12 mois, ce qui correspond à un taux d'intérêt réel de 19,86 % qui est supérieur au taux d'intérêt annoncé 13 %.

Exemple 25 : Quels sont les frais de dossier d’un crédit de 15 000,00 DH octroyé par la banque avec un remboursement de 9 traites mensuelles constantes si le taux affiché est de 10% et le taux réel est de 15% ?

On calcule d’abord le montant de la traite mensuelle, d’après la formule (25) :

$$T = \frac{24 \times C}{n(24 - t \times (n+1))} = \frac{24 \times 15\,000,00}{9 \times (24 - 0,10 \times 10)} = 1739,13\ \text{DH}$$

On considère ensuite la formule (26) d’où l’on calcule f :

$$t_r = \frac{n \times T - (C - f)}{T \times n(n+1)} \times 24 \qquad \Rightarrow \qquad f = \frac{n(n+1)Tt_r}{24} - (nT - C)$$

$$f = \frac{n(n+1)Tt_r}{24} - (nT - C) = \frac{9 \times 10 \times 1739,13 \times 0,15}{24} - (9 \times 1739,13 - 1500,00) = 326,09\ \text{DH}$$

2.6.2.2. Remplacement de plusieurs effets par un seul effet.

2.6.2.2.1. Echéance commune.

On peut remplacer plusieurs effets d'échéances différentes par un effet unique équivalent. L'échéance de l'effet équivalent est appelée échéance commune de plusieurs effets.

L'échéance commune dépend de la date d'équivalence.

Exemple 26 : Soit un effet de commerce E de valeur nominale : V = 42400,00 DH

Soient trois effets E_1, E_2, et E_3 d'échéances respectivement le 10 avril, le 5 mars, et le 10 mai de la même année, et de valeurs nominales respectives :

V_1 = 10 000,00 DH V_2 = 8 000,00 DH V_3 = 24 000,00 DH

Le 5 février de la même année, les effets sont négociés au taux de 13%, quelle doit être la date d'échéance de l'effet unique pour qu'il soit équivalent aux trois autres effets ?

L'effet E est équivalent aux trois autres effets si :

$$VA = VA_1 + VA_2 + VA_3$$

$$V - \frac{nVt}{360} = (V_1 - \frac{n_1 V_1 t}{360}) + (V_2 - \frac{n_2 V_2 t}{360}) + (V_3 - \frac{n_3 V_3 t}{360})$$

Les durées d'escompte des trois effets par rapport au 5 février sont donc :

$n_1 = 64$ jours $n_2 = 28$ jours $n_3 = 94$ jours

$$42400 - \frac{n \times 42400 \times 0{,}13}{360} = (10000 - \frac{64 \times 10000 \times 0{,}13}{360}) + (8000 - \frac{28 \times 8000 \times 0{,}13}{360}) + (24000 - \frac{94 \times 24000 \times 0{,}13}{360})$$

$$42400 - \frac{n \times 42400 \times 0{,}13}{36000} = 40873{,}33 \quad => \quad n = 100 \text{ jours}$$

L'échéance de l'effet unique équivalent aux trois effets correspond à 100 jours après le 5 février, c'est à dire le 16 mai de la même année.

Vérifions qu'à la date du 5 février, jour de négociation, l'effet de commerce unique a une valeur actuelle égale à la somme des valeurs actuelles des 3 effets de commerces.

Pour l'effet de commerce unique, on a :

$$VA = 42000\,(1 - \frac{100 \times 0{,}13}{360} = 40868{,}89 \text{ DH}$$

Pour les 3 effets de commerces, on a :

$$VA_1 + VA_2 + VA_3 = 10000\,(1 - \frac{64x0{,}13}{360}) + 8000\,(1 - \frac{28x0{,}13}{360}) + 24000\,(1 - \frac{94x0{,}13}{360}) = 40873{,}3 DH$$

On trouve bien que la valeur actuelle de l'effet de commerce unique, le 5 février, est presque égale à la somme des valeurs actuelles des 3 effets de commerces.

2.6.2.2.2. Échéance moyenne.

On peut remplacer plusieurs effets d'échéance différentes par un effet unique de valeur nominale égale à la somme des valeurs nominales de ces effets, l'échéance moyenne est l'échéance de l'effet unique. L'échéance moyenne est donc un cas particulier de l'échéance commune.

Soient plusieurs effets :

Effets	**Valeur nominale**	**Echéances**
E_1	V_1	n_1
E_2	V_2	n_2
.	.	.
.	.	.
.	.	.
E_k	V_k	n_k

Soit un effet de commerce de remplacement de valeur nominale V et d'échéance n tel que :

$$V = V_1 + V_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots.. + V_k$$

L'équation d'équivalence s'écrit :

$$V - \frac{nVt}{360} = (V_1 - \frac{n_1 V_1 t}{360}) + (V_2 - \frac{n_2 V_2 t}{360}) + \ldots\ldots\ldots\ldots + (V_k - \frac{n_k V_k t}{360})$$

$$V - \frac{nVt}{360} = V_1 + V_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots V_k - \frac{n_1 V_1 + n_2 V_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + n_k V_k}{360} \times t$$

$$V - \frac{nVt}{360} = V - \frac{n_1 V_1 + n_2 V_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + n_k V_k}{360} \times t$$

En multipliant par V puis par 360 et t on trouve l'équation simple :

$$n \times V = \sum_{i=1}^{k} n_i V_i$$

$$\mathbf{n} = \frac{\sum_{i=1}^{k} \mathbf{V_i} \times \mathbf{n_i}}{\sum_{i=1}^{k} \mathbf{V_i}} \qquad \textbf{(28)}$$

L'échéance de l'effet unique, dite échéance moyenne, est égale à la moyenne arithmétique des échéances des différents effets pondérés par leur valeur nominale.

L'échéance moyenne est indépendante de la date d'équivalence et du taux d'escompte.

Exemple 27 : Soient trois effets de commerce de valeurs nominales respectives, 10 000,00DH, 8 000,00 DH, et 24 000,00 DH. Leurs échéances respectives se situent le 10 avril, le 5 mars de la même année et le 10 mai de la même année.

On peut remplacer ces trois effets par un effet unique de valeur nominale V, égale à la somme des trois valeurs nominales.

$$V = 10000 + 8000 + 24000 = 42000 \text{ DH}$$

L'échéance moyenne des trois effets est l'échéance de l'effet unique. Puisque l'échéance moyenne est indépendante de la date d'équivalence, on peut choisir la date d'échéance du premier effet comme date d'équivalence, c'est à dire le 5 mars.

Au 5 mars, les durées d'escompte respectives des trois effets sont donc, 36 , 0 et 66 jours.

L'échéance moyenne n est donc :

$$n = \frac{10\,000{,}00 \times 36 + 8\,000{,}00 \times 0 + 24\,000{,}00 \times 66}{10\,000{,}00 + 8\,000{,}00 + 24\,000{,}00} = 46{,}28 = 47 \text{ jours}$$

L'échéance moyenne se situe 47 jours après le 5 mars, c'est à dire le 21 avril de la même année.

2.6.3. Equivalence de deux ensembles d’effets.

C’est le cas général dans lequel on considère 2 ensembles de p et de q effets dont les caractéristiques respectives sont les suivantes :

1er ensemble : p effets : - Valeurs nominales : VN_i , i allant de 1 à p ;
: - J jours de remise à l’escompte ;
: - Durée d’escompte n_i , i allant de 1 à p;
: - Taux d’escompte t_i , i allant de 1 à p;
: - Valeurs actuelles VA_i , i allant de 1 à p ;

2è ensemble : q effets : - Valeurs nominales : VN'_j , j allant de 1 à q ;
: - J jours de remise à l’escompte ;
: - Durée d’escompte n'_j , j allant de 1 à q;
: - Taux d’escompte t'_j , j allant de 1 à q;
: - Valeurs actuelles VA'_j , j allant de 1 à p ;

Ces 2 ensembles d'effets sont équivalents si :

- d'abord tous les effets constituant les 2 ensembles ont la même date de remise à l'escompte ;
- si la somme des valeurs actuelles des effets constituants le 1er ensemble est égale à la somme des valeurs actuelles des effets constituants le 2è ensemble, à leur date J commune de négociation :

$$VA_1 + VA_2 \cdots VA_p = VA'_1 + VA'_2 \ldots VA'_q \qquad => \qquad \sum_{i=1}^{i=p} VA_i = \sum_{j=1}^{j=q} VA'_j$$

$$\sum_{i=1}^{i=p} (VN_i - \frac{n_i\ VN_i\ t_i}{360}) = \sum_{j=1}^{j=q} (VN'_j - \frac{n'_j\ VN'_j\ t'_j}{360})$$

Remarquons que le fait d'utiliser le même indice i dans les deux membres de l'égalité, ne change rien à la validité de cette dernière puisque cet indice est seulement un indice courant ou muet, comme on dit.

L'égalité d'équivalence de 2 ensembles d'effets est une relation entre les 6 ensembles de paramètres : VNi, VN'_i, n'_i, $_n{'}_i$, t_i et $_t{'}_i$. Elle permet donc de calculer l'un de ces paramètres si l'on connaît tous les autres. Comme les 2 ensembles d'effets jouent des rôles symétriques, nous nous contenterons, pour étudier tous les cas possibles, de ne résoudre que des problèmes de détermination des paramètres relatifs à un effet du 2è ensemble, à savoir de détermination de VN (la valeur nominale) puis de n (l'échéance) et enfin de t (le taux d'escompte).

Exemple 28 : Soient trois effets de commerce de valeurs nominales respectives, 10 000,00 DH, 8 000,00 DH, et 24 000,00 DH. Leurs échéances respectives se situent le 10 avril, le 5 mars et le 10 mai de la même année. Les trois effets sont remis à l'escompte le 20 janvier de la même année au taux d'escompte de 13 %.

Quelle est la valeur nominale de l'effet de commerce équivalent aux trois effets précédents si nous supposons que cet effet soit remis à l'escompte le 20 janvier, négocié à un taux d'escompte de 7% pour une échéance le 27 Mai.

Les durées d'escomptes des 3 effets sont respectivement 80 jours, 44 jours et 110 jours. La durée d'escompte de l'effet équivalent est de 117 jours

La relation d'équivalence de l'effet de commerce avec les 3 autres effets est :

$$VN + \frac{n\,VN\,t}{360} = (VN_1 - \frac{n_1\ VN_1\ t}{360}) + (VN_2 - \frac{n_2\ VN_2\ t}{360}) + (VN_3 - \frac{n_3\ VN_3\ t}{360})$$

$$VN(1 + \frac{n\ t}{360}) = (VN_1 - \frac{n_1\ VN_1\ t}{360}) + (VN_2 - \frac{n_2\ VN_2\ t}{360}) + (VN_3 - \frac{n_3\ VN_3\ t}{360})$$

$$VN = \frac{VN_1(360 - n_1\ t) + VN_2(360 - n_2\ t) + VN_3(360 - n_3\ t)}{360 - nt}$$

$$VN = \frac{10000(360 - 80 \times 0{,}13) + 8000(360 - 44 \times 0{,}13 + 24000(360 - 110 \times 0{,}13)}{360 - 117 \times 0{,}13} = 42\ 423{,}04 \text{ DH}$$

Exemple 29 : Soient 4 effets de commerce de valeurs nominales respectives, 8 000,00 DH, 12 000,00 DH, 10 000,00 DH et 20 000,00 DH, d’échéances respectives, le 5 mars, le 12 avril, le 6 mai et le 10 juin de la même année sont remis tous les 4 à l’escompte le 10 janvier de la même année pour une valeur de 48 253,44 DH.

Déterminer le taux d’escompte affiché et les taux d‘escompte effectifs.

Nous désirons remplacer les 4 effets par un seul effet négocié le 10 janvier. La valeur actuelle de cet effet de remplacement correspond à la somme des valeurs actuelles des quatre effets négociés.

Les durées d’escomptes sont respectivement 54 jours, 92 jours, 116 jours et 151 jours.

L’égalité d’équivalence de l’effet de remplacement avec les 4 effets s’écrit :

$$VA = (VN_1 - \frac{n_1\ VN_1\ t}{360}) + (VN_2 - \frac{n_2\ VN_2\ t}{360}) + (VN_3 - \frac{n_3\ VN_3\ t}{36000}) + (VN_4 - \frac{n_4\ VN_4\ t}{36000})$$

On isole les termes contenant t :

$$VA = VN_1 + VN_2 + VN_3 + VN_4 - \frac{t}{360}\ (n_1\ VN_1 + n_2\ VN_2 + n_3\ VN_3 + n_4\ VN_4)$$

$$t = \frac{360 \times (VN1 + VN2 + VN3 + VN4 - VA)}{n1\,VN1 + n2\,VN2 + n3\,VN3 + n4\,VN4}$$

$$t = \frac{(8000 + 12000 + 10000 + 20000 - 48253{,}44) \text{ x } 360}{54\text{x}8000 + 92\text{x}12000 + 116\text{x}10000 + 151\text{x}20000} = 11\%$$

C’est là le taux d’escompte affiché ; pour calculer les taux d’escompte effectifs, ils dépendent, d’après la formule (17), de la durée d’escompte de l’effet, c’est pourquoi nous calculons le taux d’escompte réel pour chaque effet :

Rappelons la formule (17) : $t_{eff} = \frac{360 \times t_a}{360 - n \times t_a}$

Pour le 1è effet de 8 000,00 DH escompté pendant 54 jours :

$$t_{eff} = \frac{360 \times 0{,}11}{360 - 54 \times 0{,}11} = 11{,}18\%$$

Pour le 2è effet de 12 000,00 DH escompté pendant 92 jours :

$$t_{eff} = \frac{360 \times 0{,}11}{360 - 92 \times 0{,}11} = 11{,}32\%$$

Pour le 3è effet de 10 000,00 DH escompté pendant 116 jours :

$$t_{eff} = \frac{360 \times 0{,}11}{360 - 116 \times 0{,}11} = 11{,}40\%$$

Pour le 4è effet de 20 000,00 DH escompté pendant 151 jours :

$$t_{eff} = \frac{360 \times 0{,}11}{360 - 151 \times 0{,}11} = 11{,}53\%$$

Ces calculs montrent clairement que la banque facture son escompte à des taux effectifs variables, ces taux augmentent si la période d'escompte augmente ce qui est évident d'après la formule (17).

Exemple 30 : On considère 3 effets de commerce ayant les caractéristiques suivantes :

¤ VN_1 = 1 215,00 DH ; n_1 = 11 jours et t_1 = 6% ;
¤ VN_2 = 4 575,00 DH ; n_2 = 60 jours et t_2 = 7% ;
¤ VN_3 = 2 370,00 DH ; n_3 = 45 jours et t_3 = 5% ;

On considère encore 2 autres effets de commerce ayant les caractéristiques suivantes :

¤ VN'_1 = 5 000,00 DH ; n'_1 = 25 jours et t'_1 = 6% ;
¤ VN'_2 = 3 055,00 DH ; et t'_2 = 7% ;

Déterminer la date d'échéance du 2è effet du second ensemble d'effets pour que les 2 ensembles d'effets soient équivalents, le jour de leur remise à l'escompte, le 3 mars :

Ces 2 ensembles d'effets sont équivalents si la somme des valeurs actuelles des 3 effets constituants le 1er ensemble d'effets est égale à la somme des valeurs actuelles des 2 effets constituants le 2è ensemble d'effets, le jour de remise à l'escompte, c'est-à-dire :

$$VA_1 + VA_2 + VA_3 = VA'_1 + VA'_2$$

$$(VN_1 - \frac{n_1\ VN_1\ t_1}{360}) + (VN_2 - \frac{n_2\ VN_2\ t_2}{360}) + (VN_3 - \frac{n_3\ VN_3\ t_3}{360})$$
$$= (VN'_1 - \frac{n'_1\ VN'_1\ t'_1}{360}) + (VN'_2 - \frac{n'_2\ VN'_2\ t'_2}{360})$$

On isole le terme contenant n'_2 :

$$(VN_1 + VN_2 + VN_3 - VN'_1 - VN'_2) - \frac{1}{360}\ (n_1 VN_1 t_1 + n_2 VN_2 t_2 + n_3 VN_3 t_3 -$$
$$- n'_1 VN'_1 t'_1) = \frac{n'_2}{360}\ VN'_2 t'_2$$

$$n'_2 = \frac{360 \times (\sum_1^3 VN_i - \sum_1^2 VN'_i) - (\sum_1^3 n_1 VN_i t_i - n'_1 VN'_1 t'_1)}{VN'_2\ t'_2}$$

$$n'_2 = \frac{360 \times (1215 + 4575 + 2370 - 5000 - 3055)}{3\,055 \times 0{,}07}$$

$$- \frac{11 \times 1215 \times 0{,}06 + 60 \times 4575 \times 0{,}07 + 45 \times 2370 \times 0{,}05 - 25 \times 5000 \times 0{,}06}{3\,055 \times 0{,}07}$$

= 93,29 jours on prend 93 jours.

La date d'échéance du second effet du second ensemble d'effet se situe 93 jours après le 3 mars, soit le 4 juin de la même année.

Vérifions que la somme des valeurs actuelles des 3 premiers effets est bien égale à la somme des valeurs actuelles des 2 derniers effets.

Pour les 3 premiers effets, nous avons comme valeurs actuelles :

$$VA_1 = VN_1 (1 - \frac{n_1\ t}{360}) = 1\,215 \times (1 - \frac{0{,}06 \times 11}{360}) = 1\,212{,}77 \text{ DH}$$

$$VA_2 = VN_2 (1 - \frac{n_2\ t}{360}) = 4\,575 \times (1 - \frac{0{,}07 \times 60}{360}) = 4\,521{,}63 \text{ DH}$$

$$VA_3 = VN_3(1 - \frac{n_3\ t}{360}) = 2\,370 \times (1 - \frac{0{,}065 \times 45}{360}) = 2\,355{,}19 \text{ DH}$$

Pour les 2 derniers effets, nous avons comme valeurs actuelles :

$$VA'_1 = VN'_1\ (1 - \frac{n'_1\ t}{360}) = 5\,000 \times (1 - \frac{0{,}06 \times 25}{360}) = 4\,979{,}17 \text{ DH}$$
$$VA'_2 = VN'_2\ (1 - \frac{n'_2\ t}{360}) = 3\,055 \times (1 - \frac{0{,}07 \times 93}{360}) = 2\,999{,}76 \text{ DH}$$

$VA_1 + VA_2 + VA_3$ = 1 212,77 + 4 521,63 + 2 355,19 = 8 089,59 DH

$VA'_1 + VA'_2$ = 4 979,17 + 2 999,76 = 7 978,92 DH

On voit bien que les 2 sommes de valeurs actuelles sont presque égales (8 089,59 et 7 978,92 qui différent de moins 1,4 de %), cette différence vient du fait qu'on a trouvé n'_2 = 93,12 et non 93 exactement.

2.7. EXERCICES D'APPLICATIONS.

2.7.1. Exercice.

a) Calculer l'escompte dû pour un effet de valeur nominale 15 000,00 DH d'échéance le 15 mai et remis à l'escompte le 23 mars au taux de 7,5%.

b) Calculer le taux d'escompte auquel a été négocié un effet de commerce de valeur nominale 8 500,00 DH d'échéance le 28 juin s'il est remis à l'escompte le 3 juin et qu'il ait coûté un escompte de 35,42 DH.

c) Déterminer la date d'échéance d'escompte d'un effet commercial de valeur nominale 5 250,00 DH, remis à l'escompte le 13 août au taux d'escompte de 8% et ayant coûté 87,50 DH d'escompte.

d) Calculer la valeur nominale d'un effet de commerce, remis à l'escompte le 5 avril, au taux de 5% et ayant coûté 93,75 DH d'escompte si sa date d'échéance est le 4 juillet.

Réponses : a) 165,63 DH ; b) 6% ; c) 27 octobre ; d) 7 500,00 DH.

2.7.2. Exercice.

a) Calculer la valeur actuelle d'un effet de commerce de valeur nominale 3 650,00 DH, remis à l'escompte le 10 juillet pour une date d'échéance le 9 août et ayant occasionné 27,38 DH d'escompte.

b) Calculer la valeur actuelle d'un effet de commerce qui remis à l'escompte le 8 mai pour une échéance le 7 juillet et négocié au taux de 8,5% a une valeur nominale de 12 250,00 DH.

c) Calculer le taux d'escompte d'un effet de commerce d'une valeur nominale égale à 11 250,00 DH qui remis à l'escompte le 3 février pour une date d'échéance le 20 mars, acquiert une avaleur actuelle de 11 133,98 DH.

d) Déterminer la date d'échéance d'escompte d'un effet commercial de valeur nominale 10 500,00 DH, remis à l'escompte le 7 août avec une valeur actuelle 10 246,25 DH s'il a été négocié au taux d'escompte de 7,25%.

Réponses : a) 3 622,62 ; b) 12 076,46 DH ; c) 8,25% d) 5 décembre.

2.7.3. Exercice.

On considère un effet de commerce, remis à l'escompte, le 12 avril, avec comme date d'échéance le 20 juillet de la même année, si sa valeur nominal est égale à 15 000,00 DH, le taux d'escompte de 12 %, la commissions bancaire de 10 DH et le taux de TVA de 10 %. On prendra en compte un jour de banque.

a) Calculer la valeur nette de cet effet ;
b) Calculer le taux effectif d'escompte de cet effet ;
c) Calculer le taux réel d'escompte de cet effet.

Réponses : a) 14 439,00 DH ; b) 12,41% ; c) 13,6%.

2.7.4. Exercice.

Une société présente à l'escompte le 10 août les quatre effets suivants :

- ¤ 10 000,00 DH à échéance le 20 septembre de la même année ;
- ¤ 12 000,00 DH à échéance le 24 septembre de la même année ;
- ¤ 8 000,00 DH à échéance le 10 octobre de la même année ;
- ¤ 6 000,00 DH à échéance le 25 octobre de la même année.

Les conditions d'escompte sont : taux d'escompte : 13% ; commission de service : 10 DH par effet et Taux de TVA 10 %.

Calculer la valeur nette totale de ces 4 effets en utilisant le bordereau d'escompte et en supposant que la banque compte un jour supplémentaire d'escompte.

Réponses : 35 189,36 DH.

2.7.5. Exercice.

Une personne négocie chez son banquier le 10 juin un effet de commerce de valeur nominale 20 000,00 DH à échéance le 10 juillet, aux conditions suivantes : taux d'escompte 12% ; 2 jours de banque supplémentaires, commissions : 10 DH et taux de TVA : 10 %.

Calculer pour cette opération d'escompte:

a) Le taux réel ;
b) Le taux de revient ;
c) Le taux de placement.

Réponses : a) 14,74% ; b) 14,92% ; c) 12,96%.

2.7.6. Exercice.

Un effet de commerce de valeur nominale 14 000,00 DH et d’échéance le 15 mai est remis à l’escompte le 16 mars au taux d’escompte de 13 %.

a) Déterminer les valeurs actuelles commerciales et rationnelles de cet effet ;
b) Calculer le taux d’escompte rationnel

Réponses : a) 13 696,67 DH et 13 703,10 DH ; b) 12,72 %

2.7.7. Exercice.

Le 31 mai, 3 effets de commerce de valeur nominale 5 000,00 DH chacun sont remis à l'escompte. Le total des AGIOS TTC calculé au taux de 10% avec une commission de 4 DH par effet et taux de TVA de 10 %, s'élève à 297,74 DH.

Sachant que le premier effet est payable le 30 juin et que l'escompte du second effet est égal à 90,28 DH, déterminer les dates d'échéance du deuxième et troisième effet.

Réponses : 4 août et 31 août.

2.7.8. Exercice.

Le 20 mars, un effet de commerce a été escompté au taux de 12%, sa valeur actuelle s’élève alors à 14850 DH. Si l'effet avait été escompté 10 jours avant son échéance, l'escompte aurait été différent du premier cas de 100 DH.

Calculer la valeur nominale de l’effet et sa date d’échéance.

Réponses : 15 000,00 DH et 19 avril.

2.7.9. Exercice.

Le 8 avril, trois effets dont les valeurs nominales sont en progression arithmétique de premier terme 10000 DH, sont escomptés au taux de 10%. Les durées d'escompte des trois effets sont en progression géométrique de premier terme 40 jours. L'escompte total des trois effets est de 661,11 DH.

Si on appliquait aux trois effets la même durée d'escompte égale à 40 jours, le total des trois valeurs actuelles serait de 35 600 DH.

Déterminer les valeurs nominales des deuxièmes et troisièmes effets et les échéances respectives des trois effets.

Réponses : 11 736,26 DH et 13 472,52 DH ; 18 mai, 13 juillet et 24 novembre.

2.7.10. Exercice.

Deux effets de valeurs nominales respectives 10000 DH et 10073,82 DH, et d’échéances respectives le 9 juin et le 14 juillet sont escomptés au taux de 13 %.

A quelle date de remise à l’escompte ces deux effets sont-ils équivalents ?

Réponses : Ces deux effets ne sont jamais équivalents.

2.7.11. Exercice.

Soient deux effets de commerce de valeurs nominales 9840 DH et 9900 DH et d’échéances respectives le 31 octobre et le 30 novembre de la même année.

Sachant que ces deux effets sont remis à l’escompte le 11 septembre de la même année, déterminer le taux d’escompte pour lequel ces deux effets sont équivalents.

Réponses : 7,2%

2.7.12. Exercice.

Soient trois effets de commerce de valeurs nominales respectives, 13000 DH, 22000 DH, et 35000 DH. Leurs échéances respectives se situent le 8 mai d'une année, le 16 juin de la même année et le 24 août de la même année. Les trois effets sont remis à l’escompte le 2 avril de la même année pour une valeur de 67 514,58 DH. Déterminer le taux d’escompte.

Réponses : 14,73%

2.7.13. Exercice.

Calculer la date d'échéance de l'effet unique de valeur nominale 15 000,00 DH et qui remplace les trois effets suivants :

¤ 3 000,00 DH à échéance le 5 mai ;
¤ 2 000,00 DH à échéance le 10 juin ;
¤ 10 000,00 DH à échéance le 5 juillet ;

Réponses : 20 juin de la même année.

2.7.14. Exercice.

L'achat d'un appareil électroménager, d'une valeur de 7 000,00 DH, peut être réglé comme suit

¤ Versement de 2 000,00 DH le jour d'achat.
¤ Paiement de 9 traites mensuelles constantes calculées aux taux de 13%, la première traite intervenant 3 mois après la date d'achat.

a) Calculer le montant de la traite.
b) Sachant que l'achat à crédit exige le paiement de 200,00 DH de frais, calculer le taux d'intérêt réel.

Réponses : a) 601,14 DH ; b) 19,34 %

2.7.15. Exercice.

On considère 2 effets de commerces ayant les caractéristiques suivantes :

VN_1 = 12 500,00 DH échéance le 17/04 taux t_1 = 10 %

VN_2 = 17 250,00 DH échéance le 25/06 taux t_2 = 8 %

On considère 1 effet de commerce d’échéance le 12/05 négocié au taux t = 9,5 %

a) Quelle est la valeur nominale de ce dernier effet afin qu’il soit équivalent aux 2 premiers effets le jour de la négociation à savoir le 25/03 ?

b) Le troisième effet est-il toujours équivalent aux 2 premiers le 20/03 ?

c) Quels sont les taux effectifs des 3 effets considérés pour une date de négociation le 25/03 ?

Réponses : a) 29 693,59 DH ; b) Non, le troisième effet n’est plus équivalent aux 2 premiers le 20/03 ; c) 10,06 % ; 8,17 % et 9,62 %

Note de lecture 2

NOTION D'EQUIVALENCE DE CAPITAUX

Dans cette 2è note de lecture, nous essaierons de faire quelques parallèles entre capital placé ou prêté et effet de commerce négocié :

Dans le chapitre 1, nous avons étudié le cas de capitaux placés ou prêtés qui produisent des intérêts payables à la date d'échéance, par contre, dans le chapitre 2, nous avons étudié le cas d'effets de commerce négociés qui coûtent des intérêts payables à la date de remise à l'escompte.

On parle, dans le 1è cas, d'intérêts post payés et, dans le second cas, d'intérêts pré payés. Cette différence entre les dates de paiement des intérêts va induire toutes les différences dans l'équivalence de capital, dans le cas de capitaux prêtés ou placés et d'équivalence d'effets de commerce négociés

***1) Pour parler d'équivalence de capitaux** :*

Dans le cas de capitaux placés ou prêtés, comme les intérêts sont post payés, c'est-à-dire payés, à la date d'échéance, nous avons dû considérer des capitaux ayant la même date d'échéance et des valeurs acquises égales, à cette date d'échéance.

Dans le cas d'effets de commerce négociés, comme les intérêts sont pré payés, c'est-à-dire payés, à la date de la remise des effets, nous avons dû considérer des effets ayant la même date de remise à l'escompte et des valeurs actuelles égales, à cette date.

L'équivalence de capitaux a lieu au moment du paiement des intérêts, c'est-à-dire :

- *à la date d'échéance pour des capitaux prêtés ou placés ;*

- *à la date de remise pour des effets de commerce.*

Cette notion ou théorie d'équivalence de capitaux sera étudiée, plus en détail, dans les chapitres suivants car elle représente, comme nous le verrons, une notion essentielle, en mathématiques financières à courts moyens et longs termes.

***2) Pour parler de taux effectif** :*

Dans le cas des capitaux placés ou prêtés, nous avons parlé de taux d'intérêt effectif en considérant des intérêts pré payés alors qu'ils sont, en fait post payés ;

Dans le cas d'effets de commerce, nous avons parlé de taux d'escompte effectif en considérant des intérêts post payés alors qu'ils sont pré payés.

***3) Taux réels** :*

Tant pour les capitaux placés ou prêtés que pour les effets de commerce négociés, nous avons introduit des taux d'intérêt et taux d'escompte réels en prenant en compte les frais supplémentaires que facture la banque et le(s) jour(s) supplémentaire(s) que compte la banque.

PARTIE 2

MATHEAMTIQUES FINANCIERES
A MOYENS ET LONGS TERMES

Le moyen et long terme, en finance, se comptent en mois, trimestres, semestres ou années.
Les mathématiques financières, à moyen et long terme, se déduisent d'une seule et unique formule.

La formule fondamentale des intérêts composés :

$$C_n = C\,(1+t)^n$$

CHAPITRE 3
L'INTERET COMPOSE

3.1. DEFINITION DES INTERETS COMPOSES.

L'intérêt composé est l'application du taux d'intérêt simple sur une durée composée de plusieurs périodes. A la fin de chaque période, l'intérêt simple produit est ajouté au capital pour produire de l'intérêt simple sur le nouveau capital pendant la période suivante. On dit que l'intérêt est capitalisé. Les intérêts composés sont utilisés pour les opérations financières à moyen et long terme.

Exemple 1 : Supposons que l'on place un capital C_0 d'un montant égal à 100 000,00 DH au taux d'intérêt t = 10%.

Au bout d'une année, le capital C_0 produira un intérêt simple I_1 :

$$I_1 = 100\ 000{,}00 \text{ x } 10\% = 10\ 000{,}00 \text{ DH}$$

L'intérêt I_1 s'ajoutera au capital C_0 pour donner le nouveau capital C_1 :

$$C_1 = C_0 + I_1 = 100\ 000{,}00 + 10\ 000{,}00 = 110\ 000{,}00 \text{ DH}$$

Au bout d'une deuxième année, le capital C_1 produira un intérêt simple I_2 :

$$I_2 = 1 \times 110\ 000{,}00 \times 0{,}10 = 11\ 000{,}00 \text{ DH}$$

L'intérêt I_2 s'ajoutera encore au capital C_1 pour donner le nouveau capital C_2 :

$$C_2 = C_1 + I_2 = 110\ 000{,}00 + 11\ 000{,}00 = 121\ 000{,}00 \text{ DH}$$

Au bout d'une troisième année, le capital C_2 produira un intérêt simple I_3 :

$$I_3 = 1 \times 121\ 000{,}00 \times 0{,}10 = 12\ 100{,}00 \text{ DH}$$

L'intérêt I_3 s'ajoutera encore au capital C_2 pour donner le nouveau capital C_3 :

$$C_3 = C_2 + I_3 = 121\ 000{,}00 + 12\ 100{,}00 = 133\ 100{,}00 \text{ DH}$$

Au bout des trois années, le capital C_0 de 100 000,00 DH produira un intérêt I :

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = 33\ 100{,}00 \text{ DH}$$

Cet intérêt est différent de l'intérêt simple calculé sur une seule période de trois ans et qui s'élève à 30 000,00 DH uniquement. L'intérêt ainsi calculé est appelé intérêt composé car il se compose d'intérêts sur le capital et d'intérêts sur des intérêts. Voilà pourquoi on parle d'intérêt composé.

¤ 100 000,00 DH placés, pendant 3 ans, au taux d'intérêt simple, de 10 % acquiert une valeur de 130 000,00 DH.

¤ 100 000,00 DH placés, pendant 3 ans, au taux d'intérêt composé, de 10 % acquiert une valeur de 110 000,00 DH la première année, de 121 000,00 DH la deuxième année et de 133 100,00 DH la troisième année.

On remarque que l'intérêt composé est supérieur à l'intérêt simple car il y a capitalisation des intérêts simples produits à la fin de chaque période.

3.2. FORMULE FONDAMENTALE DES INTERETS COMPOSES.

Soit un capital C placé à intérêt composé au taux d'intérêt t pendant une durée de n périodes, essayons de refaire, dans un cas général, le même raisonnement que celui que nous avons fait dans l'exemple particulier 1.

Le tableau suivant donne, pour chaque période, le capital placé en début de période, l'intérêt de la période et la valeur acquise en fin de période :

Périodes	**Capital placé en début de période**	**Intérêt de la période**	**Valeur acquise en fin de période**
1	C	$C \times t$	$C + C \times t = C(1 + t)$
2	$C(1 + t)$	$C(1 + t) \times t$	$C(1 + t) + C(1 + t) \times t = C(1 + t)^2$
3	$C(1 + t)^2$	$C(1 + t)^2 \times t$	$C(1 + t)^2 + C(1 + t)^2 \times t = C(1 + t)^3$
. . .	. . .	. . .	. . .
n	$C(1 + t)^{n-1}$	$C(1 + t)^{n-1} \times t$	$C(1 + t)^{n-1} + C(1 + t)^{n-1} \times t = C(1 + t)^n$

D'où la formule fondamentale des intérêts composés qui donne la valeur acquise C_n d'un capital C_0 placé au taux d’intérêt composé t pendant une durée de n périodes :

$$\mathbf{C_n = C_0(1+t)^n} \qquad \mathbf{(1)}$$

La formule donnant l’intérêt produit par le capital pendant toute la période considérée est évidemment :

$$\mathbf{I = C_n - C_0 = C_0(1 + t)^n - C_0} \qquad \mathbf{(1\ bis)}$$

On constate, tout d’abord, que la suite des valeurs acquises par le capital, à savoir : C_0, C_1, C_2,… et C_n est une progression géométrique dont le premier terme est C_0 et la raison est (1 + t).

Rappelons notre première remarque faite au premier chapitre dans laquelle nous avions relevé que la formule (1) fondamentale de l’intérêt simple que nous avons utilisée :

$$\mathbf{I = C\ .\ n\ .\ t} \qquad \mathbf{(1\ Chapitre\ 1)}$$

différait de la formule qu’on a l’habitude de trouver, dans les ouvrages de mathématiques financières, et qui est :

$$\mathbf{I = \frac{C \times n \times t}{100}} \quad \mathbf{(2\ Chapitre\ 1)}$$

En effet, nous avons relevé que la différence entre les formules (1 Chap 1) et (2 Chap 1) vient du fait que :

- ¤ dans la formule (1 Chap 1), le taux d’intérêt est pris pour sa vraie valeur, à savoir, par exemple, si t = 7% on prendra t = 0, 07 ;

- ¤ dans la formule (2 Chap 1), le taux d’intérêt n’est pas pris pour sa vraie valeur, c’est-à-dire que par exemple, pour t = 7% on prendra la valeur t = 7 seulement, étant donné que le produit n x C x t est déjà divisé par 100.

Nous avions précisé, au chapitre 1, que nous avons, pour notre part, privilégié, l’expression (1 Chapitre 1), celle de la notation qui nous semble la plus réelle mathématiquement parlant.

Or, tous les ouvrages de mathématiques financières qui utilisent la formule (2 Chapitre 1) pour le calcul de l’intérêt simple, utilisent la formule (1 Chapitre 3) pour le calcul des intérêts composés et cela sans crier garde à quelque incohérence que ce soit !

Nous allons prendre un exemple pour voir en quoi consiste cette incohérence.

Exemple 2 : Soit un capital C = 10 000,00 DH placé pendant 3 périodes ;

a) Calculer l'intérêt produit par ce capital dans le cas d'un placement à un taux d'intérêt simple t = 10% ;

b) Calculer l'intérêt produit par ce capital dans le cas d'un placement à un taux d'intérêt composé t = 10%.

Utilisation des formules (1 Chapitre 1) et (1 Chapitre 3) :

a) I = C . n . t = 10 000 x 3 x 0,10 = 3 000 DH

b) $I = C(1 + t)^3 - C = 10\,000 \times (1 + 0{,}10)^3 - 10\,000 = 3\,310$ DH

Utilisation des formules (2 Chapitre 1) et (1 Chapitre 3) :

a) $I = \frac{C \times n \times t}{100} = \frac{10\,000 \times 3 \times 10}{100}$ = 10 000 x 3 x 0,10 = 3 000 DH

b) $I = 10\,000 \times (1 + 0{,}10)^3 – 10\,000 = 3\,310$ DH

Ainsi, dans les manuels qui utilisent les formules (1 Chapitre 1) et (1 Chapitre 3), on remplace toujours t par sa vraie valeur mathématique, à savoir si t = 10% on remplacera t par 0,10 par contre, dans les manuels qui utilisent les formules (2 Chapitre 1) et (1 Chapitre 3), on remplace dans la formule (2 Chapitre 1) t par 10 et dans la formule (1 Chapitre 3) par 10% = 0,10. Ceci n'est-il surprenant ?

La formule (2 Chapitre 3) qui est vraiment cohérente avec la formule (2 Chapitre 1) est :

$C_n\ C_0(1\ \frac{t}{100})^n$ dans laquelle on remplace toujours t par 10 comme dans la formule fondamentale (2 Chapitre 1). Mais cette formule (2 Chapitre 3) n'est utilisée dans aucun manuel, à notre connaissance.

Voilà une raison supplémentaire pour laquelle nous privilégions la formule (1 Chapitre 1) à la formule (2 Chapitre 1) et la formule (1 Chapitre 3) à la formule (2 Chapitre 3).

Toutes les formules que nous établirons, dans les chapitres de cette 2è partie, seront des formules déduites de la seule et unique formule fondamentale (1) des intérêts composés.

La formule fondamentale des intérêts composés est une relation entre les quatre variables C_n, C_0, t et n ; elle permet de calculer l'une de ces quatre variables lorsque les trois autres sont connues, elle permet ainsi de résoudre quatre problèmes différents.

Pour ce faire, des tables financières existent et donnent les valeurs de $(1 + t)^n$ pour un nombre important de couples de valeurs de t et de n. Nous profiterons des exemples que nous étudierons pour montrer comment se servir de ces tables financières.

Exemple 3 : Que devient un capital de 200 000,00 DH placé pendant 5 ans au taux semestriel de 5% avec capitalisation semestrielle des intérêts ?

La durée doit donc être exprimée en semestres, soient 10 semestres pour 5 ans.

Au bout de 10 semestres, la valeur acquise est :

$$C_{10} = 200\ 000{,}00 \times (1 + 0{,}05)^{10}$$

En consultant la 1è table financière T.1 on trouve que :

$(1 + 0{,}05)^{10} = 1{,}628895$ ce qui donne $C_{10} = 200\ 000{,}00 \times 1{,}628895 = 325\ 779{,}00$ DH.

En faisant directement le calcul, on trouve : $200\ 000{,}00 \times 1{,}05^{10} = 325\ 778{,}93$ DH

Exemple 4 : A quel taux d'intérêt composé une somme de 10 000 DH devient-elle, en 20 ans, 32 071,35 DH par capitalisation annuelle des intérêts ?

La valeur acquise C_{20} est égale en fonction de C_0 à :

$C_{20} = C_0(1+t)^{20}$ ==> $10\ 000 \times (1+t)^{20} = 32\ 071{,}35$

$(1 + t)^{20} = 32\ 071{,}35 / 10\ 000{,}00 = 3{,}207135$

En consultant les tables financières T.1 on trouve que :

$(1 + 0{,}06)^{20} = 3{,}207\ 135$ donne pour $t = 6\%$.

La résolution de cette équation peut aussi être faite grâce aux racines :

$(1 + t)^{20} = 3{,}207\ 135$ => $t = \sqrt[20]{3{,}207135} - 1 = 6\%$

Exemple 5 : Au bout de combien de temps une somme 25 400,00 DH, placée au taux annuel de 7% par capitalisation annuelle des intérêts atteint-elle la somme de 65 494,76 ?

La valeur acquise C_n est donnée en fonction du capital placé C_0 par la formule :

$C_n = C_0(1+0{,}07)^n$ => $25\ 400{,}00 \times (1 + 0{,}07)^n = 65\ 494{,}76$

$(1 + 0{,}07)^n = 65\ 494{,}76 / 25\ 400{,}00 = 2{,}578\ 534$

En consultant les tables financières T.1 on trouve que :

$(1 + 0{,}07)^{14} = 2{,}578\ 534$ donne pour $n = 14$ années.

La résolution de cette équation peut aussi être faite grâce aux logarithmes :

$n \times \text{Log}(1{,}07) = \log(2{,}578\ 534)$ => $n = \log(2{,}578\ 534) / \text{Log}(1{,}07) = 14$ années.

Exemple 6 : Quelle somme faut-il placer à intérêt composé au taux de 9 % pendant 5 ans pour constituer un capital de 150 000,00 DH ?

La valeur acquise C_n est donnée en fonction du capital placé C_0 par la formule :

$C_n = C_0(1+0{,}09)^5$ => $150\,000{,}00 = C_0\ (1 + 0{,}09)^5$

En consultant les tables financières T.1 on trouve que :

$(1 + 0{,}09)^5 = 1{,}538\,624$ ce qui donne $C_0 = 150\,000{,}00 / 1{,}538\,624 = 97\,489{,}71$ DH

La résolution de cette équation peut aussi être faite grâce à la calculatrice :

$$C_0 = \frac{150000}{(1+0{,}09)^5} = 97489{,}71\,\text{DH}$$

3.3. VALEUR ACTUELLE D'UN CAPITAL.

L'actualisation est l'opération inverse de la capitalisation, en effet :

- Capitaliser c'est déterminer, à un taux d'intérêt composé donné, la valeur future d'une somme, à une date postérieure ;
- Actualiser, c'est déterminer la valeur actuelle, la valeur d'aujourd'hui, à un taux d'intérêt donné, d'une somme payable à une période future.

Soit C un capital payable à une période future n et C_0 la valeur du capital C à la période actuelle 0, on a :

$$\mathbf{C = C_0\,(1+t)^n} \qquad \mathbf{(1)}$$
$$\Rightarrow \quad \mathbf{C_0 = C\,(1+t)^{-n}} \qquad \mathbf{(3)}$$

Ainsi C_0 est dite : la valeur actuelle, à la date 0, du capital C.

Arrivé à ce niveau de chapitre, nous conseillons aux lecteurs de lire la note de lecture 3 donnée à la fin de ce chapitre.

La formule de la valeur actuelle (3) est une relation entre les quatre variables C, C_0, t et n ; elle permet de calculer l'une de ces quatre variables lorsque les trois autres sont connues, elle permet ainsi de résoudre quatre problèmes différents.

Pour ce faire, des tables financières T.2 existent et donnent les calculs de $(1+i)^{-n}$ pour un nombre important de couples de valeurs de t et de n. Nous profiterons des exemples que nous étudierons pour montrer comment se servir de ces tables financières.

Exemple 7 : Quelle somme faut-il placer maintenant à intérêt composé au taux annuel de 9% pour avoir dans 5 ans une valeur acquise de 30 000,00 DH ?

0n a, avec les données : $C_0 = 30\ 000\ (1 + 0{,}09)^{-5}$

Les tables financières T.2 donnent pour $(1 + 0{,}09)^{-5} = 0{,}649\ 931$ ce qui fait que :

$C_0 = 30\ 000 \times 0{,}649\ 931 = 19\ 497{,}93$ DH.

Exemple 8 : Quelle est la valeur acquise par un capital, après 3 années de placement, au taux d'intérêts de 7%, si sa valeur actuelle est de 500,00 DH ?

0n a, avec les données : $500{,}00 = C\ (1 + 0{,}07)^{-3}$

Les tables financières T.2 donnent pour $(1 + 0{,}07)^{-3} = 0{,}816\ 298$ ce qui fait que :

$C_0 = 500{,}00 / 0{,}816\ 298 = 612{,}52$ DH.

Exemple 9 : Au bout de combien de temps un capital de valeur actuelle d'un montant de 12 500,00 DH acquiert-il une valeur de 18 795,38 DH s'il est placé à un taux d'intérêt de 6%, l'an ?

0n a, avec les données : $12\ 500{,}00 = 18\ 795{,}38\ (1 + 0{,}06)^{-n}$

$(1 + 0{,}06)^{-n} = 12\ 500{,}00 / 18\ 795{,}38 = 0{,}665\ 057$

La lecture des tables financières T.2 donne pour :

$(1 + 0{,}06)^{-7} = 0{,}665\ 057$ ce qui donne pour n = 7 ans.

La résolution de cette équation peut être aussi faite grâce aux logarithmes :

$- n \log 1{,}06 = \log 6{,}665\ 057 \Rightarrow n = - (\log 0{,}665\ 057) / (\log 1{,}06) = 7$ ans.

Exemple 10 : A quel taux d'intérêt composé a été placé un capital qui a atteint un montant de 25 000,00 DH, au bout de 3 années alors que sa valeur actuelle n'est que de 20 000,00 DH ?

0n a, avec les données : $20\ 000 = 25\ 000\ (1 + t)^{-3}$

$(1 + t)^{-3} = 20\ 000 / 25\ 000 = 0{,}8$

Les tables financières T.2 donnent pour :

$(1 + 0{,}0750)^{-3} = 0{,}804961$ et $(1 + 0{,}0775)^{-3} = 0{,}799\ 371$

Ce qui fait que t est compris entre 7,50% et 7,75%.

Que faire pour résoudre ce problème du moment qu'on ne trouve pas de valeurs exactes dans les tables financières T.2 ?

On peut utiliser les racines :

$$(1+t)^3 = \frac{1}{0{,}8} \qquad => \qquad t = \sqrt[3]{\frac{1}{0{,}8}} - 1 = 7{,}72\%$$

La question qu'on peut se poser, à ce stade, est que si comme on vient de le voir, on trouve dans certains cas des valeurs qui n'existent pas dans les tables financières, celles-ci risquent-elle de n'être d'aucune utilité ?

En fait non, puisqu'on pourra faire des calculs approchés par la méthode d'interpolation que nous allons, immédiatement, exposer.

3.4. UTILISATION DES TABLES FINANCIERES PAR INTERPOLATION.

Dans cette parie du chapitre, nous allons montrer comment on peut utiliser, dans tous les cas, les tables financières qui sont données, en annexes du présent livre ; en effet, jusqu'à présent, nous nous sommes arrangés, dans tous les exemples que nous avons étudiés, d'avoir des résultats directement lisibles dans les tables financières, sans avoir recours aux logarithmes ou à faire quelques approximations que se soient ; mais la réalité n'est pas toujours aussi « sympathique ». Les résultats sont la plupart du temps quelconques et des approximations sont nécessaires à faire.

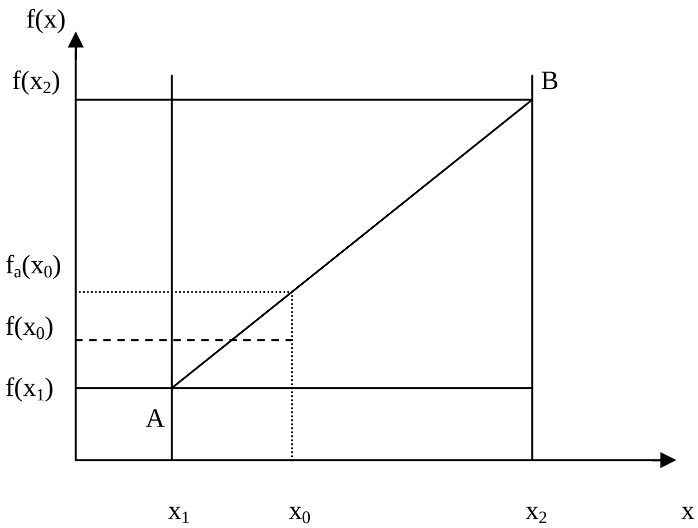
Nous allons exposer la méthode pour faire ces calculs approchés, méthode basée essentiellement sur l'interpolation.

3.4.1. Méthode de calculs par simple interpolation.

On considère la fonction $y = f(x)$ pour laquelle on connaît, d'après les tables financières, les valeurs $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$ fonctions de deux valeurs successives de x, x_1 et x_2 ; le problème que l'on se pose est : comment peut-on connaître une valeur approchée de $f(x_0)$ avec x_0, une valeur de x comprise entre x_1 et x_2 ?

En consultant la figure ci-dessous on voit que l'on peut approcher la valeur réelle de $f(x_0)$ située sur la courbe représentative de la fonction $y = f(x)$ par la valeur $f_a(x_0)$ située sur la corde qui sous tend l'arc de la courbe compris entre x_1 et x_2.

On approche ainsi l'arc $\overset{\wedge}{AB}$ par sa corde $\overline{AB}$ car on sait calculer facilement un point appartenant à un segment de droite dont on connaît les coordonnées des deux extrémités.



La proportionnalité entre les différentes parties du segment de droite AB donne les égalités évidentes suivantes :

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{f_a(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1} \qquad (4)$$

Ce qui donne

$$f_a(x_0)=f(x_1)+\frac{x_0-x_1}{x_2-x_1}[f(x_2)-f(x_1)] \qquad (5)$$

L'interpolation des calculs peut aussi servir à déterminer x_0 connaissant $f(x_0)$, en effet, de l'expression (4), on peut aussi déduire la valeur de x_0 :

$$x_0=x_1+\frac{f(x_0)-f(x_1)}{f(x_2)-f(x_1)}(x_2-x_1) \qquad (6)$$

C'est la formule générale d'interpolation des calculs que nous allons appliquer, dans un certain nombre de cas particuliers pour utiliser amplement les tables financières données en annexe de ce livre.

3.4.2. Méthode de calculs par double interpolation.

On considère maintenant la fonction z = f(x,y) pour laquelle on connaît, d'après les tables financières, les valeurs z pour des valeurs successives de x et de y, comme résumé, dans le tableau suivant :

$z = f(x,y)$	y_1	y_2
x_1	$f(x_1,y_1)$	$f(x_1,y_2)$
x_2	$f(x_2,y_1)$	$f(x_2,y_2)$

Le problème que l'on se pose est : comment peut-on connaître une valeur approchée de $f(x_0,y_0)$ avec :

$$x_1 < x_0 < x_2 \quad \text{et} \quad y_1 < y_0 < y_2$$

Pour ce faire, nous devons faire une double interpolation :
- une 1è interpolation sur x pour déterminer $f_a(x_0,y_1)$ et $f_a(x_0,y_2)$;
- une 2è interpolation sur y pour déterminer $f_a(x_0,y_0)$.

Remarquons qu'on peut commencer indifféremment par une interpolation sur x suivie d'une interpolation sur y ou commencer par une interpolation sur y suivie d'une interpolation sur x.

La 1è interpolation sur x donne :

$$f_a(x_0,y_1) = f(x_1,y_1) + \frac{x_0 - x_1}{x_2 - x_1}[f(x_2,y_1) - f(x_1,y_1)]$$

et

$$f_a(x_0,y_2) = f(x_1,y_2) + \frac{x_0 - x_1}{x_2 - x_1}[f(x_2,y_2) - f(x_1,y_2)]$$

$f_a(x_0,y_1)$ et $f_a(x_0,y_2)$ sont les valeurs approchées, par simple interpolation sur x des valeurs de $f(x_0,y_1)$ et $f(x_0,y_2)$.

Le tableau précédent devient alors :

$z = f_a(x_0,y)$	y_1	y_2
x_0	$f_a(x_0,y_1)$	$f_a(x_0,y_2)$

La 2è interpolation sur y donne :

$$f_a(x_0,y_0) = f(x_0,y_1) + \frac{y_0 - y_1}{y_2 - y_1}[f(x_0,y_2) - f(x_0,y_1)]$$

$f_a(x_0,y_0)$ est la valeur approchée, par double interpolation sur x et sur y de la valeur de $f(x_0,y_0)$.

Nous allons, dans ce qui suit, voir comment la méthode de calculs approchés, par interpolation permet de faire les calculs des intérêts composés.

3.4.3. Utilisation des tables financières par interpolation.

Les tables financières donnent les valeurs d’une fonction de 2 variables t et n, soit f(t,n). C’est là une relation entre 3 variables f, t et n et il suffit de connaître 2 variables pour en déduire, d’après les tables financières, la 3è variable.

C’est ainsi que les 6 séries de tables financières classiques qu’on rencontre habituellement, en mathématiques financières, sont relatives aux 6 fonctions suivantes :

1è table :	$f(t,n) = (1 + t)^{n}$:	Valeur acquise par un DH, après n périodes ;
2è table :	$f(t,n) = (1 + t)^{-n}$:	Valeur actuelle d’un DH, payable dans n périodes ;
3è table :	$f(t,n) = \frac{(1+t)^{n} - 1}{t}$:	Valeur acquise, après n périodes, par une suite d’annuités d’un DH placées à la fin de chaque période, pendant n périodes ;
4è table :	$f(t,n) = \frac{1 - (1+t)^{-n}}{t}$:	Valeur actuelle d’une suite d’annuités d’un DH versées à la fin de chaque période, pendant n périodes ;
5è table :	$f(t,n) = \frac{t}{1 - (1+t)^{-n}}$:	Valeur des annuités constantes qui amortissent, en n périodes, un capital d’un DH ;
6è table :	$t_k = (1 + t_a)^{\frac{k}{12}} - 1$:	Valeur acquise par un DH placé pendant un certain nombre de mois

Ces tables sont données avec un pas de t = 0,25% parce que, habituellement, les banques centrales des Etats donnent les taux d’intérêts qui varient avec un tel pas.

Lors de la lecture d’une table financière, on peut se trouver, dans plusieurs cas possibles :

1è cas : On trouve les valeurs de 2 variables, on lit alors directement, sur la table, la valeur de la 3è variable que l’on cherche ;

2è cas : On ne trouve pas exactement la valeur d’une des deux variables connues, on fait alors une simple interpolation sur la variable dont on ne trouve pas exactement la valeur pour déterminer la valeur approchée de la 3è variable que l’on cherche ;

3è cas : On ne trouve pas exactement les valeurs des 2 variables connues, on fait alors une double interpolation sur les 2 variables pour déterminer la 3è variable que l’on cherche.

Nous allons montrer comment utiliser les tables financières, par la méthode d'interpolation, en procédant essentiellement par des exemples et en étudiant tous les cas.

Exemple 11 : Reprenons l'exemple 10 pour lequel nous avions trouvé : $(1 + t)^{-3} = 0{,}8$ et essayons de déterminer t par interpolation en utilisant les tables financières T.2.

Nous avons déjà constaté qu'on ne trouve pas exactement, dans les tables financières T.2, la valeur de 0,8.

La lecture de ces tables financières donne : Pour t = 7,50% : $(1 + 0{,}0750)^{-3} = 0{,}804\,961$ et pour t = 7,75% : $(1 + 0{,}0775)^{-3} = 0{,}799\,371$

Comme 0,8 se trouve entre 0,799371 et 0,804 961 on en déduit que la valeur de t recherchée se trouve entre 7,50% et 7,75%. Nous pouvons donc appliquer un calcul par simple interpolation et écrire d'après la formule (4) :

$$\frac{0{,}804961 - 0{,}799371}{7{,}5\% - 7{,}750\%} = \frac{0{,}8 - 0{,}799371}{t - 7{,}5\%}$$

$$t = 7{,}75\% + \frac{0{,}8 - 0{,}799371}{0{,}804961 - 0{,}799371}(7{,}50\% - 7{,}75\%) = 7{,}72\%$$

Rappelons que le calcul, par calculatrice, sensé aboutir à un résultat très précis avait donné pour t = 7,72%. Notre calcul approché par interpolation est ainsi très performant.

Exemple 12 : Quelle est la valeur acquise par un capital de 12 250,00 DH placé à un taux d'intérêts de 6,40% pendant 5 ans ?

On a, d'après la formule fondamentale des intérêts composés et des données :

$C_n = C_0\,(1 + t)^n$ => $C_n = 12\,250{,}00\,(1 + 0{,}0640)^5$

Puisque le taux de 6,40% n'existe pas dans les tables financières T.1, nous devons faire une simple interpolation sur t. Nous avons :

Pour t = 6,25% : $(1 + 0{,}0625)^5 = 1{,}354\,081$

Et pour t = 6,50% : $(1 + 0{,}0650)^5 = 1{,}370\,087$

Comme 0,0640 se trouve entre 0,0625 et 0,0650 on en déduit que $(1 + 0{,}0640)^5$ recherchée se trouve entre 1,354 081 et 1,370 087. Nous pouvons donc appliquer un calcul par interpolation et écrire conformément à la formule (4) que :

$$\frac{1{,}370087 - 1{,}354081}{6{,}50\% - 6{,}25\%} = \frac{f - 1{,}354081}{6{,}40\% - 6{,}25\%}$$

$$f = 1{,}354081 + \frac{0{,}0640 - 0{,}0625}{0{,}0650 - 0{,}0625}(1{,}370087 - 1{,}354081) = 1{,}363\,685$$

Cn = 12 250,00 x 1,363 685 = 16 705,14 DH

En faisant les calculs directement, on aurait alors trouvé :

C_n = 12 250,00 (1 + 0,064)^5 = 16 704,91 DH

On voit que le résultat trouvé, par interpolation, à savoir 16 705,14 DH n'est qu'à + 0,001% de la valeur sensée être plus précise et qui est 16 704,91 DH.

Exemple 13 : Au bout de combien de temps un capital de 25 400,00 DH acquiert-il une valeur de 30 000,00 DH s'il est placé à un taux d'intérêt composé de 7,35% l'an ?

On a, d'après la formule fondamentale des intérêt composé et des données :

$C_n = C_0\,(1 + t)^n$ => 30 000,00 = 25 400,00 (1 + 0,0735)^n

(1 + 0,0735)^n = 30 000,00 / 25 400,00 = 1,181 102

Dans les tables financières T.1, nous ne trouvons ni le taux 7,35% ni la valeur de 1,181 102. Nous devons donc faire 2 interpolations :

La lecture des tables financières T.1 donne :

	t = 7,25%	**t = 7,50%**
n = 2	1,150 256	1,155 625
n = 3	1,233 650	1,242 297

1è interpolation sut t : elle doit nous permettre de trouver des valeurs approchées de 1,00735^n pour n = 2 et pour n = 3.

Pour n = 2 : Comme 7,35% se trouve compris entre 7,25% et 7,50% la valeur de 1,0735^2 est comprise entre 1,150 256 et 1,155 625. On a :

$$\frac{1{,}155625 - 1{,}150256}{7{,}50\% - 7{,}25\%} = \frac{f - 1{,}150256}{7{,}35\% - 7{,}25\%}$$

$$f = 1{,}150256 + \frac{0{,}0735 - 0{,}0725}{0{,}0750 - 0{,}0725}(1{,}155625 - 1{,}150256) = 1{,}152\ 404$$

Pour n = 3 : Comme 7,35% se trouve compris entre 7,25% et 7,50% la valeur de $1{,}0735^3$ est comprise entre 1,233 650 et 1,242 297. On a :

$$\frac{1{,}242297 - 1{,}233650}{7{,}50\% - 7{,}25\%} = \frac{f - 1{,}233650}{7{,}35\% - 7{,}25\%}$$

$$f = 1{,}233650 + \frac{0{,}0735 - 0{,}0725}{0{,}0750 - 0{,}0725}(1{,}242297 - 1{,}233650) = 1{,}237109$$

Le précédent tableau devient :

n	**t = 7,35%**
n = 2	1,152 404
n = 3	1,237 109

2è interpolation sur $(1 + 0{,}0735)^n$: elle doit nous permettre trouver n tel que :

$(1 + 0{,}0735)^n = 1{,}181\,102$

Comme 1,181 102 se trouve compris entre 1,152 404 et 1,237 109, la valeur de n tel que $(1 + 0{,}0735)^n = 1{,}181\,102$ est comprise entre 2 et 3. On a :

$$\frac{1{,}237109 - 1{,}152404}{3 - 2} = \frac{1{,}181102 - 1{,}152404}{n - 2}$$

$$n = 2 + \frac{1{,}181102 - 1{,}152404}{1{,}237109 - 1{,}152404}(3 - 2) = 2{,}338799$$ => Soit 2 ans et 122 jours.

En faisant appel aux logarithmiques, on aurait alors trouvé :

$(1 + 0{,}0735)^n = 1{,}181\,102$ => $n \,\mathrm{Log}1{,}0735 = \mathrm{Log}1{,}181102$

$n = (\mathrm{Log}1{,}181102) / (\mathrm{Log}1{,}0735) = 2{,}346\,837$

On voit que le résultat trouvé, par interpolation, à savoir 2,338 799 n'est qu'à 0,34% de la valeur sensée être plus précise et qui est 2,346 837.

3.5. TAUX EQUIVALENTS ET TAUX PROPORTIONNELS.

3.5.1. Taux équivalents.

On considère les deux situations suivantes :

Situation 1 : C : un capital placé à intérêt composé ;
t : taux d'intérêt annuel ;
n : nombre de périodes exprimées en années.

Situation 2 : C : le même capital placé à intérêt composé ;
t_k : taux d'intérêt correspondant à une période k fois plus petite que l'année ;
k x n : nombre de périodes correspondant à la même durée.
* si k = 2 : t_2 soit t_s est un taux semestriel ;
* si k = 3 : t_3 soit t_q est un taux quadrimestriel ;
* si k = 4 : t_4 soit t_t est un taux trimestriel ;
* si k = 12 : t_{12} soit t_m est un taux mensuel.

Dans les deux situations, un même capital a été placé pendant la même durée.

Si les valeurs acquises, dans les deux situations, sont égales, on dira que les deux taux d'intérêts sont équivalents.

Deux taux d'intérêts correspondant à des périodes de capitalisation différentes sont dits équivalents lorsque, pour une même durée de placement, ils conduisent à une même valeur acquise à intérêt composé.

Valeur acquise au bout de n années, dans le cas de la 1è situation, est égale à :

$$C_n = C\,(1+t)^n$$

Valeur acquise au bout de k x n périodes, dans le cas de la 2è situation, est égale à :

$$C_{kn} = C\,(1+t_k)^{kn}$$

t et t_k sont équivalents si $C_n = C_{kn}$, ce qui donne : $C(1+t)^n = C(1+t_k)^{kn}$

$$(1+t) = (1+t_k)^k \qquad \Rightarrow \qquad (1+t)^{1/k} = 1+t_k$$

$$\mathbf{t_k = (1+t)^{1/k} - 1}$$

t_k est le taux équivalent au taux annuel t, correspondant à une période k fois plus petite que l'année.

***Remarque 1** : Il doit y avoir toujours, dans l'utilisation de la formule fondamentale des intérêts composés, concordance entre les taux d'intérêt et les périodes considérées. Si la capitalisation est respectivement mensuelle, trimestrielle, semestrielle, annuelle, etc., le taux d'intérêt doit être respectivement mensuel, trimestriel, semestriel, annuel, etc., et la durée doit être exprimée en mois, en trimestres, en semestres, en années, etc.*

Cette remarque toute évidente qu'elle soit, doit être explicitée et largement commentée. Elle signifie que :

- lorsque la capitalisation est mensuelle, on doit utiliser le taux équivalent mensuel t_m et compter la durée en mois ;

- lorsque la capitalisation est trimestrielle, on doit utiliser le taux équivalent trimestriel t_t et compter la durée en trimestres ;

- lorsque la capitalisation est annuelle, on doit utiliser le taux équivalent annuel t_a et compter la durée en années ;

Considérons, pour mieux étayer cette remarque, un capital C placé à un taux d'intérêt composé annuel t_a et calculons la valeur acquise C_n par ce capital, au bout de n mois.

1è cas : Supposons que la capitalisation des intérêts se fasse tous les mois.

On doit utiliser le taux mensuel t_m équivalent au taux annuel t_a et C_n

$C_n = C\,(1 + t_m)^n$

Or nous avons d'après la définition du taux équivalent $1 + t_m = (1 + t_a)^{1/12}$

Donc $C_n = C\,(1 + t_m)^n = C\,(1 + t_a)^{n/12}$

On voit bien qu'on obtient le même résultat qu'on utilise un taux d'intérêt mensuel et une durée comptée en mois ou qu'on utilise un taux d'intérêt annuel et une durée comptée en années.

2è cas : Supposons que la capitalisation des intérêts se fasse tous les trimestres.

On doit utiliser le taux trimestriel t_t équivalent au taux annuel t_a et avant de donner l'expression de C_n nous devons convertir le nombre n de mois en trimestres.

On a évidemment n en mois = n/3 en trimestres

Ce qui donne pour C_n : $C_n = C\,(1 + t_t)^{n/3}$

Or nous avons d'après la définition du taux équivalent $1 + t_t = (1 + t_a)^{1/4}$

Donc $C_n = C (1 + t_t)^{n/3} = C (1 + ta)^{n/12}$

On voit bien qu'on obtient le même résultat qu'on utilise un taux d'intérêt mensuel et une durée comptée en mois ou qu'on utilise un taux d'intérêt trimestriel et une durée comptée en trimestre.

Conclusion : La conclusion à laquelle on arrive est d'une grande importance. Elle montre que lorsqu'on parle d'intérêt composé, il est inutile de préciser s'il s'agit de capitalisation mensuelle, ou trimestrielle, ou annuelle, etc., du moment qu'on utilise des durées et des taux d'intérêts équivalents correspondants.

Nous aurons l'occasion de revenir sur cette remarque importante et sur les conséquences qu'elle entraîne dans les calculs des intérêts composés pour les rendre plus simples et donc immédiats.

Remarque 7 : La formule des taux équivalents est une relation entre les trois variables t, k et t_k, elle permet de calculer un taux d'intérêt équivalent à un autre taux d'intérêt.

Pour ce faire, des tables financières (Tables T.6) existent et donnent les calculs pour un nombre très important de couples de valeurs de taux équivalents. Nous profiterons des exemples que nous étudierons pour montrer comment se servir de ces tables financières.

Exemples 14 : Le taux semestriel t_s équivalent au taux annuel de 9% est tel que :

t_s = taux semestriel équivalent = $(1+0,09)^{1/2} – 1 = 0,0440 = 4,40$ %

Ce résultat se lit directement sur la table financière T.6 de la page

Exemples 15 : Le taux mensuel équivalent au taux annuel de 7,8 % est tel que :

t_m = taux mensuel équivalent = $(1+0,078)^{1/12} – 1 = 0,0063 = 0,63$ %

Exemples 16 : Le taux trimestriel équivalent au taux annuel de 8 % est tel que :

t_t = taux trimestriel équivalent = $(1+ 0,08)^{1/4} -1= 1,9427$ %

Ce résultat se lit directement sur la table financièreT.6.

3.5.1. Taux proportionnel.

0n appelle taux proportionnel au taux annuel t relatif à une durée p fois plus petite que l'année, le taux :

$$\mathbf{t_p = \frac{t}{p}}$$

Exemple 17 : Le taux trimestriel proportionnel au taux annuel de 8% est :

$$t_4 = \frac{0{,}08}{4} = 0{,}02 = 2\%$$

Le taux proportionnel est supérieur au taux équivalent. Pour un taux annuel de 8%, le taux trimestriel équivalent est d'environ 1,9 %.

Exemple 18 : Soit un capital de 25 000,00 DH placé au taux annuel d'intérêt composé de 12 % pendant une année. On se propose de calculer la valeur acquise par ce capital, au bout d'une année, en considérant les intérêts produits, par an, par semestre, par trimestre et par mois avec des taux équivalents et des taux proportionnels semestriels, trimestriels et mensuels.

Comparer et discuter les résultats obtenus.

- Taux équivalents :

Durées des capitalisations	Nombre de périodes par année	Taux équivalents	Valeurs acquises au bout d'une année	
Annuelle	1	12 %	$25\,000(1+0{,}12)^1$	= 28 000 DH
Semestrielle	2	5,8 %	$25\,000(1+0{,}058)^2$	= 28 000 DH
Trimestrielle	4	2,87 %	$25\,000(1+0{,}0287)^4$	= 28 000 DH
Mensuelle	12	0,95 %	$25\,000(1+0{,}0095)^{12}$	= 28 000 DH

Les valeurs acquises par un même capital pendant une même période à taux équivalents sont égales quelle que soit la durée de capitalisation. C'est la conclusion à laquelle nous sommes déjà arrivés.

- Taux proportionnels :

Durées des capitalisations	Nombre de périodes par année	Taux équivalents	Valeurs acquises au bout d'une année	
Annuelle	1	12 %	$25\,000(1+0{,}12)^1$	= 28 000,00 DH
Semestrielle	2	6 %	$25\,000(1+0{,}06)^2$	= 28 090,00 DH
Trimestrielle	4	3 %	$25\,000(1+0{,}03)^4$	= 28 137,72 DH
Mensuelle	12	1 %	$25\,000(1+0{,}01)^{12}$	= 28 170,62 DH

Les valeurs acquises par un même capital placé pendant une même période à taux proportionnels dépendent de la durée de capitalisation, elles augmentent quand celle ci est plus petite du fait que la capitalisation des intérêts est d'autant plus importante que la période est petite.

3.6. EQUIVALENCE DE CAPITAUX.

3.6.1. Equivalence de deux capitaux.

Deux capitaux placés, à des taux d'intérêt composé t_1 et t_2, à une date donnée, sont équivalents, s'il existe une date à la quelle ils ont la même valeur actuelle.

Si C_1 et C_2 sont deux effets payables dans n_1 et n_2 périodes et escomptés aux taux respectifs t_1 et t_2, on dit que les capitaux C_1 et C_2 sont équivalents si :

$$\mathbf{C_1\,(1+t_1)^{-n_1} = C_2\,(1+t_2)^{-n_2}} \qquad \textbf{(7)}$$

Dans le cas où les deux taux d'intérêt sont égaux, la formule devient :

$$\mathbf{C_1\,(1+t)^{-n_1} = C_2\,(1+t)^{-n_2}} \qquad \textbf{(8)}$$

Remarque 2 *: Si les taux d'intérêts sont égaux et si deux capitaux sont équivalents à une date, ils sont équivalents à n'importe quelle autre date ; en effet : si C_1 et C_2 sont équivalents à la date 0, on peut donc écrire :*

$$C_1\,(1+t)^{-n_1} = C_2\,(1+t)^{-n_2}$$

Cette égalité reste valable si on multiplie ses deux membres par la même expression $(1+t)^d$, ce qui donne :

$$C_1\,(1+t)^{-n_1} \times (1+t)^d = C_2\,(1+t)^{-n_2} \times (1+t)^d$$

$$C_1\,(1+t)^{-(n_1-d)} = C_2\,(1+t)^{-(n_2-d)}$$

A la date d (postérieure à la date 0, soit d > 0 ou antérieur à la date 0, soit d < 0), les valeurs actuelles de C_1 et C_2 sont encore égales, donc C_1 et C_2 sont encore équivalents à la date d.

L'équivalence de capitaux à intérêt composé est indépendante de la date d'équivalence.

Exemple 19 : Soient deux effets E_1 et E_2 tel que :

$$E_1 \begin{cases} V_1 = 68024{,}24 \text{ DH} \\ n_1 = 4 \text{ ans} \\ t = 8\,\% \end{cases} \qquad E_2 \begin{cases} V_2 = 85\,690{,}95 \text{ DH} \\ n_2 = 7 \text{ ans} \\ t = 8\,\% \end{cases}$$

Les valeurs actuelles de ces effets sont :

$$VA_1 = 68\,024{,}24\,(1 + 0{,}08)^{-4} = 49\,999{,}85 \text{ DH}$$

$$VA_2 = 85\,690{,}95\,(1 + 0{,}08)^{-7} = 49\,999{,}85 \text{ DH}$$

On constate que ces 2 effets, de valeurs nominales différentes et d'échéances différentes, escomptés au même taux d'intérêt t, ont, à la date d'escompte, des valeurs actuelles égales. Ces effets sont dits effets équivalents.

Du fait que ces deux effets sont escomptés au même taux t = 5 % et qu'ils sont équivalents à la date de négociation, ils sont équivalents à n'importe quelle autre date.

Plus particulièrement :

- La valeur acquise de l'effet dans 3 ans est égale à 85 690,85 DH
- La valeur actuelle de l'effet dans 3 ans est égale à 68 024,24 DH

Exemple 20 : Soient encore deux autres effets E_1 et E_2 tel que :

$$E_1 \begin{cases} V1 = 52\,350{,}00 \text{ DH} \\ n1 = 4 \text{ ans} \\ t = 8\,\% \end{cases} \qquad E_2 \begin{cases} V2 = 57\,857{,}93 \text{ DH} \\ n2 = 7 \text{ ans} \\ t = 6\,\% \end{cases}$$

Les valeurs actuelles de ces effets sont, après avoir lu, sur la tables financière T.2 que :

$(1 + 0{,}08)^{-4} = 0{,}735\,030$ et $(1 + 0{,}06)^{-7} = 0{,}665\,057$

$VA_1 = 52\,350{,}00\,(1 + 0{,}08)^{-4} = 52\,350{,}00 \times 0{,}735\,030 = 38\,478{,}82$ DH

$VA_2 = 57\,857{,}93\,(1 + 0{,}06)^{-7} = 57\,857{,}91 \times 0{,}665\,057 = 38\,478{,}82$ DH

On constate que ces 2 effets de valeurs nominales et d'échéances différentes et escomptés à des taux d'intérêt différents, ont, à la date d'escompte, des valeurs actuelles égales. Ces effets sont dits effets équivalents.

Mais du fait que les taux d'intérêts des 2 effets sont différents, ces deux effets ne sont équivalents qu'à la date 0. Leur valeur acquise à une date différente de la date 0, ne sont pas égales.

3.6.2. Equivalence de deux groupes de capitaux.

Deux groupes de capitaux, placés à intérêt composé, sont équivalents, un jour donné, si la somme des valeurs actuelles du premier groupe de capitaux est égale à la somme des valeurs actuelles du deuxième groupe.

On considère deux groupes de capitaux :

- **1è groupe**
  Valeurs : $V_1, V_2, \ldots V_h$;
  Echéances : $n_1, n_2, \ldots n_h$;
  Taux : $t_1, t_2, \ldots t_h$

- **2è groupe**
  Valeurs : $V'_1, V'_2, \ldots V'_k$;
  Echéances : $n'_k, n'_k, \ldots n'_k$;
  Taux : $t'_k, t'_k, \ldots t'_k$

L'équivalence, à l'époque zéro, des deux groupes de capitaux se traduit par la relation générale :

$$V_1(1+t_1)^{-n_1} + V_2(1+t_2)^{-n_2} + \cdots + V_h(1+t_h)^{-n_h} = V'_1(1+t'_1)^{-n'_1} + V'_2(1+t'_2)^{-n'_2} + \cdots + V_k(1+t'_k)^{-n'_k}$$

Si tous les capitaux sont placés au même taux d'intérêt t, cette relation générale devient :

$$\mathbf{V_1(1+t)^{-n_1} + V_2(1+t)^{-n_2} + \cdots + V_h(1+t)^{-n_h} = V'_1(1+t)^{-n'_1} + V'_2(1+t)^{-n'_2} + \cdots + V_k(1+t)^{-n'_k}}$$

Dans ce cas, si l'équivalence, à ce taux, a lieu un jour donné, elle a lieu à n'importe quelle autre date. On peut établir facilement cette assertion exactement comme nous l'avons fait pour deux capitaux.

3.6.3. Application de l'équivalence à intérêts composés.

La théorie d'équivalence des capitaux est appliquée pour remplacer un groupe de capitaux par un autre groupe. Elle est principalement utilisée pour remplacer plusieurs capitaux par un capital unique ou remplacer un capital par plusieurs capitaux.

3.6.3.1. Remplacement de plusieurs capitaux par un capital unique.

Soient :

¤ 1 - plusieurs capitaux de valeurs nominales V_1, V_2,…….,V_k d'échéances respectives dans n_1, n_2 ,……., n_k périodes et placés respectivements aux taux d'intérêt composé t_1, t_2, . . . et t_k ;

¤ 2 - un capital unique de valeur nominale V, d'échéance dans n périodes et placé aux taux d'intérêt composé t.

Le capital V peut remplacer les k capitaux V_i, si la valeur actuelle du capital V est égale à la somme des valeurs actuelles des autres capitaux. Cette condition est vérifiée lorsque la relation suivante est vérifiée :

$$V\,(1+t)^{-n} = V_1\,(1+t_1)^{-n_1} + V_2\,(1+t_2)^{-n_2} + \cdots + V_k\,(1+t_k)^{-n_k}$$

Dans le cas où tous les capitaux V_i et le capital V sont placés au même taux d'intérêt composé t, la relation précédente devient :

$$V\,(1+t)^{-n} = V_1\,(1+t)^{-n_1} + V_2\,(1+t)^{-n_2} + \cdots + V_k\,(1+t)^{-n_k}$$

ou encore :

$$\mathbf{V = V_1\,(1+t)^{n-n_1} + V_2\,(1+t)^{n-n_2} + \cdots + V_k\,(1+t)^{n-n_k}}$$

Ces deux dernières relations lient plusieurs variables entre elles, soient 3(k+1) variables qui sont les 3k variables relatives aux capitaux V_i et qui sont les k V_i, les k n_i et les k t_i ainsi que les 3 variables relatives au capital équivalent V et qui sont V, n et t.

Ces relations peuvent donc, théoriquement servir à déterminer une des variables lorsque toutes les autres sont connues ; nous limiterons notre étude aux quatre cas suivants :

- ¤ Chercher la valeur du capital équivalent V ;
- ¤ Chercher l'échéance n du capital équivalent V ;
- ¤ Chercher le taux d'intérêts du capital équivalent V ;
- ¤ Chercher une des caractéristiques d'un des capitaux V_i.

On distinguera, pour chaque problème, les deux cas possibles :

- ¤ Cas où tous les t_i sont différents entre eux et différents de t ;
- ¤ Cas où tous les t_i sont égaux à t.

3.6.3.2. 1è problème : On cherche à déterminer la valeur nominale V du capital équivalent sachant que l'on connaît son échéance et son taux d'intérêt de placement ainsi que toutes les 3k variables relatives aux capitaux V_i et qui sont les k V_i, les k n_i et les k t_i

1è Cas : Les capitaux V_i sont placés aux taux d'intérêt composé t_i et le capital V est placé au taux d'intérêt composé t différents des t_i :

On a : $$V\,(1+t)^{-n} = V_1\,(1+t_1)^{-n_1} + V_2\,(1+t_2)^{-n_2} + \cdots + V_k\,(1+t_k)^{-n_k}$$

Ce qui donne pour V l'expression suivante :

$$V = (1+t)^n \times [V_1\,(1+t_1)^{-n_1} + V_2\,(1+t_2)^{-n_2} + \cdots + V_k\,(1+t_k)^{-n_k}]$$

$$V = (1+t)^n \sum_{i=1}^{k} V_i\,(1+t_i)^{-n_i}$$

2è cas : Les capitaux V_i et le capital V sont tous placés au même taux d'intérêt composé t :

On a : $$V\,(1+t)^{-n} = V_1\,(1+t)^{-n_1} + V_2\,(1+t)^{-n_2} + \cdots + V_k\,(1+t)^{-n_k}$$

Ce qui donne pour V l'expression suivante :

$$V = V_1\,(1+t)^{n-n_1} + V_2\,(1+t)^{n-n_2} + \cdots + V_k\,(1+t)^{n-n_k}]$$

$$V = \sum_{i=1}^{k} V_i\,(1+t)^{n-ni}$$

Exemple 21 : Quel est le capital qui placé au taux de 6%, l'an et payable dans 4 ans, peut remplacer les 2 capitaux suivants :

¤ 25 000 DH placé à 5% et payable dans 3 ans ;
¤ 15 000 DH placé à 8% et payable dans 2 ans.

L'expression d'équivalence du capital V et des deux autres capitaux s'écrit :

$$V\,(1+t)^{-n} = V_1\,(1+t_1)^{-n_1} + V_2\,(1+t_2)^{-n_2}$$

Ce qui donne pour V : $V = (1+t)^n \times [V_1\,(1+t_1)^{-n_1} + V_2\,(1+t_2)^{-n_2}]$

Or d'après les tables financières T.1 et T.2, on a :

$(1+0,06)^4 = 1,262\ 477$ $(1+0,05)^{-3} = 0,863\ 838$ et $(1+0,08)^{-2} = 0,857\ 339$

V = 1,262 477 x (25 000 x 0,863 838 + 15 000 x 0,857 339) = 43 499,95 DH

Exemple 22 : Un débiteur doit s'acquitter des dettes suivantes :

¤ 30 000 DH placé à 6% l'an et payable dans 1 ans ;
¤ 45 000 DH placé à 6% l'an et payable dans 3 ans ;
¤ 50 000 DH placé à 6% l'an et payable dans 5 ans ;
¤ 60 000 DH placé à 6% l'an et payable dans 6 ans.

Quelle est la valeur du capital unique que devra payer le débiteur s'il souhaite se libérer par un paiement unique, dans 4 ans, au taux d'intérêt composé annuel de 6 % ?

La valeur nominale du capital unique vérifie la relation générale d'équivalence :

$$V \times 1{,}06^{-4} = 30000 \times 1{,}06^{-1} + 45000 \times 1{,}06^{-3} + 50000 \times 1{,}06^{-5} + 60000 \times 1{,}06^{-6}$$

On lit sur la table financière T.2 :

$1{,}06^{-1} = 0{,}943\ 396$ et $1{,}06^{-3} = 0{,}839\ 619$
$1{,}06^{-5} = 0{,}747\ 258$ et $1{,}06^{-6} = 0{,}704\ 961$

Ce qui donne $V \times 1{,}06^{-4} = 145\ 745{,}30$ DH => $V = 145\ 745{,}30 \times 1{,}06^{4}$

Or, d'après la table financière T.1, on a $1{,}06^{4} = 1{,}262\ 477$

$V = 145\ 745{,}30 \times 1{,}262\ 477 = 184\ 000{,}09$ DH

3.6.3.3. 2è problème : On cherche à déterminer l'échéance du capital équivalent sachant que l'on connaît sa valeur V et son taux d'intérêt de placement ainsi que toutes les 3k variables relatives aux capitaux V_i et qui sont les k V_i, les k n_i et les k t_i ; cette échéance est dite échéance commune.

1è Cas : Les capitaux V_i sont placés aux taux d'intérêt composé t_i et le capital V est placé au taux d'intérêt composé t différent des t_i :

On a : $$V\,(1+t)^{-n} = V_1\,(1+t_1)^{-n_1} + V_2\,(1+t_2)^{-n_2} + \cdots + V_k\,(1+t_k)^{-n_k}$$

Ce qui donne pour n l'expression suivante :

$$(1+t)^{-n} = \frac{V_1\,(1+t_1)^{-n_1} + V_2\,(1+t_2)^{-n_2} + \cdots + V_k\,(1+t_k)^{-n_k}}{V} = \frac{\sum_{i=1}^{k} V_i\,(1+t_i)^{-n_i}}{V}$$

Cette équation peut être directement résolue par la lecture de la table financière T.2, elle peut aussi être résolue par logarithmes :

$$n \text{ Log } (1+t) = \text{Log } \frac{V}{\sum_{i=1}^{k} V_i \ (1+t_i)^{-n_i}} \quad => \quad n = \frac{\text{Log } \dfrac{V}{\sum_{i=1}^{k} V_i \ (1+t_i)^{-n_i}}}{\text{Log}(1+t)}$$

2è cas : Les capitaux V_i et le capital V sont tous placés au même taux d'intérêt composé t :

L'équivalence à la période 0 se traduit par l'égalité suivante :

$$V \times (1+t)^{-n} = V_1 (1+t)^{-n1} + V_2 (1+t)^{-n2} + ... + V_k (1+t)^{-nk}$$

$$(1+t)^{-n} = \frac{\sum_{i=1}^{k} V_i (1+t)^{-n_i}}{V} \quad => \quad (1+t)^{n} = \frac{V}{\sum_{i=1}^{k} V_i (1+t)^{-n_i}}$$

Pour résoudre cette équation, on peut utiliser la table financière T.1, ou passer par le logarithme.

$$\text{Log } (1+i)^{\ n} = \log \frac{V}{\sum_{i=1}^{k} V_i (1+t)^{-n_i}} \quad => \quad n = \frac{\text{Log}\left(\dfrac{V}{\sum_{i=1}^{k} V_i (1+t)^{-n_i}}\right)}{\text{Log}(1+t)}$$

Dans le cas particulier où la valeur nominale du capital unique est égale à la somme des valeurs nominales des autres capitaux, l'échéance du capital unique est dite échéance moyenne.

$$\left(\sum_{i=1}^{k} V_i\right) \text{ x } (1+t)^{-n} = \sum_{i=1}^{k} V_i \ (1+t)^{-n_i}$$

Exemple 23 : Quelle est l'échéance d'une dette unique d'un montant de 76 680,37 DH destiné à remplacer les trois dettes suivantes :

¤ 20 000 DH à échéance dans 18 mois ;
¤ 28 000 DH à échéance dans 27 mois ;
¤ 30 000 DH à échéance dans 30 mois.

On donne taux trimestriel : t_t = 3 %

En désignant par n l'échéance exprimée en nombre de trimestres et en transformant les nombres de mois en nombre de trimestres, l'équivalence se traduit par l'égalité suivante :

$$76\,680{,}37 \times 1{,}03^{-n} = 20\,000 \times 1{,}03^{-6} + 28\,000 \times 1{,}03^{-9} + 30\,000 \times 1{,}03^{-10}$$

Or d'après la table financière T.2, on a :

$1{,}03^{-6} = 0{,}837\ 484$, $1{,}03^{-9} = 0{,}766\ 417$ et $1{,}03^{-10} = 0{,}744\ 094$

$$76\,680{,}37 \times 1{,}03^{-n} = 60532{,}18 \text{ DH}$$

$1{,}03^{n} = 76\ 680{,}37 / 60\ 532{,}17$ => $1{,}03^{n} = 1{,}266\ 770$

Ce qui donne d'après la table financière T.1, n = 8 trimestres = 24 mois.

Ce résultat peut être trouvé grâce aux logarithmes, en effet :

$$1{,}03^{n} = 1{,}266\,770 \quad \Rightarrow \quad n = \frac{\mathrm{Log}\,1{,}266\,770}{\mathrm{Log}\,1{,}03} = 8 \text{ trimestres}$$

L'échéance de la dette unique se situe donc dans 24 mois.

Exemple 24 : Reprenons les données de l'exemple 23 et déterminons l'échéance moyenne commune de la dette unique destinée à remplacer les trois dettes suivantes :

¤ 20 000 DH à échéance dans 18 mois ;
¤ 28 000 DH à échéance dans 27 mois ;
¤ 30 000 DH à échéance dans 30 mois.

On donne taux trimestriel : $t_t = 3$ %

Comme on cherche l'échéance moyenne commune aux 3 effets, la valeur nominale du capital unique est :

$$V = 20\ 000 + 28\ 000 + 30\ 000 = 78\ 000 \text{ DH}$$

L'échéance moyenne est tel que :

$$78000 \times 1{,}03^{-n} = 20000 \times 1{,}03^{-6} + 28000 \times 1{,}03^{-9} + 30000 \times 1{,}03^{-10}$$
$$78000 \times 1{,}03^{-n} = 60532{,}18$$

$$1{,}03^n = \frac{78\,000{,}00}{60\,532{,}18} = 1{,}288\ 571$$

Comme à la lecture des tables financières T.1, on ne trouve pas exactement la valeur 1,288571, nous pouvons résoudre cette équation de deux façons :

Par interpolation :

La lecture des tables financières donne :

Pour : n = 8 : $1{,}03^8 = 1{,}266\ 770$ et pour : n = 9 : $1{,}03^9 = 1{,}304\ 773$

Comme 1,288 571 se trouve entre 1,266 770 et 1,304 773 n se trouve entre 8 et 9, on peut donc écrire :

$$\frac{1{,}304773 - 1{,}266770}{9-8} = \frac{1{,}288571 - 1{,}266770}{n-8}$$

Ce qui donne pour n : $n = 8 + \frac{1{,}288571 - 1{,}266770}{1{,}304773 - 1{,}266770}(9-8) = 8{,}57$ trimestres

Par logarithmes :

On a d'après la relation : $n = \frac{\text{Log}\,1{,}288\,571}{\text{Log}\,1{,}03} = 8{,}58$ trimestres

Donc l'échéance moyenne commune est dans 25 mois et presque 22 jours.

On voit que la valeur approchée, par interpolation n est égale à la valeur plus précise donnée par les logarithmes. Ceci montre, si besoin est, la puissance de précision des calculs approchés par interpolation.

3.6.3.4. 3è problème : On cherche à déterminer le taux d'intérêt t du capital équivalent sachant que l'on connaît sa valeur V et son échéance de placement ainsi que toutes les 3k variables relatives aux capitaux V_i et qui sont les k V_i, les k n_i et les k t_i

1è cas : Les capitaux V_i sont placés aux taux d'intérêt composé t_i et le capital V est placé au taux d'intérêt t différent des t_i :

L'équivalence à la période 0 se traduit par l'égalité :

$$V \text{ x } (1+t)^{-n} = \sum_{i=1}^{k} V_i \ (1+t_i)^{-n_i} \quad => \qquad (1+t)^{-n} \ = \frac{\sum_{i=1}^{k} V_i \ (1+t_i)^{-n_i}}{V}$$

Cette dernière relation peut s'écrire aussi sous la forme :

$$(1+t)^{n} \ = \ \frac{V}{\sum_{i=1}^{k} V_i \ (1+t_i)^{-n_i}}$$

La résolution d'une telle équation ne diffère pas des équations que nous avons rencontrées jusque là, en effet on peut utiliser les tables financières T.1 ou les racines.

Ce qui donne pour t : $$t = \left(\frac{V}{\sum_{i=1}^{k} V_i \ (1+t_i)^{-n_i}}\right)^{\frac{1}{n}} - 1$$

2è cas : Les capitaux V_i et le capital V sont placés aux même taux d'intérêt composé t :

L'équivalence à la période 0 se traduit par l'égalité :

$$V \text{ x } (1+t)^{-n} = \sum_{i=1}^{k} V_i \ (1+t)^{-n_i}$$

Une telle équation est dite transcendant, sa résolution ne peut être faite que par approximations successives.

3.6.4.5. 4è problème : On cherche à déterminer la valeur d'un capital Vi sachant que l'on connaît la valeur V du capital équivalent, son taux d'intérêt t et son échéance de placement ainsi que toutes les (3k – 1) variables relatives aux capitaux V_i et qui sont les (k – 1)V_i, les k n_i et les k t_i

Supposons que l'on cherche la valeur du capital V_1 :

1è cas : Les capitaux V_i sont placés aux taux d'intérêt composé t_i et le capital V est placé au taux d'intérêt t différent des t_i :

L'équivalence à la période 0 se traduit par l'égalité :

$$V \text{ x } (1+t)^{-n} = \sum_{i=1}^{k} V_i \ (1+t_i)^{-n_i}$$

$$V \text{ x } (1+t)^{-n} = V_1 (1+t_1)^{-n_1} + \sum_{i=2}^{k} V_i \ (1+t_i)^{-n_i}$$

Ce qui donne pour V_1 l'expression suivante :

$$V_1 = \frac{V \times (1+t)^{-n} - \sum_{i=2}^{k} V_i \ (1+t_i)^{-n_i}}{(1+t_1)^{-n_1}}$$

2è cas : Les capitaux V_i et le capital V sont placés aux même taux d'intérêt composé t :

L'expression de V_1 devient :

$$V_1 = \frac{V \times (1+t)^{-n} - \sum_{i=2}^{k} V_i \ (1+t)^{-n_i}}{(1+t)^{-n_1}} = V(1+t)^{-n_1-n} - \sum_{i=2}^{k} V_i \ (1+t)^{-n_1-n_i}$$

3.7. EXERCICES D'APPLICATION.

3.7.1. Exercice.

a) A quel taux d'intérêt composé doit-on placer un capital de 15 000,00 DH pour qu'après 5 mois il atteigne la valeur de 15 950,00 DH ?

b) Quelle est la valeur acquise d'un capital de 12 750,00 DH placé, pendant 7 mois, à un taux annuel d'intérêt composé de 12,55% ?

c) Au bout de combien de temps un capital de 10 000,00 DH atteint une valeur de 10 900,00 DH s'il est placé à un taux d'intérêt composé de 8,5% l'an ?

Réponses :

Par lecture des tables financières (TF)	:	a) t = 16,28% b) 13 660,37 DH c) n = 1,054 soit 385 jours environ
Par calculs	:	a) t = 15,88% b) 13 660,35 DH c) n = 1,056 soit 385 jours environ

3.7.2. Exercice.

a) Quelle la valeur actuelle d'un capital de 25 400 DH placé au taux d'intérêt composés de 6,4% l'an et payable dans 6 mois ?

b) Quelle est l'échéance d'un capital dont la valeur acquise est 11 000,00 DH la valeur actuelle est 10 550,00 DH si son taux de placement est 6,26% l'an ?

c) Quel est le taux d'intérêts d'un capital dont la valeur actuelle est la valeur acquise, après 5 mois de placement, sont respectivement de 247 500,00 DH et 250 000,00 DH ?

Réponses :

a) 24 624,24 DH ; b) n = 8,25 mois ; c) t=2,44%

3.7.3. Exercice.

On place, à intérêt composé, un capital de 60 000,00 DH, avec une capitalisation mensuelle des intérêts, au taux d'intérêt composé de 5,4% l'an.

a) Calculer le taux mensuel équivalent ;
b) Calculer le taux trimestriel équivalent ;
c) Calculer les valeurs acquises de ce capital après 5 mois ;
d) Calculer les valeurs acquises de ce capital après 2 trimestres.

Réponses :

a) 0,44% ; b) 1,32% ; c) 61 329,32 DH ; d) 61 598,70 DH

3.7.4. Exercice.

Un capital de 1 000,00 DH est placé à intérêt composé, à un taux annuel de 3% pendant 2 ans, puis de 5 % pendant 3 ans puis de 6% pendant 4 ans.

a) Quelle est la valeur acquise par ce capital à la fin de la période de 9 ans ?
b) Quel est le taux d'intérêt annuel moyen sur la période des 9 années ?

Réponses :

a) 1 550,48 DH ; b) 4,99%

3.7.5. Exercice.

Pour disposer d'une somme de 150 000,00 DH le 30/03/2008 :

¤ On a déposé en banque, le 31/12/2003, la somme de 50 000,00 DH ;
¤ On a déposé en banque, le 30/06/2005, la somme de 35 000,00 DH ;
¤ On a retiré, le 30/03/2006, la somme de 10 000,00 DH :
¤ On a effectué un versement le 30/06/2007.

Tous les versements produisent des intérêts trimestriellement au taux annuel d'intérêt composé de 9%.

Calculer le montant du dernier versement.

Réponses : 42 563,06 DH

3.7.6. Exercice.

Un capital de valeur nominale 50 000,00 DH est négocié au taux d'escompte à intérêt composé de 8%, l’an. Sa valeur actuelle s'élève à 36 751,5 DH. Déterminer l'échéance de ce capital.

Réponses : n = 4 ans

3.7.7. Exercice.

La négociation, à la date du 01/01/2008, d'un capital d'échéance le 01/01/2010 et de valeur nominale 200 000,00 DH et d'un autre capital d'échéance le 01/01/2012 et de valeur nominale 300 000,00 DH a entraîné un escompte total de 168 482,41 DH.
Calculer le taux d'escompte retenu pour les deux capitaux.

Réponses : 14%

3.7.8. Exercice.

Une personne doit s'acquitter des 4 dettes suivantes :

¤ 15 000,00 DH dans 2 ans ;
¤ 20 000,00 DH dans 3 ans ;
¤ 25 000,00 DH dans 4 ans ;
¤ 30 000,00 DH dans 5 ans.

Quelle est l’échéance moyenne de ces quatre dettes si le taux annuel d’intérêt composé est de 13 % ?

Réponses : 3 ans 8 mois et 14 jours

3.7.9. Exercice.

Le règlement d'un montant de 500 000,00 DH prévu à la date du 30/09/2007, est remplacé par trois règlements de même valeur nominale qui interviendraient respectivement le 30/03/2008, le 30/12/2008, et le 30/06/2009.

Calculer le montant constant de ces trois règlements sachant que le taux d'intérêt composé est de 12,55% l’an Et la capitalisation est trimestrielle.

Réponses : 190 963,88 DH

3.7.10. Exercice.

Une société désire s'acquitter des dettes, ci-dessous, par un paiement unique dans 5 ans au taux d'intérêt composé annuel de 8 %.

¤ 30 000,00 DH payables dans 1 an et 6 mois ;
¤ 20 000,00 DH payables dans 2 ans ;
¤ 35 000,00 DH payables dans 3 ans et 6 mois :
¤ 40 000,00 DH payables dans 4 ans.

a) Calculer le montant de ce paiement unique.
b) Calculer l'échéance moyenne de ces 4 dettes.

Réponses : a) 146 951,09 DH ; b) 2 ans 10 mois et 23 jours

3.7.11. Exercice.

Une dette d'un montant de 200 000,00 DH devait être réglée le 30/01/2007. Le débiteur a eu de son créancier la possibilité de régler la dette au moyen de trois paiements dont les montants respectifs des deux premiers sont : 50 000,00 DH et 125 000,00 DH et dont les échéances respectives sont fixées le 30/01/2009, le 30/01/2010, et le 30/01/2011.
Calculer les montants du troisième règlement en utilisant un taux d'actualisation de 10 %.

Réponses : 94 820,00 DH

3.7.12. Exercice.

Un capital de 10000 DH est placé à intérêt composé au taux annuel de 12 % et avec une capitalisation semestrielle des intérêts. Deux ans après, la capitalisation devient trimestrielle à un taux annuel de 8% pendant trois ans. Quelle est la valeur acquise par ce capital à la fin de la période de cinq ans ?

Réponses : 15 801,83 DH

3.7.13. Exercice.

On place à intérêt composé un capital de 60000 DH avec une capitalisation mensuelle des intérêts. 12 mois après, on ajoute 50000 DH. La valeur acquise totale, 12 mois après le deuxième placement, est égale à 132525,33 DH.

a) Calculer le taux mensuel de capitalisation ;
b) Calculer le taux trimestriel équivalent ;
c) Calculer le taux annuel équivalent.

Réponses : a) 1% ; b) ; 3% c) ; 12,68%

3.7.14. Exercice.

Déterminer l'échéance commune d'une dette unique de 80 000 DH destiné à remplacer les trois dettes suivantes :

¤ 20 000 DH à échéance dans 18 mois ;
¤ 28 000 DH à échéance dans 27 mois ;
¤ 30 000 DH à échéance dans 30 mois.

Taux trimestriel : 3 %

Réponses : 28 mois et 10 jours.

3.7.15. Exercice.

La cession d'un point de vente vient de vous rapporter un capital de 850 000 DH. Vous envisagez d'en ouvrir un autre mais l'emplacement ne sera disponible que dans 4 ans et 9 mois. Dans l'attente de la réalisation de ce projet, vous décidez de placer vos disponibilités. Deux propositions vous sont offertes,

1) à 8 % l'an avec capitalisation annuelle ;
2) à 1,95 % par trimestre avec capitalisation trimestrielle.

Quelle solution choisissez-vous ?

Réponses : il est plus avantageux de choisir la deuxième proposition.

Note de lecture 3

VALEUR ACQUISE ET LA VALEUR ACTUELLE D'UN CAPITAL

Reprenons les deux formules que nous avons établies, au début de ce second chapitre :

- *celle relative à la valeur acquise, c'est à dire :* $C = C_0 (1+t)^n$ *;*

- *celle relative à la valeur actuelle, à savoir :* $C_0 = C\,(1+t)^{-n} =$.

Nous proposons de reconsidérer, quelque peu, ces 2 formules pour essayer de voir ce que l'on peut en tirer.

Première formule

La formule générale de l'intérêt composé peut être simplifiée, dans une 1è approximation, lorsque t est très petit devant 1 :

$$C = C_0 (1+t)^n \approx C_0 (1 + n\,t)$$

Il s'agit de la formule fondamentale des intérêts simples telle que nous l'avons établie dans le 1è chapitre.

En effet, pour le cas d'intérêt simple, on a bien t très petit devant 1 car :

- *la durée est, par définition, inférieure à l'année, soit n jours ou m mois ;*

- *le taux d'intérêt t est, en général, égal à quelques pour cent, pour une année.*

Seconde formule

La seconde formule relative à la valeur actuelle peut être simplifiée, dans une 1è approximation, lorsque t est très petit devant 1 :

$$C_0 = C\,(1+t)^{-n} = \frac{C}{(1+t)^n} \approx \frac{C}{1+n\,t}$$

Il s'agit de la formule de la valeur actuelle d'un capital placé à intérêt simple telle que nous l'avons établie dans le chapitre 1 ;

La seconde formule relative à la valeur actuelle peut être simplifiée, dans une 2è approximation, lorsque nt est très petit devant 1 :

$$C = C\,(1+t)^{-n} \approx C_0\,(1 - n\,t)$$

Il s'agit de la formule de la valeur actuelle d'un effet escompté à intérêt simple telle que nous l'avons établie dans le chapitre 2 ;

Nous voyons, par ces simples réflexions :

- *Comment les mathématiques financières à court terme à intérêt simple post compté se déduisent des mathématiques financières à moyens et longs termes ;*

- *Comment les mathématiques financières à court terme à intérêt pré compté se déduisent des mathématiques financières à court terme à intérêt simple post compté.*

CHAPITRE 4
LES ANNUITES

Le calcul sur les annuités est un préalable indispensable aux calculs sur les emprunts et les investissements qui feront l'objet de la partie 3 relative aux mathématiques financières approfondies.

4.1. DEFINITION.

Les annuités sont des versements périodiques de sommes d'argent pour :

- Soit constituer une épargne, un capital ;
- Soit rembourser un prêt ou amortir un investissement.

Les questions que l'on se pose au sujet des annuités sont de calculer :

- La valeur actuelle, à la date d'aujourd'hui, de l'ensemble d'une série d'annuités ;
- La valeur acquise, à une date quelconque, de l'ensemble des annuités.

Pour ce faire, nous utiliserons les relations du chapitre 3 car les calculs sur les annuités sont du domaine des mathématiques financières à moyens et longs termes.

4.2. VALEUR ACTUELLE D'ANNUITES CONSTANTES.

La valeur actuelle est la valeur à la date d'aujourd'hui.

Définition : La valeur actuelle d'une série d'annuités est la somme des valeurs actuelles de toutes les annuités constituant cette série.

4.2.1. Annuités versées en fins de périodes.

On considère le cas de n annuités constantes, versées en fins de périodes, et l'on se propose de calculer la valeur actuelle, à la date d'aujourd'hui, de ces n annuités.

On prend, pour ce faire, t comme taux d'intérêt ; on verra, par la suite, qu'on pourra l'appeler aussi, taux d'actualisation, c'est-à-dire le taux qui sert à calculer la valeur actuelle d'une somme d'argent versée ultérieurement.

Rappelons, comme nous l'avons vu, dans le chapitre 3, que :

- Une somme d'argent M, versée à la date d'aujourd'hui, vaut, une période, plus tard : $M.(1+t)$;
- Une somme d'argent M, versée à la date d'aujourd'hui, vaut 2 périodes, plus tard : $M.(1+t)^2$;
  . . .
- Une somme d'argent M, versée à la date d'aujourd'hui, vaut n périodes, plus tard : $M.(1+t)^n$.

Ceci fait que le taux t est le taux d'intérêt composé, pour une période.

De même :

- Une somme d'argent M, versée une période après aujourd'hui, vaut aujourd'hui : $M.(1+t)^{-1}$;
- Une somme d'argent M, versée 2 périodes après aujourd'hui, vaut aujourd'hui : $M.(1+t)^{-2}$;
  . . .
- Une somme d'argent M, versée n périodes après aujourd'hui, vaut aujourd'hui : $M.(1+t)^{-n}$.

Ceci fait que le taux t est le taux d'intérêt composé, pour une période, il permet de déterminer la valeur actuelle, à la date d'aujourd'hui, d'un capital de valeur M, à une date future, c'est pourquoi le taux t est aussi appelé taux d'actualisation.

Forts de ces rappels simples, nous allons pouvoir faire les calculs sur les annuités. Pour ce faire, considérons n annuités égales à V_0 et versées à la fin de chaque période :

Périodes	**Versements**	**Valeurs actuelles : V_a**
1	V_0	$V_0\,(1+t)^{-1}$
2	V_0	$V_0\,(1+t)^{-2}$
3	V_0	$V_0\,(1+t)^{-3}$
. . .	. . .	. . .
k	V_0	$V_0\,(1+t)^{-k}$
. .	. .	. .
n	V_0	$V_0\,(1+t)^{-n}$

Sachant que la valeur actuelle de l'annuité versée, à la fin de la période k est égale à $V_0(1+t)^{-k}$, la valeur actuelle V_{at} des n annuités V_0 versées à la fin de chaque période est, par définition :

$$V_{at} = V_0\,(1+t)^{-1} + V_0\,(1+t)^{-2} + V_0\,(1+t)^{-3} + \ldots + V_0\,(1+t)^{-k} + \ldots + V_0\,(1+t)^{-n}$$

On met en facteur commun l'expression $V_0\,(1+t)^{-n}$, on obtient alors :

$$V_{at} = V_0\,(1+t)^{-n}\,[\,1+(1+t) + (1+t)^2 + (1+t)^3 + \ldots + V_0\,(1+t)^{-k} + \ldots + (1+t)^{n-1}]$$

Remarquons que l'expression entre crochets est égale à $\frac{(1+t)^n - 1}{t}$ puisqu'il s'agit d'une progression géométrique de premier terme 1 et de raison (1+t) :

$$Va = V_0\,(1+t)^{-n}\,\frac{(1+t)^n - 1}{t} = V_0\,\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$$

La valeur actuelle, aujourd'hui, d'une suite de n annuités, toutes égales à V_0 et versées, à la fin de chaque période est donnée par la relation :

$$\mathbf{V_a = V_0\,\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}} \qquad \mathbf{(1)}$$

Comme nous l'avons fait remarquer, dans les chapitres 1, 2 et 3, la valeur du taux d'intérêt t, dans les relations du présent chapitre, sont en pourcentage, c'est-à-dire que si, par exemple on a t = 9 %, on prendra t = 0,09 et non 9 seulement.

L'expression de la valeur actuelle d'une suite d'annuités toutes égales à V_0 et versées en fin de périodes est une formule reliant les 4 paramètres V_a (valeur actuelle), V_0 (valeur constante de l'annuité), t (taux d'intérêt) et n (nombre d'annuités) ; elle permet donc de résoudre 4 problèmes différents : calculer l'un des 4 paramètres connaissant les 3 autres.

Exemple 1 : Salah décide de placer, régulièrement, à la fin de chaque année, la somme de 1200,00 DH; quelle est la valeur actuelle de ses placements sur 4 ans sachant que le taux d'actualisation t est égal à 6 % ?

La relation de la valeur actuelle d'annuités de fins de périodes donne par le calcul :

$$Va = V_0\,\frac{1-(1+t)^{-n}}{t} = 1\,200 \text{ x } \frac{1-1{,}06^{-4}}{0{,}06}$$

Nous pouvons calculer Va, soit directement en utilisant la fonction x^y des calculettes électroniques ou des micro-ordinateurs soit en utilisant les tables financières :

Par calculette, on a $1{,}06^{-4} = 0{,}792094$ => Va = 1 200,00 x 3,465106 = 4 158,13 DH.

Par la table T4, pour t = 6 % et n = 4 => Va = 1 200,00 x 3,465106 = 4 158,13 DH.

Exemple 2 : Kamal a placé la somme de 2 500,00 DH, pendant 5 ans, à la fin de chaque année. Quel est le taux d'intérêt si la valeur actuelle de ses placements est de 10 823,69DH ?

Nous avons d'après l'expression de la valeur actuelle de n annuités V_0 versées en fins de périodes :

$$V_a = V_0 \frac{1-(1+t)^{-n}}{t} \quad \Rightarrow \quad \frac{1-(1+t)^{-n}}{t} = \frac{Va}{V_0} = \frac{10\,823{,}69}{2500} = 4{,}329476$$

En utilisant la table financière T4, on trouve t = 5 %

Remarquons que dans ce cas, il n'est pas possible de calculer directement t.

Exemple 3 : La valeur actuelle des versements mensuelles de 4 500,00 DH pendant 4 ans est de 194 000,00 DH. Quel est le taux d'intérêt annuel appliqué.

Nous avons d'après l'expression de la valeur actuelle de n annuités V_0 versées en fins de périodes :

$$V_a = V_0 \frac{1-(1+t)^{-n}}{t} \quad \Rightarrow \quad \frac{1-(1+t)^{-n}}{t} = \frac{Va}{V_0} = \frac{194\,000{,}00}{4\,500{,}00} = 43{,}111111$$

Remarquons que puisqu'il s'agit de placements mensuels, il faut considérer le taux d'intérêt composé mensuel t_m et le nombre de mois dans 4 ans, soit n = 48.

$$\frac{Va}{V_0} = \frac{1-(1+t_m)^{-48}}{t_m} = 43{,}111111$$

Remarquons aussi que dans ce cas, il n'est pas possible de calculer directement t, il nous faut donc utiliser les tables financières. En consultant la table financière N° 4, on ne trouve pas, pour n = 48, la valeur exacte de 43,11111, mais on trouve les 2 valaurs les plus proches, à savoir :

Pour : $t_m = 0,4\%$ => $\frac{1-(1+t_m)^{-48}}{t_m} = 43,594249$

Pour : $t_m = 0,5\%$ => $\frac{1-(1+t_m)^{-48}}{t_m} = 42,580318$

Le taux qu'on cherche est donc compris entre 0,4% et 0,5% ; en utilisant l'interpolation linéaire on a :

0,4%----------------------------t_m---------------------0,5%

43,594249-----------------------43,111111-------------42,580318

$$\frac{0,5\% - 0,4\%}{42,580318 - 43,594249} = \frac{t_m - 0,4\%}{43,111111 - 43,594249}$$

$$t_m = 0,4\% + \frac{0,5\% - 0,4\%}{42,580319 - 43,594249}(43,111111 - 43,594249) = 0,447\% \approx 0,45\% \text{ par mois}$$

Le taux annuel équivalent : ta = $1,0045^{12} - 1 = 5,54\%$

Exemple 4 : Calculer les nombres de placements d'un montant de 1 250,00 DH, à la fin de chaque année, afin que la valeur actuelle de ses placements soit égale à 7 763,90 DH sachant que le taux d'intérêt annuel est de 9,75 %.

Nous avons, d'après l'expression de la valeur actuelle de n annuités V_0 versées en fins de périodes :

$$Va = V_0 \frac{1-(1+t)^{-n}}{t} \quad \Rightarrow \quad \frac{1-(1+t)^{-n}}{t} = \frac{V_a}{V_0} = \frac{7\,763,90}{1\,250,00} = 6,21112$$

Nous pouvons calculer n, soit directement en utilisant la fonction logarithme des calculettes électroniques ou des micro-ordinateurs soit en utilisant les tables financières :

En utilisant la table financière T4, on trouve justement pour $\frac{1-(1+0,0975)^{-n}}{0,0975} = 6,21112$ que n = 10 ans.

Pour utiliser la fonction logarithme, il est nécessaire de transformer la dernière expression :

$$\frac{1-(1+t)^{-n}}{t} = \frac{V_a}{V_0} \qquad => \qquad (1+t)^{-n} = \frac{V_0 - V_a \times t}{V_0}$$

$$(1+t)^{-n} = \frac{1250 - 7763{,}90 \times 0{,}0975}{1250} = 0{,}394416$$

Les calculs sur calculette ou sur micro-ordinateur donnent pour n = $\frac{\text{Log}0{,}399848}{-\text{Log}(1{,}096)} = 10\text{ ans}$

Exemple 5 : On décide de placer, à la fin de chaque année, une somme constante d'argent. La valeur actuelle de ces placements sur 5 ans est 72 500,00 DH. Quelle est la valeur de l'annuité, si le taux d'actualisation est t = 9 %.

La relation (1) donne après transformation :

$$V_0 = Va \ \frac{t}{1-(1+t)^{-n}} = 72\ 500{,}00 \text{ x } \frac{0{,}09}{1-1{,}09^{-5}}$$

Solution à l'aide des tables financières :

La table T.4 a donné pour n = 5 et t = 9 % => Va = 3,889651 V_0

Ce qui fait pour V_0 = 72 500 / 3,889651 = 18 639,20 DH

Le calcul grâce à la fonction x^y donne pour $1{,}09^{-5}$ = 0,649931 ce qui donne pour V_0 :

$$V_0 = 72\ 500{,}00 \text{ x } \frac{0{,}09}{1-0{,}649931} = 72\ 500{,}00 \text{ x } 0{,}257092 = 18\ 639{,}20 \text{ DH}$$

4.2.2. Annuités en début de périodes.

Nous pouvons, comme nous l'avons fait, au paragraphe 4.2.1, considérer n annuités égales à V_0 et versées au début de chaque période :

Périodes	**Versements**	**Valeurs actuelles : V_a**
1	V_0	V_0
2	V_0	$V_0\,(1+t)^{-1}$
3	V_0	$V_0\,(1+t)^{-2}$
. . .	. . .	. . .
k	V_0	$V_0\,(1+t)^{-(k-1)}$
. .		. .
n	V_0	$V_0\,(1+t)^{-(n-1)}$

Sachant que la valeur actuelle de l'annuité V_0 versée, au début de la période k est égale à $V_0(1+t)^{-(k-1)}$, la valeur actuelle de n annuités versées en début de périodes est, par définition :

$$V_a = V_0 + V_0(1+t)^{-1} + V_0(1+t)^{-2} + V_0(1+t)^{-3} + \ldots + V_0\,(1+t)^{-(k-1)} + \ldots + V_0(1+t)^{-(n-1)}$$

On met l'expression $V_0\,(1+t)^{-(n-1)}$ en facteur commun, on obtient alors :

$$V_a = V_0\,(1+t)^{-(n-1)}\,[\,1+(1+t) + (1+t)^2 + (1+t)^3 + \ldots + (1+t)^{(n-k)} + \ldots + (1+t)^{n-1}]$$

Remarquons que l'expression entre crochets est égale à $\frac{(1+t)^n - 1}{t}$ puisqu'il s'agit d'une progression géométrique de premier terme 1 et de raison (1+t) :

$$V_a = V_0\,(1+t)^{-(n-1)} \times \frac{(1+t)^n - 1}{t} = V_0\,(1+t)\,\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$$

La valeur actuelle, aujourd'hui, d'une suite de n annuités toutes égales à V_0 et versées, au dèbut de chaque période est donnée par la relation :

$$\mathbf{Va = V_0\,(1 + t)\,\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}} \qquad \mathbf{(2)}$$

Remarque 1 : *Nous aurions pu trouver plus rapidement une telle expression en remarquant que la valeur actuelle d'une annuité versée en début de période est égale à l'annuité versée en fin de période multipliée par (1 + t), ce qui fait que pour trouver la valeur actuelle d'une suite d'annuités versées en début de période il sufit de multipliér par (1 + t) la valeur actuelle d'une suite d'annuités versée en fin de périodes.*

L'expression de la valeur actuelle d'une suite d'annuités toutes égales à V_0 et versées en début de périodes est une formule reliant les 4 paramètres V_a (valeur actuelle), V_0 (valeur de l'annuité), t (taux d'intérêt) et n (nombre d'annuités) ; elle permet donc de résoudre 4 problèmes différents : calculer l'un des 4 paramètres connaissant les 3 autres.

Exemple 6 : Quelle est la valeur actuelle de 6 placements de 2 450,00 DH, au début de chaque mois si le taux d'intérêt annuel est de 9% ?

Nous avons d'après l'expression de la valeur actuelle de n annuités V_0 versées au début de chaque période :

$$Va = V_0(1 + t)\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$$

Il nous faudra calculer le taux d'intérêt pour la période considérée, à savoir le mois. Quel est le taux d'intérêt mensuel t_m équivalent au taux d'intérêt annuel t_a de 9% ?

$$1 + t_a = (1 + t_m)^{12}$$

Par l'utilisation de la fonction x^y, on a : $t_m = (1{,}09)^{1/12} - 1 = 0{,}72\ \%$

Par l'utilisation des tables financière, on lit sur la table T6 : $t_a = 9\%$ => $t_m = 0{,}72\%$

On peut alors calculer Va directement par l'utilisation de la fonction x^y ou par l'utilisation des tables financières :

Par l'utilisation de la fonction x^y : on a $1{,}0072^{-6} = 0{,}957868$

$$Va = V_0\,(1+t)\,\frac{1-(1+t)^{-n}}{t} = 2450{,}00 \times (1+0{,}0072) \times \frac{1-0{,}957868}{0{,}0072} = 14439{,}78 \text{ DH}$$

Par l'utilisation des tables financières, on lit sur la table T5 :

Pour : tm = 0,7% => $\dfrac{1-(1+0{,}007)^{-6}}{0{,}007} = 5{,}855701$

Pour : tm = 0,8% => $\dfrac{1-(1+0{,}008)^{-6}}{0{,}008} = 5{,}835521$

La valeur de $\frac{1-(1+0{,}0072)^{-6}}{0{,}0072}$ qu'on cherche est donc compris entre 5,835521 et 5,855701 ; en utilisant l'interpolation linéaire on a :

0,7%-----------------------------0,72%---------------------0,8%

5,855701------------------------a = $\frac{1-(1+0{,}0072)^{-6}}{0{,}0072}$ -------------5,835521

$$\frac{0{,}8\% - 0{,}7\%}{5{,}835521 - 5{,}855701} = \frac{0{,}72 - 0{,}7\%}{a - 5{,}855701}$$

$$a = \frac{1-(1+0{,}0072)^{-6}}{0{,}0072} = 5{,}855701 + \frac{0{,}72\% - 0{,}7\%}{0{,}8\% - 0{,}7\%}(5{,}835521 - 5{,}855701) = 5{,}851665$$

Va = 2 450,00 x (1+0,0072) x 5,851665 = 14 439,80 DH

On trouve bien presque le même résultat que par l'utilisation de la fonction x^y qui est sensé donné le résultat le plus proche du vrai résultat.

Exemple 7 : Quelle est la valeur d'un placement effectué 7 fois, au début de chaque trimestre, pendant une année et demi, pour avoir une valeur actuelle de 14 750,00 DH si le taux d'intérêt est de 7% ?

Nous avons d'après l'expression de la valeur actuelle de n annuités V_0 versées en débuts de périodes :

$$Va = V_0\,(1+t)\,\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$$

Il nous faudra calculer le taux d'intérêt pour la période considérée, à savoir le trimestre. Quel est le taux d'intérêt trimestriel t_t équivalent au taux d'intérêt annuel t_a de 9% ?

$1 + t_a = (1 + t_t)^4$

Par l'utilisation de la fonction x^y, on a : $t_t = (1{,}09)^{1/4} - 1 = 2{,}18\ \%$

Par l'utilisation des tables financière, on lit sur la table T6 : $t_a = 9\%$ => $t_t = 2{,}18\%$

On peut alors calculer V_0 directement par l'utilisation de la fonction x^y ou par l'utilisation des tables financières :

Par l'utilisation de la fonction x^y : on a $1{,}0218^{-7} = 0{,}859882$

$$Va = V_0\,(1+t)\,\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$$

$$V_0 = \frac{Va \times t}{(1+t)\times(1-(1+t)^{-n})} = \frac{14\,750{,}00 \times 0{,}0218}{1{,}0218\times(1-0{,}859882)} = 2245{,}89 \text{ DH}$$

Par l'utilisation des tables financières, en consultant la table T4, on ne trouve pas exactement la valeur de $\frac{1-(1+t)^{-7}}{t}$ pour t = 2,18% mais pour deux valeurs les plus proches, à savoir :

Pour : $t_t = 2\%$ => $\frac{1-(1+t)^{-7}}{t} = 6{,}471991$

Pour : $t_t = 2{,}25\%$ => $\frac{1-(1+t)^{-7}}{t} = 6{,}410246$

La valeur de $\frac{1-(1+0{,}0218)^{-7}}{0{,}0218}$ qu'on cherche est donc compris entre 6,916750 et 5,944334 ; en utilisant l'interpolation linéaire on a :

2%-----------------------------2,18%---------------------2,25%

6,471991-----------------------a = $\frac{1-(1+0{,}0218)^{-7}}{0{,}0218}$ -------------6,410246

$$\frac{2{,}25\% - 2\%}{6{,}410246 - 6{,}471991} = \frac{2{,}18 - 2\%}{a - 6{,}471991}$$

$$a = \frac{1-(1+0{,}0218)^{-7}}{0{,}0218} = 6{,}471991 + \frac{2{,}18\% - 2{,}2\%}{2{,}25\% - 2\%}(6{,}410246 - 6{,}471991) = 6{,}427535$$

On doit reprendre l'expression de V_0 en fonction de V_a à savoir :

$$V_0 = \frac{Va}{(1+t)\times\frac{1-(1+t)^{-7}}{t}} = \frac{14\,750{,}00}{1{,}0218\times 6{,}427535} = 2\,245{,}85 \text{ DH}$$

On trouve presque le même résultat que celui trouvé par l'utilisation de la fonction x^y.

Exemple 8 : Combien faut-il effectuer de versements tous égaux à 3 250,00 DH, au début de chaque semestre, pour avoir une valeur actuelle, à la fin, de 26 500,00 DH si le taux d'intérêt est de 9% ?

Nous avons d'après l'expression de la valeur actuelle de n annuités V_0 versées en débuts de périodes :

$$Va = V_0(1 + t_s)\frac{1-(1+t_s)^{-n}}{t_s}$$

Il nous faudra calculer le taux d'intérêt pour la période considérée, à savoir le semestre. Quel est le taux d'intérêt semestriel t_s équivalent au taux d'intérêt annuel t_a de 9% ?

$1 + t_a = (1 + t_s)^2$

Par l'utilisation de la fonction x^y, on a : $t_s = (1{,}09)^{1/2} - 1 = 4{,}40$ %

Par l'utilisation des tables financière, on lit sur la table T6 : $t_a = 9\%$ => $t_t = 0{,}044$

$$Va = V_0(1 + t_s)\frac{1-(1+t_s)^{-n}}{t_s} \quad \Rightarrow \quad (1+t_s)^{-n} = 1 - \frac{Va\times t_s}{V_0(1+t_s)}$$

$$(1+t_s)^{-n} = 1 - \frac{26500\times 0{,}044}{3250\times 1{,}044} = 0{,}656351$$

$$n = \frac{\text{Log}0{,}656351312}{-\text{Log}1{,}044} = 10 \text{ semestres}$$

Exemple 9 : A quel taux d'intérêt doit-on placer 50 versements égaux à 1 750,00 DH, effectués au début de chaque mois pour avoir une valeur actuelle de 80 844,42 DH ?

Nous avons d'après l'expression de la valeur actuelle de n (n = 50) annuités V_0 versées en débuts de périodes, au taux d'intérêt composé mensuel t_m :

$$Va = V_0(1 + t_m)\frac{1-(1+t_m)^{-n}}{t_m}$$

$$(1 + t_m)\frac{1-(1+t_m)^{-n}}{t_m} = \frac{V_a}{V_0} = \frac{80844{,}42}{1750{,}00} = 46{,}196811$$

Remarquons que dans ce cas, il n'est pas possible de déterminer t ni directement ni par une table financière, on essaie alors de trouver le résultat par approxiamations succéssives :

Pour t_m = 0,2 % on a : => $(1 + t_m)\frac{1-(1+t_m)^{-50}}{t_m} = (1 + 0{,}002)\frac{1-(1{,}002)^{-50}}{0{,}002} = 47{,}631179$

Pour t_m = 0,3 % on a : => $(1 + t_m)\frac{1-(1+t_m)^{-50}}{t_m} = (1 + 0{,}003)\frac{1-(1{,}003)^{-50}}{0{,}003} = 46{,}505342$

La valeur du taux d'intérêt qu'on cherche est donc compris entre 0,2% et 0,3% ; en utilisant l'interpolation linéaire on a :

0,2%---------------------------- t_m ---------------------0,3%

47,631179----------------------46,196811 -------------46,505342

$$\frac{0{,}3\% - 0{,}2\%}{46{,}505342 - 47{,}631179} = \frac{t_m - 0{,}2\%}{46{,}196811 - 47{,}631179}$$

$$t_m = 0{,}2\% + \frac{46{,}196811 - 47{,}631179}{46{,}505342 - 47{,}631179} \times (0{,}3\% - 0{,}2\%) = 0{,}327\%$$

Il nous faudra maintenant calculer le taux d'intérêt annuel t_a équivalent au taux d'intérêt mensuel de 0,327 %

$1 + t_a = (1 + t_m)^{12} = 1{,}00327^{12} = 1{,}03995$ => $t_a = 4\ \%$

4.2.3. Valeur actuelle d'une suite d'annuités constantes à une période antérieure à la période d'origine.

On considère le cas de n annuités constantes et l'on se propose de calculer la valeur actuelle de ces n annuités, à une date antérieure à la date d'aujourd'hui.

4.2.3.1. Cas d'annuités versées en fin de périodes.

Considérons donc n annuités égales à V_0 et versées à la fin de chaque période. Rappelons que la période d'origine se situe à une période avant la première annuité. On désire déterminer la valeur actuelle à une date antérieure de p périodes avant la période d'origine 0 :

Périodes	Versements	Valeurs actuelles : V_a
- p	. . .	$V_a(1+t)^{-p}$
. . .	. . .	. . .
0	V_a	V_a

La valeur actuelle à la date p est obtenue en actualisant la valeur actuelle Va à l'origine jusqu'à la date p.

$$Va_p = Va\,(1+t)^{-p}$$

$$Va = V_0\,\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$$

$$Va_p = V_0\,\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}\,(1+t)^{-p} \qquad (3)$$

4.2.3.2. Cas d'annuités versées en début de périodes.

Pour des annuités versées en début de périodes, il est aisé de montrer que les calculs donnent :

$$Va_p = V_0\,\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}\,(1+t)^{-(p-1)} \qquad (4)$$

puisqu'il suffit de multiplier le résultat par (1 + t).

Exemple 10 : Sabah décide de placer, régulièrement, à la fin de chaque mois, pendant 4 ans, la somme de 1 200,00 DH; le premier versement intervient dans 6 mois. Quelle est la valeur actuelle de ses 48 placements ? Le taux d'actualisation annuel t est égal à 6 %.

Il nous faudra calculer le taux d'intérêt pour la période considérée, à savoir le mois. Quel est le taux d'intérêt mensuel t_m équivalent au taux d'intérêt annuel t_a de 6% ?

$1 + t_a = (1 + t_m)^{12} \quad \Rightarrow \quad t_m = (1{,}06)^{1/12} - 1 = 0{,}49\ \%$

Par l'utilisation de la fonction x^y, on a : $t_t = (1,06)^{1/4} - 1 = 0,49$ %

Par l'utilisation des tables financière, on lit sur la table T6 : $t_a = 6\%$ => $t_m = 0,4868\% \approx 0,49\%$

Dates d'aujourd'hui, origine du 1er versement

```
---//---------------/------/------/------/-----//----------/---------/------/-------/        ———→
   0              1      2      3      4      5          6          7      8……….
```

La valeur actuelle correspond à la valeur des 48 annuités 5 mois avant la date d'origine, car la période d'origine correspond à 1 mois avant le premier versement.

La relation de la valeur actuelle d'annuités de fins de périodes donne la valeur actuelle à l'origine :

$$Va = V_0 \frac{1-(1+t)^{-n}}{t} = 1\ 200 \text{ x } \frac{1-1,0049^{-48}}{0,0049} = 51\ 216,28 \text{ DH}$$

La valeur d'aujourd'hui correspond à la valeur actuelle des 51 216,28 DH, 5 mois avant la date d'origine :

$$Va_5 = V_0 \frac{1-(1+t)^{-n}}{t} (1+t)^{-p} = 51\ 216,28\ (1+0,0049)^{-5} = 49\ 979,72 \text{ DH}$$

4.3. VALEUR ACQUISE D'ANNUITES CONSTANTES.

La valeur acquise est la valeur à une date quelconque ultérieure à la date d'aujourd'hui.

Définition : La valeur acquise d'une série d'annuités est la somme des valeurs acquises, à la fin de la dernière période, de toutes les annuités constituant cette série.

4.3.1. Annuités en fins de périodes.

Nous pouvons, comme nous l'avons fait au paragraphe 4.2., considérer n annuités égales à V_0 et versées à la fin de chaque période :

Périodes	**Versements**	**Valeurs acquises : VA**
1	V_0	$V_0(1+t)^{n-1}$
2	V_0	$V_0(1+t)^{n-2}$
3	V_0	$V_0(1+t)^{n-3}$
. . .	. . .	. . .
k	V_0	$V_0(1+t)^{n-k}$
. .		. .
n	V_0	V_0

Sachant que la valeur acquise, à la fin de la dernière période, d'une annuité V_0 versée à la fin de la période k est égale à $V_0(1+t)^{(n-k)}$, la valeur acquise, à la fin de la dernière période, d'une suité d'annuités versées en fin de périodes est, par définition :

$$VA = V_0(1+t)^{n-1} + V_0(1+t)^{n-2} + V_0(1+t)^{n-3} + \ldots + V_0(1+t)^{n-k} + \ldots + V_0$$

On met en facteur commun V_0, on trouve en commençant par le drenier terme :

$$VA = V_0 [\ 1+(1+t) + (1+t)^2 + (1+t)^3 + \ldots + (1+t)^{n-k} + \ldots + (1+t)^{n-1}]$$

Remarquons que l'expression entre crochets est égale à $\frac{(1+t)^n - 1}{t}$ puisqu'il s'agit d'une progression géométrique de premier terme 1 et de raison (1+t), la valeur acquise, à la date n, d'une suite de n annuités toutes égales à V_0 et versées, en fin de périodes est donnée par la relation :

$$\mathbf{VA = V_0 \frac{(1+t)^n - 1}{t}} \qquad (5)$$

Remarque 2 : Nous aurions pu trouver plus facilement et plus rapidement ce résultat en partant de l'expression de la valeur actuelle d'une suite d'annuités constatntes versées en fin de périodes, telle que nous l'avons calculée dans le paragraphe 4.2. et en se servant de la relation évidente : $VA = Va\ (1+t)^n$ c'est-à-dire que la valeur acquise se déduite de la valeur actuelle par la multiplication de cette dernière par le coefficient d'actualisation $(1+t)^n$, on aura alors :

$$VA = Va\ (1+t)^n = V_0 \times (1+t)^n \frac{1-(1+t)^{-n}}{t} = V_0 \frac{(1+t)^n - 1}{t}$$

Ce qui est le résultat trouvé.

L'expression de la valeur acquise d'une suite d'annuités toutes égales à V_0 et versées en fin de périodes est une formule reliant les 4 paramètres VA (valeur acquise), V_0 (valeur de l'annuité), t (taux d'intérêt) et n (nombre d'annuités) ; elle permet donc de résoudre 4 problèmes différents : calculer l'un des paramètres connaissant les 3 autres.

Exemple 11 : Quelle est la valeur acquise de 4 placements de 13 520,00 DH, à la fin de chaque mois, si le taux d'intérêt annuel est de 9 % ?

Nous avons d'après l'expression de la valeur acquise de n annuités V_0 versées en fins de périodes :

$$VA = V_0 \frac{(1+t)^n - 1}{t}$$

Il nous faudra calculer le taux d'intérêt pour la période considérée, à savoir le mois. Quel est le taux d'intérêt mensuel t_m équivalent au taux d'intérêt annuel t_a de 9% ?

$$1 + t_a = (1 + t_m)^{12}$$

Par l'utilisation de la fonction x^y, on a : $t_m = (1{,}09)^{1/12} - 1 = 0{,}72\ \%$

Par l'utilisation des tables financières, on lit sur la table T6 : $t_a = 9\%$ => $t_m = 0{,}0072$

$$VA = V_0 \frac{(1+t_m)^n - 1}{t_m} = 13\,520 \ \frac{(1+0{,}0072)^4 - 1}{0{,}0072} = 54\,666{,}87 \text{ DH.}$$

Exemple 12 : Quelle doit être la valeur de 6 placements égaux effectués, à la fin de chaque trimestre pour avoir une valeur acquise de 18562,66 DH si le taux d'intérêt annuel est de 5% ?

Nous avons d'après l'expression de la valeur acquise de n annuités V_0 versées en fins de périodes :

$$VA = V_0 \frac{(1+t)^n - 1}{t}$$

Il nous faudra calculer le taux d'intérêt pour la période considérée, à savoir le trimestre. Quel est le taux d'intérêt mensuel t_t équivalent au taux d'intérêt annuel t_a de 5 % ?

$$1 + t_a = (1 + t_t)^4$$

Par l'utilisation de la fonction x^y, on a : $t_t = (1{,}05)^{1/4} - 1 = 1{,}23\ \%$

Par l'utilisation des tables financières, on lit sur la table T6 : $t_a = 5\%$ => $t_t = 0{,}0123$

$$VA = V_0 \frac{(1+t_t)^n - 1}{t_t}$$

$$V_0 = VA \frac{t_t}{(1+t_t)^n - 1} = 18562{,}66 \frac{0{,}0123}{(1+0{,}0123)^6 - 1} = 3\,000{,}00 \text{ DH}$$

Exemple 13 : Combien doit-on effectuer de vesement égaux à 2 600,00 DH effectués à la fin de chaque semestre pour avoir une valeur acquise de 23 484,23 DH si le taux d'intérêt annuel est de 7 % ?

Nous avons d'après l'expression de la valeur acquise de n annuités V_0 versées en fins de périodes :

$$VA = V_0 \frac{(1+t)^n - 1}{t}$$

Il nous faudra calculer le taux d'intérêt pour la période considérée, à savoir le semestre. Quel est le taux d'intérêt semestriel t_s équivalent au taux d'intérêt annuel t_a de 7% ?

$1 + t_a = (1 + t_s)^2$

Par l'utilisation de la fonction x^y, on a : $t_s = (1{,}07)^{1/2} - 1 = 3{,}44$ %

Par l'utilisation des tables financières, on lit sur la table T6 : $t_a = 9\%$ => $t_s = 0{,}0344$

$$VA = V_0 \frac{(1+t_s)^n - 1}{t_s}$$

$$(1+t_s)^n = \frac{VA}{V_0} \times t_s + 1$$

$$(1+0{,}0344)^n = \frac{23\,484{,}23}{2\,600{,}00} \times 0{,}0344 + 1 = 1{,}310714$$

$$n = \frac{\text{Log}1{,}310714}{\text{Log}1{,}0344} = 8 \text{ semestres}$$

Exemple 14 : Combien de mensualités constantes de 1 500,00 DH chacune faut-il placer à 8 % l'an pour constituer un capital de 150 000,00 DH ?

Nous avons d'après l'expression de la valeur acquise de n annuités V_0 versées en fins de périodes :

$$VA = V_0 \frac{(1+t)^n - 1}{t}$$

Il nous faudra calculer le taux d'intérêt pour la période considérée, à savoir le mois. Quel est le taux d'intérêt mensuel t_m équivalent au taux d'intérêt annuel t_a de 8% ?

$1 + t_a = (1 + t_m)^{12}$

Par l'utilisation de la fonction x^y, on a : $t_m = (1{,}08)^{1/12} - 1 = 0{,}64$ %

Par l'utilisation des tables financières, on lit sur la table T6 : $t_a = 9\%$ => $t_m = 0{,}0064$

$$150000 = 1500 \times \frac{1{,}0064^n - 1}{0{,}0064}$$

$$1{,}0064^n = 1{,}64$$

$$n = \frac{\text{Log}\,1{,}64}{\text{Log}\,1{,}0064} = 77{,}54$$

Le nombre de mensualités doit être entier, c'est soit 77 mensualités soit 78 mensualités avec une modification de la dernière mensualité ou de toutes les mensualités.

Si on choisit 77 mensualités, la dernière mensualité a_{77} peut être modifiée et elle sera supérieure à 1500 DH.

$$a_{77} = (150000 - VA) + 1500{,}00 \text{ DH}$$

$$a_{77} = (150\,000{,}00 - 1500{,}00 \times \frac{1{,}0064^{77} - 1}{0{,}0064}) + 1500{,}00 = 2\ 830{,}13 \text{ DH}$$

Si l'on désire avoir 77 mensualités toutes égales, nous devons changer la valeur de l'annuité :

$$a = V_{77} \times \frac{t}{(1+t)^{77} - 1} = 150\,000{,}00 \times \frac{0{,}0064}{1{,}0064^{77} - 1} = 1513{,}42 \text{ DH}$$

Si on choisit 78 mensualités, on peut modifier la dernière mensualité a_{78} qui sera inférieure à 1 500,00 DH.

$$a_{78} = 1500{,}00 - (V_{78} - 150\,000{,}00) = 1500 - (1500 \times \frac{1{,}0064^{78} - 1}{0{,}0064} - 150000) = 378{,}64 \text{ DH}$$

De même si l'on désire avoir 78 mensualités toutes égales, nous devons changer la valeur de l'annuité :

$$a = V_{78} \times \frac{t}{(1+t)^{78} - 1} = 150\,000{,}00 \times \frac{0{,}0064}{1{,}0064^{78} - 1} = 1488{,}87 \text{ DH}$$

Exemple 15 : A quel taux d'intérêt doit-on placer 4 versements tous égaux à 1 125,00 DH effectués à la fin de chaque mois afin que leur valeur acquise soit égale à 4 600,00 DH ?

Nous avons d'après l'expression de la valeur acquise de n mensualités V_0 versées en fins de périodes :

$$VA = V_0 \frac{(1+t_m)^n - 1}{t_m} \quad \Rightarrow \quad \frac{(1+t_m)^4 - 1}{t_m} = \frac{VA}{V_0} = \frac{4\,600{,}00}{1\,125{,}00} = 4{,}088889$$

La table financière T3 donne :

Pour t = 1,25% $\quad \frac{(1+t_m)^4 - 1}{t_m} = 4{,}075627$

Pour t = 1,50% $\quad \frac{(1+t_m)^4 - 1}{t_m} = 4{,}090903$

La valeur du taux d'intérêt qu'on cherche est donc compris entre 1,25% et 1,50% ; en utilisant l'interpolation linéaire on a :

1,25%---------------------------- t_m --------------------1,50%

4,075627----------------------------4,088889 --------------4,090903

$$\frac{1{,}50\% - 1{,}25\%}{4{,}090903 - 4{,}075627} = \frac{t_m - 1{,}25\%}{4{,}088889 - 4{,}075627}$$

$$t_m = 1{,}25\% + \frac{4{,}088889 - 4{,}075627}{4{,}090903 - 4{,}075627} \times (1{,}50\% - 1{,}25\%) = 1{,}467\%$$

Il nous faudra maintenant calculer le taux d'intérêt annuel t_a équivalent au taux d'intérêt mensuel de 1,467 %

$1 + t_a = (1 + t_m)^{12} = 1{,}01467^{12} = 1{,}19 \Rightarrow t_a = 19\ \%$

Exemple 16 : A quel taux d'intérêt faut-il placer une suite de 20 trimestrialités constantes de valeur 5 000,00 DH chacune pour constituer un capital de 120 000,00 DH au moment du versement de la dernière trimestrialité ?

Nous avons d'après l'expression de la valeur acquise de n mensualités V_0 versées en fins de périodes :

$$VA = V_0 \frac{(1+t_t)^n - 1}{t_t} \Rightarrow \frac{(1+t_t)^n - 1}{t_t} = \frac{VA}{V_0} = \frac{120\,000{,}00}{5\,000{,}00} = 24$$

Pour résoudre cette équation, il faut essayer différentes valeurs de t.

Au taux $t = 2\%$ $\quad \dfrac{(1+0{,}02)^{20} - 1}{0{,}02} = 24{,}2973698$

et

Au taux $t = 1{,}75\%$ $\quad \dfrac{(1+0{,}0175)^{20} - 1}{0{,}0175} = 23{,}7016112$

Le taux qu'on cherche est donc compris entre 1,75 % et 2 %.

En utilisant l'interpolation linéaire, on peut trouver une bonne approximation du taux t.

1,75%----------------t_t----------------2%

23,7016112 ----------24---------24,2973698

$$\frac{2 - 1{,}75}{24{,}2973698 - 23{,}7016112} = \frac{t - 1{,}75}{24 - 23{,}7016112}$$

$$t = 1{,}75 + \frac{2 - 1{,}75}{(24{,}2973698 - 23{,}7016112)} \times (24 - 23{,}7016112) = 1{,}88\%$$

Le taux annuel équivalent est : ta = $(1 + 0{,}0188)^4 - 1 = 7{,}73\%$ l'an

4.3.2. Annuités en début de périodes.

Nous pouvons, comme nous l'avons fait au paragraphe 4.2., considérer n annuités égales à V_0 et versées au début de chaque période :

Périodes	Versements	Valeurs acquises : VA
1	V_0	$V_0\,(1+t)^n$
2	V_0	$V_0\,(1+t)^{n-1}$
3	V_0	$V_0\,(1+t)^{n-2}$
. . .	. . .	. . .
k	V_0	$V_0\,(1+t)^{n-(k-1)}$
. .		. .
n	V_0	$V_0\,(1+t)$

Sachant que la valeur acquise, à la fin de la dernière période, d'une annuité V_0 versée au début de la période k est égale à $V_0(1+t)^{n-(k-1)}$, la valeur acquise, à la fin de la dernière période, d'une suité d'annuités versées en début de périodes est, par définition :

$$VA = V_0(1+t)^n + V_0(1+t)^{n-1} + V_0(1+t)^{n-2} + \ldots + V_0\,(1+t)^{n-(k-1)} + \ldots + V_0(1+t)$$

On met en facteur commun l'expression $V_0(1+t)$, on trouve alors :

$$VA = V_0(1+t)\,[\,1+(1+t) + (1+t)^2 + (1+t)^3 + \ldots + (1+t)^{n-k} + (1+t)^{n-1}]$$

Remarquons que l'expression entre crochets est égale à $\frac{(1+t)^n - 1}{t}$ puisqu'il s'agit d'une progression géométrique de raison (1+t) :

La valeur acquise, à la fin de la période n, d'une suite de n annuités toutes égales à V_0 et versées, en dèbut de périodes, est donnée par la relation :

$$\mathbf{VA = V_0\,(1 + t)\,\frac{(1+t)^n - 1}{t}} \qquad (6)$$

***Remarque 6** : Nous aurions pu trouver plus facilement et plus rapidement ce résultat de deux façons différentes :*

- en partant de l'expression de la valeur actuelle d'une suite d'annuités constatntes versées en début de périodes, telle que nous l'avons calculée dans le paragraphe 4.1.1. et en se servant de la relation évidente : VA = Va $(1 +t)^n$ c'est-à-dire que la valeur acquise se déduite de la valeur actuelle par la multiplication par le coefficient d'actualisation $(1 + t)^n$, ce qui fait que le valeur acquise d'une suite d'annuitées versées en début de période est égale à la valeur acquise de la même suite d'annuitées versées en fin de périodes multipliée par le coefficient d'actualisation (1 + t), on aura alors :

$$VA = Va\ (1 + t)^n = V_0 \times (1+t)^n (1+t) \frac{1-(1+t)^{-n}}{t} = V_0 (1+t) \frac{(1+t)^n - 1}{t}$$

Ce qui est le résultat trouvé.

-En partant de l'expression de la valeur acquise d'une suite d'annuités constantes versées en fin de périodes, telle que nous l'avons calculée dans le paragraphe 4.2.1. et en utilisant la relation évidente qui fait que la valeur acquise d'une annuité versée en début de période est égale à la valeur acquise de la même annuité versée en fin de periode multipliée par le coéfficient (1 + t), on a alors :

$$VA = V_0 (1+t) \frac{(1+t)^n - 1}{t}$$

Et c'est exactement le résultat qu'on a trouvé.

L'expression de la valeur acquise d'une suite d'annuités toutes égales à V_0 et versées en début de périodes est une formule reliant les 4 paramètres VA (valeur acquise), V_0 (valeur de l'annuité), t (taux d'intérêt) et n (nombre d'annuités) ; elle permet donc de résoudre 4 problèmes différents : calculer l'un des paramètres connaissant les 3 autres.

Exemple 17 : Quelle est la valeur acquise de 4 placements de 13 520,00 DH, au début de chaque mois, si le taux d'intérêt annuel est de 9 % ?

Nous avons d'après l'expression de la valeur acquise de n annuités V_0 versées en début de périodes :

$$VA = V_0\ (1 + t) \frac{(1+t)^n - 1}{t}$$

Il nous faudra calculer le taux d'intérêt pour la période considérée, à savoir le mois. Quel est le taux d'intérêt mensuel t_m équivalent au taux d'intérêt annuel t_a de 9% ?

$$1 + t_a = (1 + t_m)^{12} \quad => \quad t_m = (1{,}09)^{1/12} - 1 = 0{,}72\ \%$$

$$VA = V_0(1 + t_m)\frac{(1+t_m)^n - 1}{t_m}$$

$$VA = 13\ 520 \text{ x } 1{,}0072 \text{ x } \frac{(1+0{,}0072)^4 - 1}{0{,}0072} = 55\ 060{,}47 \text{ DH}$$

Exemple 18 : Quelle doit être la valeur de 6 placements égaux effectués, au début de chaque trimestre pour avoir une valeur acquise de 18790,98 DH si le taux d'intérêt annuel est de 5% ?

Nous avons d'après l'expression de la valeur acquise de n annuités V_0 versées en fins de périodes :

$$VA = V_0(1 + t)\frac{(1+t)^n - 1}{t}$$

Il nous faudra calculer le taux d'intérêt pour la période considérée, à savoir le trimestre. Quel est le taux d'intérêt trimestriel t_t équivalent au taux d'intérêt annuel t_a de 5 % ?

$$1 + t_a = (1 + t_t)^4 \quad => \quad t_t = (1{,}05)^{1/4} - 1 = 1{,}23\ \%$$

$$VA = V_0(1 + t_t)\frac{(1+t_t)^n - 1}{t_t}$$

$$V_0 = \frac{VA}{(1+t_t)} \times \frac{t_t}{(1+t_t)^n - 1} = \frac{18790{,}98}{1{,}0123}\ \frac{0{,}0123}{(1+0{,}0123)^6 - 1} = 3\ 000{,}00 \text{ DH}$$

Exemple 19 : Combien doit-on effectuer de vesement égaux à 2 600,00 DH effectués au début de chaque semestre pour avoir une valeur acquise de 24 292,09 DH si le taux d'intérêt annuel est de 7 % ?

Nous avons d'après l'expression de la valeur acquise de n annuités V_0 versées en fins de périodes :

$$VA = V_0(1 + t)\frac{(1+t)^n - 1}{t}$$

Il nous faudra calculer le taux d'intérêt pour la période considérée, à savoir le semestre. Quel est le taux d'intérêt semestriel t_s équivalent au taux d'intérêt annuel t_a de 7% ?

$1 + t_a = (1 + t_s)^2 \quad \Rightarrow \quad t_s = (1{,}07)^{1/2} - 1 = 3{,}44\ \%$

$$VA = V_0(1 + t_s)\frac{(1+t_s)^n - 1}{t_s} \quad \Rightarrow \quad (1+t_s)^n = \frac{VA}{V_0(1+t_s)} \times t_s + 1$$

$$(1+0{,}0344)^n = \frac{24292{,}09}{2600 \times 1{,}0344} \times 0{,}0344 + 1 = 1{,}310714$$

$$n = \frac{\text{Log}1{,}310714}{\text{Log}1{,}0344} = 8 \text{ semestres}$$

Exemple 20 : A quel taux d'intérêt doit-on placer 4 versements tous égaux à 1 125,00 DH effectués au début de chaque mois afin que leur valeur acquise soit égale à 4613,63 DH ?

Nous avons d'après l'expression de la valeur acquise de n mensualités V_0 versées en fins de périodes :

$$VA = V_0(1 + t)\frac{(1+t_m)^n - 1}{t_m} \quad \Rightarrow$$

$$(1 + t_m)\frac{(1+t_m)^n - 1}{t_m} = \frac{VA}{V_0} = \frac{4\,613{,}63}{1125{,}00} = 4{,}101004$$

Remarquons que dans ce cas, il n'est pas possible de calculer t ni directement ni par une table financière ; on essaie de trouver le résultat par approximations successives.

Pour t_m = 3 % on a :

$$(1 + t_m)\frac{(1+t_m)^n - 1}{t_m} = (1 + 0{,}03)\ \frac{(1+0{,}03)^4 - 1}{0{,}03} = 4{,}309136$$

Pour t_m = 2 % on a :

$$(1 + t_m)\frac{(1+t_m)^n - 1}{t_m} = (1 + 0{,}02)\ \frac{(1+0{,}02)^4 - 1}{0{,}02} = 4{,}204040$$

Pour t_m = 1 % on a :

$$(1 + t_m)\frac{(1+t_m)^n - 1}{t_m} = (1 + 0{,}01)\ \frac{(1+0{,}01)^4 - 1}{0{,}01} = 4{,}101005$$

Le taux recherché est donc $t_m = 1$ %

Il nous faudra maintenant calculer le taux d'intérêt annuel t_a équivalent au taux d'intérêt mensuel de 1 %

$1 + t_a = (1 + t_m)^{12} = 1{,}01^{12} = 1{,}1268$ => $t_a = 12{,}68$ %

4.3.3. Détermination de la valeur acquise d'une suite de n annuités constantes à une période p postérieure à la date de la dernière annuité.

On considère le cas de n annuités constantes ; on se propose de calculer la valeur acquise, à une date postérieure à la date n du dernier versement.

4.3.3.1. Cas d'annuités versées en fin de périodes.

Considérons n annuités égales à V_0 et versées à la fin de chaque période. On peut déterminer la valeur acquise à une date postérieure de p périodes après la date n du dernier versement :

```
                 V0      V0   . . . .      V0 . . .
--------/----------/---------/-------------------/--------/      ——————►
      0          1         2   . . . .           n . . .   p
```

La valeur acquise à la période n est :

$$VA = V_0 \frac{(1+t)^n - 1}{t}$$

La valeur acquise à la date p est obtenue en capitalisant la valeur acquise VA à la date n jusqu'à la date p.

$$VA_p = VA\,(1 + t)^p$$

$$VA_p = V_0 \frac{(1+t)^n - 1}{t}(1+t)^p \qquad (7)$$

4.3.3.2. Cas d'annuités versées en début de périodes.

Pour des annuités versées en début de périodes, il est aisé de montrer que les calculs donnent :

$$Va_p = V_0 \frac{(1+t)^n - 1}{t}(1+t)^{(p+1)} \qquad (8)$$

puisqu'il suffit de multiplier le résultat par (1 + t).

Exemple 21 : Salèm décide de placer, régulièrement, à la fin de chaque mois, pendant 4 ans, la somme de 1 200,00 DH. Quelle est la valeur acquise de ses 48 placements 12 mois après le dernier versement ? Le taux de placement t est égal à 6 %.

Il nous faudra calculer le taux d'intérêt pour la période considérée, à savoir le mois. Quel est le taux d'intérêt mensuel t_m équivalent au taux d'intérêt annuel t_a de 6% ?

$1 + t_a = (1 + t_m)^{12}$ => $t_m = (1{,}06)^{1/12} - 1 = 0{,}49\ \%$

```
                 1200      1200  . . . .       1200  . . .
--------/-----------/-----------/-------------------/-----------/   ------->
        0           1           2    . . .           48   . . .   60
```

La relation de la valeur acquise d'annuités de fins de périodes donne la valeur acquise des 48 annuités au 48ème mois:

$$Va = V_0 \frac{(1+t)^n - 1}{t} = 1\,200 \text{ x } \frac{(1+0{,}0049)^{48} - 1}{0{,}0049} = 64\,759{,}67 \text{ DH}$$

La valeur acquise 12 mois après le dernier versement correspond à la capitalisation des 64 759,67 DH pendant 12 mois :

$$VA_{12} = V_0 \frac{(1+t)^n - 1}{t} (1+t)^{12} = 64\,759{,}67\,(1+0{,}0049)^{12} = 68\,671{,}86 \text{ DH}$$

4.4. ANNUITES EN PROGRESSION GEOMETRIQUE.

Dans cette partie, nous étudierons le cas particulier de versements progressifs, c'est-à-dire d'annuités qui s'établissent, selon les périodes, comme suit :

Périodes	Versements
1	V_0
2	V_0 x q
3	V_0 x q^2
. . .	. . .
k	V_0 x $q^{(k-1)}$
. .	. .
n	V_0 x $q^{(n-1)}$

4.4.1. Valeur actuelle d'annuités en progression géométrique.

Rappelons que la valeur actuelle d'une annuité est la valeur de cette annuité à la date d'aujourd'hui et que la valeur actuelle d'une série d'annuités est la somme des valeurs actuelles de toutes les annuités constituant cette série.

4.4.1.1. Annuités en progression géométrique versées en fin de périodes.

Nous utilisons le tableau ci-dessous pour expliciter l'ensemble de nos calculs :

Périodes	**Versements**	**Valeurs actuelles : V_a**
1	V_0	$V_0(1+t)^{-1}$
2	V_0 x q	V_0 x q $(1+t)^{-2}$
3	V_0 x q^2	V_0 x $q^2 (1+t)^{-3}$
. . .	. . .	. . .
k	V_0 x $q^{(k-1)}$	V_0 x $q^{(k-1)} (1+t)^{-k}$
. .		. .
n	V_0 x $q^{(n-1)}$	V_0 x $q^{(n-1)} (1+t)^{-n}$

La valeur actuelle des annuités est, par définition :

$$Va = V_0(1+t)^{-1} + V_0 \text{ x } q\,(1+t)^{-2} + V_0 \text{ x } q^2(1+t)^{-3} + \ldots + V_0 \text{ x } q^{(k-1)}\,(1+t)^{-k} + \ldots + V_0 \text{ x } q^{(n-1)}\,(1+t)^{-n}$$

On met en facteur commun $V_0\,(1+t)^{-1}$, on trouve alors :

$$Va = V_0(1+t)^{-1}\,[1+ q\,(1+t)^{-1} + q^2(1+t)^{-2} + \ldots + q^{(k-1)}\,(1+t)^{-(k-1)} + q^{(n-1)}\,(1+t)^{-(n-1)}]$$

Remarquons que l'expression entre crochets est égale à $\frac{q^n (1+t)^{-n} - 1}{q(1+t)^{-1} - 1}$ puisqu'il s'agit d'une progression géométrique de raison $q(1+t)^{-1}$:

$$\mathbf{Va = V_0\,(1+t)^{-1} \frac{q^n (1+t)^{-n} - 1}{q(1+t)^{-1} - 1}} \qquad \mathbf{(9)}$$

Exemple 22 : Said place à la fin de chaque mois et pendant 18 mois des versements mensuels en progression géométrique de raison 1,5. Le premier versement est de 100 DH. Tous les versements portent intérêts composés au taux de 6% l'an.

Quelle est la valeur actuelle de cette suite de versements ?

Il nous faudra calculer le taux d'intérêt pour la période considérée, à savoir le mois. Quel est le taux d'intérêt mensuel t_m équivalent au taux d'intérêt annuel t_a de 6% ?

$1 + t_a = (1 + t_m)^{12}$ => $t_m = (1,06)^{1/12} - 1 = 0,49$ %

Nous avons d'après l'expression de la valeur actuelle d'annuités en progression géométrique versées en fin de périodes :

$$Va = V_0\,(1+t)^{-1}\,\frac{q^n(1+t)^{-n} - 1}{q(1+t)^{-1} - 1}$$

$$Va = 100\,(1+0,0049)^{-1}\,\frac{1,5^{18}(1+0,0049)^{-18} - 1}{1,5(1+0,0049)^{-1} - 1} = 273\,160,24 \text{ DH}$$

4.4.1.2. Annuités en progression géométrique versées en début de périodes.

Nous utilisons le même tableau qu'au paragraphe précédent pour expliciter l'ensemble de nos calculs :

Périodes	Versements	Valeurs actuelles : V_a
1	V_0	V_0
2	V_0 x q	V_0 x q $(1+t)^{-1}$
3	V_0 x q^2	V_0 x q^2 $(1+t)^{-2}$
. . .	. . .	. . .
k	V_0 x $q^{(k-1)}$	V_0 x $q^{(k-1)}(1+t)^{-(k-1)}$
. .	. .	. .
n	V_0 x $q^{(n-1)}$	V_0 x $q^{(n-1)}(1+t)^{-(n-1)}$

La valeur actuelle des annuités est, par définition :

$Va = V_0 + V_0xq(1+t)^{-1} + V_0xq^2(1+t)^{-2} + \ldots + V_0xq^{(k-1)}(1+t)^{-(k-1)} + \ldots + V_0 \text{ x } q^{(n-1)}(1+t)^{-(n-1)}$

On met en facteur commun V_0, on trouve alors :

$Va = V_0\,[1 + q\,(1+t)^{-1} + q^2(1+t)^{-2} + \ldots + q^{(k-1)}(1+t)^{-(k-1)} + \ldots + q^{(n-1)}(1+t)^{-(n-1)}]$

Remarquons que l'expression entre crochets est égale à $\frac{q^{n}(1+t)^{-n}-1}{q(1+t)^{-1}-1}$ puisqu'il s'agit d'une progression géométrique de raison $q(1+t)^{-1}$:

$$\mathbf{Va = V_0 \frac{q^{n}(1+t)^{-n}-1}{q(1+t)^{-1}-1}} \qquad \mathbf{(10)}$$

Exemple 23 : Ali place au début de chaque mois et pendant 18 mois des versements mensuels en progression géométrique de raison 1,5. Le premier versement est de 100 DH. Tous les versements portent intérêts composés au taux de 6% l'an.

Quelle est la valeur actuelle de cette suite de versements ?

Il nous faudra calculer le taux d'intérêt pour la période considérée, à savoir le mois. Quel est le taux d'intérêt mensuel t_m équivalent au taux d'intérêt annuel t_a de 6% ?

$1 + t_a = (1 + t_m)^{12}$ => $t_m = (1,06)^{1/12} - 1 = 0,49$ %

Nous avons d'après l'expression de la valeur actuelle d'annuités en progression géométrique versées au début de périodes :

$$Va = V_0 \frac{q^{n}(1+t)^{-n}-1}{q(1+t)^{-1}-1}$$

$$Va = 100 \frac{1,5^{18}(1+0,0049)^{-18}-1}{1,5(1+0,0049)^{-1}-1} = 274\ 498,73 \text{ DH}$$

4.4.2. Valeur acquise d'annuités en progression géométrique.

Rappelons que la valeur acquise d'une annuité est la valeur de cette annuité à la fin de la dernière période et que la valeur acquise, à la fin de la dernière période, d'une série d'annuités est la somme des valeurs acquises, à la fin de la dernière période, de toutes les annuités constituants cette série.

4.4.2.1. Annuités en progression géométrique versées en fin de périodes.

Nous nous inspirons du principe du même tableau qu'aux deux paragraphes précédents pour expliciter l'ensemble de nos calculs :

Périodes	**Versements**	**Valeurs actuelles : VA**
1	V_0	$V_0(1+t)^{(n-1)}$
2	V_0 x q	V_0 x q $(1+t)^{(n-2)}$
3	V_0 x q^2	V_0 x $q^2(1+t)^{(n-3)}$
. . .	. . .	. . .
k	V_0 x $q^{(k-1)}$	V_0 x $q^{(k-1)}(1+t)^{(n-k)}$
. .	. .	. .
n	V_0 x $q^{(n-1)}$	V_0 x $q^{(n-1)}$

La valeur acquise des annuités est, par définition :

$$VA = V_0(1+t)^{(n-1)} + V_0xq\,(1+t)^{(n-2)} + V_0xq^2(1+t)^{(n-3)} + \ldots + V_0xq^{(k-1)}(1+t)^{(n-k)} + \ldots + V_0xq^{(n-1)}$$

On met en facteur commun $V_0(1+t)^{(n-1)}$, on trouve alors :

$$VA = V_0\,(1+t)^{(n-1)}\,[1 + q\,(1+t)^{-1} + q^2(1+t)^{-2} + \ldots + q^{(k-1)}(1+t)^{-(k-1)} + \ldots + q^{(n-1)}\,(1+t)^{-(n-1)}]$$

Remarquons que l'expression entre crochets est égale à $\frac{q^n(1+t)^{-n} - 1}{q(1+t)^{-1} - 1}$ puisqu'il s'agit d'une progression géométrique de raison $q(1+t)^{-1}$:

$$\mathbf{VA = V_0\,(1+t)^{(n-1)}\,\frac{q^n(1+t)^{-n} - 1}{q(1+t)^{-1} - 1}} \qquad \mathbf{(11)}$$

Exemple 24 : Said place à la fin de chaque mois et pendant 18 mois des versements mensuels en progression géométrique de raison 1,5. Le premier versement est de 100 DH. Tous les versements portent intérêts composés au taux de 6% l'an.

Quelle est la valeur acquise de cette suite de versements ?

Il nous faudra calculer le taux d'intérêt pour la période considérée, à savoir le mois. Quel est le taux d'intérêt mensuel t_m équivalent au taux d'intérêt annuel t_a de 6% ?

$1 + t_a = (1 + t_m)^{12}$ => $t_m = (1{,}06)^{1/12} - 1 = 0{,}49$ %

Nous avons d'après l'expression de la valeur acquise d'annuités en progression géométrique versées en fin de périodes :

$$VA = V_0\,(1+t)^{(n-1)}\ \frac{q^n(1+t)^{-n}-1}{q(1+t)^{-1}-1}$$

$$VA = 100\,(1+0{,}0049)^{17}\ \frac{1{,}5^{18}(1+0{,}0049)^{-18}-1}{1{,}5(1+0{,}0049)^{-1}-1} = 298\,283{,}16\ \text{DH}$$

4.4.2.2. Annuités en progression géométrique versées en début de périodes.

Nous utilisons le même tableau qu'au paragraphe précédent pour expliciter l'ensemble de nos calculs :

Périodes	Versements	Valeurs actuelles : VA
1	V_0	$V_0\,(1+t)^n$
2	V_0 x q	V_0 x q $(1+t)^{(n-1)}$
3	V_0 x q^2	V_0 x $q^2\,(1+t)^{(n-2)}$
. . .	. . .	. . .
k	V_0 x $q^{(k-1)}$	V_0 x $q^{(k-1)}\,(1+t)^{n-(k-1)}$
. .	. .	. .
n	V_0 x $q^{(n-1)}$	V_0 x $q^{(n-1)}\,(1+t)$

La valeur acquise des annuités est, par définition :

$$VA = V_0(1+t)^n + V_0 x q\,(1+t)^{(n-1)} + V_0 x q^2(1+t)^{(n-2)} + \ldots + V_0 x q^{(k-1)}(1+t)^{n-(k-1)} + \ldots + V_0 x q^{(n-1)}\,(1+t)$$

On met en facteur commun $V_0(1+t)^n$, on trouve alors :

$$VA = V_0\,(1+t)^n\,[1 + q\,(1+t)^{-1} + q^2(1+t)^{-2} + \ldots + q^{(k-1)}(1+t)^{-(k-1)} + \ldots + q^{(n-1)}\,(1+t)^{-(n-1)}]$$

Remarquons que l'expression entre crochets est égale à $\frac{q^n(1+t)^{-n}-1}{q(1+t)^{-1}-1}$ puisqu'il s'agit d'une progression géométrique de raison $q(1+t)^{-1}$:

$$\mathbf{VA = V_0\,(1+t)^n\ \frac{q^n(1+t)^{-n}-1}{q(1+t)^{-1}-1}} \qquad \mathbf{(12)}$$

Exemple 25 : Ali place au début de chaque mois et pendant 18 mois des versements mensuels en progression géométrique de raison 1,5. Le premier versement est de 100 DH. Tous les versements portent intérêts composés au taux de 6% l'an.

Quelle est la valeur acquise de cette suite de versements ?

Il nous faudra calculer le taux d'intérêt pour la période considérée, à savoir le mois. Quel est le taux d'intérêt mensuel t_m équivalent au taux d'intérêt annuel t_a de 6% ?

$1 + t_a = (1 + t_m)^{12}$ => $t_m = (1{,}06)^{1/12} - 1 = 0{,}49\ \%$

Nous avons d'après l'expression de la valeur acquise d'annuités en progression géométrique versées en fin de périodes :

$$VA = V_0\,(1+t)^n\,\frac{q^n(1+t)^{-n}-1}{q(1+t)^{-1}-1}$$

$$VA = 100\,(1+0{,}0049)^{18}\,\frac{1{,}5^{18}(1+0{,}0049)^{-18}-1}{1{,}5(1+0{,}0049)^{-1}-1} = 299\ 744{,}74\ DH$$

4.5. ANNUITES QUELCONQUES.

Dans cette partie, nous nous proposons d'étudier le cas général d'annuités non constantes versées indifféremment en fin et/ou en début de périodes. Pour ce faire, nous appliquerons purement et simplement les définitions de la valeur actuelle et celle de la valeur acquise et nous exécuterons l'intégralité des calculs selon des tableaux synthétiques.

Remarquons que cette partie, si elle ne présente pas beaucoup d'intérêts quant à sa vraisemblance, présente un grand intérêt pédagogique du fait qu'elle utilise la méthode que nous avons utilisé, tout le temps jusqu'à maintenant et qu'elle montre donc l'intérêt de cette méthode.

Cette partie sera donc traitée sur la base d'exemples numériques puisqu'il n'est pas question de chercher à établir des expressions mathématiques pour des cas généraux.

4.5.1. Valeur actuelle d'annuités non constantes.

Exemple 26 : Quelle est la valeur actuelle de l'épargne que compte faire Jamal s'il met, chaque trimestre, des sommes d'argent, selon le tableau ci-dessous, en supposant que cette épargne produit des intérêts composés de 7% l'an.

Périodes	Versements / périodes	
	Au début	A la fin
1	1 200,00	
2		1 500,00
3		1 300,00
4		1 100,00
5	2 100,00	
6	1 950,00	
7		1 450,00
8	1 750,00	

Pour calculer la valeur actuelle de cette série de versements, il nous suffit de reprendre le tableau ci-dessus et de faire les calculs en appliquant la définition de la valeur actuelle :

Périodes	Versements / périodes		Valeur actuelle V_a
	Au début	A la fin	
1	1 200,00		1 200,00
2		1 500,00	1 500,00 $(1+t)^{-2}$
3		1 300,00	1 300,00 $(1+t)^{-3}$
4		1 100,00	1 100,00 $(1+t)^{-4}$
5	2 100,00		2 100,00 $(1+t)^{-4}$
6	1 950,00		1 950,00 $(1+t)^{-5}$
7		1 450,00	1 450,00 $(1+t)^{-7}$
8	1 750,00		1 750,00 $(1+t)^{-7}$

V_a = 1 200,00 + 1 500,00 $(1+t)^{-2}$ + 1 300,00 $(1+t)^{-3}$ + 1 100,00 $(1+t)^{-4}$ + 2 100,00 $(1+t)^{-4}$ + 1 950,00 $(1+t)^{-5}$ + 1 450,00 $(1+t)^{-7}$ + 1 750,00 $(1+t)^{-7}$

Il nous faudra calculer le taux d'intérêt pour la période considérée, à savoir le trimestre. Quel est le taux d'intérêt trimestriel t_t équivalent au taux d'intérêt annuel t_a de 7% ?

$1 + t_a = (1 + t_t)^{12}$ => $t_t = (1{,}07)^{1/4} - 1 = 1{,}71\ \%$

V_a = 1 200,00 + 1 500,00 $(1{,}0171)^{-2}$ + 1 300,00 $(1{,}0171)^{-3}$ + 1 100,00 $(1{,}0171)^{-4}$ + 2 100,00 $(1{,}0171)^{-4}$ + 1 950,00 $(1{,}0171)^{-5}$ + 1 450,00 $(1{,}0171)^{-7}$ + 1 750,00 $(1{,}0171)^{-7}$

V_a = 11 509,05 DH

4.5.2. Valeur acquise d'annuités non constantes.

Exemple 27 : Quelle est la valeur acquise de l'épargne que compte faire Jamal s'il met, chaque trimestre, des sommes d'argent, selon le tableau ci-dessous, en supposant que cette épargne produit des intérêts composés de 7% l'an.

Périodes	**Versements / périodes**	
	Au début	**A la fin**
1	1 200,00	
2		1 500,00
3		1 300,00
4		1 100,00
5	2 100,00	
6	1 950,00	
7		1 450,00
8	1 750,00	

Pour calculer la valeur acquise de cette série de versements, il nous suffit de reprendre le tableau ci-dessus et de faire les calculs en appliquant la définition de la valeur acquise :

Périodes	**Versements / périodes**		**Valeur acquise VA**
	Au début	**A la fin**	
1	1 200,00		$1\,200{,}00\ (1+t)^8$
2		1 500,00	$1\,500{,}00\ (1+t)^6$
3		1 300,00	$1\,300{,}00\ (1+t)^5$
4		1 100,00	$1\,100{,}00\ (1+t)^4$
5	2 100,00		$2\,100{,}00\ (1+t)^4$
6	1 950,00		$1\,950{,}00\ (1+t)^3$
7		1 450,00	$1\,450{,}00\ (1+t)$
8	1 750,00		$1\,750{,}00\ (1+t)$

$VA = 1\,200{,}00\ (1+t)^8 + 1\,500{,}00\ (1+t)^6 + 1\,300{,}00\ (1+t)^5 + 1\,100{,}00\ (1+t)^4 + 2\,100{,}00\ (1+t)^4 + 1\,950{,}00\ (1+t)^3 + 1\,450{,}00\ (1+t) + 1\,750{,}00\ (1+t)$

Il nous faudra calculer le taux d'intérêt pour la période considérée, à savoir le trimestre. Quel est le taux d'intérêt trimestriel t_t équivalent au taux d'intérêt annuel t_a de 7% ?

$1 + t_a = (1 + t_t)^{12} \quad \Rightarrow \quad t_t = (1{,}07)^{1/4} - 1 = 1{,}71\ \%$

$VA = 1\,200{,}00\ (1+0{,}0171)^8 + 1\,500{,}00\ (1+0{,}0171)^6 + 1\,300{,}00\ (1+0{,}0171)^5 + 1\,100{,}00\ (1+0{,}0171)^4 + 2\,100{,}00\ (1+0{,}0171)^4 + 1\,950{,}00\ (1+0{,}0171)^3 + 1\,450{,}00\ (1+0{,}0171) + 1\,750{,}00\ (1+0{,}0171)$

$VA = 13\,181{,}01$ DH

4.6. EXERCICES D'APPLICATION.

4.6.1. Exercice.

a) Calculer la valeur actuelle d'une suite d'annuités constantes toutes égales à 1 200,00 DH versée à la fin de chacune des 9 prochaines années, au taux d'intérêt annuel de 9 % ;

b) Calculer le taux d'intérêt pour qu'une somme de 3 600,00 DH versée à la fin de chaque année, durant les 7 années ait une valeur actuelle de 21 420,49 DH ;

c) Déterminer le nombre d'annuités toutes égales à 2 500,00 DH, versées à la fin de chaque année, au taux annuel d'intérêt de 9,25 % afin que la valeur actuelle de l'ensemble soit de 9 661,38 DH ;

d) Calculer le montant de chacune des 6 annuités constantes, versées à la fin de chacune des 6 prochaines années au taux d'intérêt annuel de 7 % pour que la valeur actuelle soit égale à 5 719,85 DH ;

Réponse : a) 7 194,30 DH ; b) 4,23 % ; c) 5 ; d) 1 200,00 DH ;

4.6.2. Exercice.

a) Calculer la valeur acquise d'une suite de 4 annuités de 10 000,00 DH versées à la fin de chaque année, pendant 4 années, sachant que le taux d'intérêt composé est de 11% ;

b) Calculer le taux d'intérêt d'une suite de 8 annuités toutes égales à 4 500,00 DH versées au début de chaque année pour que la valeur acquise soit de 44 140,89 DH ;

c) Calculer la valeur acquise d'une somme de 100 DH, versée à la fin de chaque mois durant les 9 prochaines années au taux annuel de 9,38 % ?

d) Calculer la valeur acquise d'une somme de 1 200 DH, versée au début de chacune des 9 prochaines années au taux de 9 %?

Réponse : a) 47 097,24 DH ; b) 5,75% ; c) 16547,79 DH ; d) 17 031,52 DH

4.6.3. Exercice.

Calculer la valeur actuelle :

a) D'une somme de 1500 DH, versée à la fin de chacune des 6 prochaines années à un taux d'intérêt annuel de 11 % ;

b) D'une somme de 500 DH, versée au début de chaque mois durant les 20 prochaines années à un taux d'intérêt mensuel de 1 % ;

c) D'une dette dont le remboursement devrait normalement s'effectuer à raison de 40 DH à la fin de chacun des 30 prochains mois si le taux d'intérêt mensuel est de 0,75 % ;

d) D'une dette qui doit être payée d'abord en 5 versements annuels de 1 000,00 DH, puis en 5 autres versements annuels de 2 000,00 DH, si le taux d'intérêt annuel est de 12 % (Versements effectués en fin d'année).

Réponse : a) 6 345,81 DH ; b) 45 863,81 DH ; c) 1 071,00 DH ; d) 7 695,67 DH.

4.6.4. Exercice.

Déterminer l'échéance moyenne d'une suite de 30 annuités constantes de 10 000 dirhams chacune au taux d'intérêt de 10,5 %.

Réponse : 16 annuités

4.6.5. Exercice.

a) Quelle somme doit-on placer à la fin de chaque mois durant 10 ans pour que l'on puisse par la suite recevoir 200,00 DH au début de chaque mois durant les 5 prochaines années au taux réel de 6 % ?

b) Une somme de 20 000,00 DH a été placée à 6 % dans une société où la capitalisation est annuelle. Combien de retraits de 1 000,00 DH sera-t-il possible d'effectuer à la fin de chaque année ?

c) Une personne âgée de 30 ans a placé un capital de 20 000,00 DH à 7 % (capitalisation annuelle). À partir de 50 ans, elle retire 1 000,00 DH à la fin de chaque année. Que laissera cette personne à ses héritiers si elle meurt à 60 ans, après avoir effectué son retrait ?

d) Déterminer l'échéance moyenne d'une suite de 30 annuités constantes de 10 000,00 dirhams chacune au taux d'intérêt annuel de 10,5 %.

Réponse : a) 63,44 DH ; b) Les ret0 its pourront se faire à perpétuité tant qu'ils seront de 1 000,00 DH ; c) 138 428,65 DH ; d) 12 ans.

4.6.6. Exercice.

Une suite de 12 annuités est constituée de 4 annuités de 1 000,00 DH chacune, 4 annuités de 2000,00 DH chacune, et 4 annuités de 3 000,00 DH chacune. Calculer la valeur acquise et la valeur actuelle des 12 annuités au taux d'intérêt annuel de 12 %.

Réponse : valeur acquise = 41 212,15 DH et valeur actuelle = 10 578,13 DH

4.6.7. Exercice.

a) Dix annuités constantes de 30 000,00 DH chacune ont une valeur actuelle égale à la somme de 192 529,73 DH. Calculer le taux d'intérêt annuel ;

b) La valeur actuelle de n annuités constantes, de 30 000,00 DH chacune, est égale à la somme de 180 000,00 DH. Sachant que le taux est de 9,75%, déterminer le nombre d'annuités ;

c) Une suite de 15 annuités constantes, capitalisées au taux de 10 % a une valeur acquise, 1 an après la dernière annuité, de 209 698,38 DH. Calculer le montant de l'annuité ;

d) Quelle traite mensuelle faut-il verser à la fin de chaque mois, pendant 10 ans, pour rembourser un emprunt de 200 000,00 DH au taux d'intérêt annuel de 13 % ?

Réponse : a) 9 % ; b) 9 annuités constantes de 30 000,00 DH chacune et une dixième annuité d'un montant égal à 13 942,12 DH ; c) 6 000,00 DH ; d) 2981,50 DH.

4.6.8. Exercice.

Une personne âgée de 30 ans a placé un capital de 20 000 DH à 7 % (capitalisation annuelle). À partir de 50 ans, elle retire 1 000 DH à la fin de chaque année. Que laissera-t-elle à ses héritiers si elle meurt à 60 ans, après avoir effectué son retrait?

Réponse : 138 428,65

4.6.9. Exercice.

Quelle somme doit-on placer à la fin de chaque mois durant 10 ans pour que l'on puisse par la suite recevoir 2000 DH au début de chaque mois durant 5 années au taux annuel de 6%?

Réponse : 631,26 DH

4.6.10. Exercice.

Une personne verse, tous les six mois, des sommes toutes égales à 5 000,00 DH et ce du 01/01/90 au 01/07/98. La capitalisation des intérêts étant semestrielle, calculer le montant du capital constitué aux dates suivantes :

a) 01/01/1999 ; b) 01/07/2000 ; c) 01/01/2002
On suppose que le taux d'actualisation égal à 9 %.

Réponse : a) 129275,41 DH ; b) 147524,72 DH ; c) 168350,21 DH

4.6.11. Exercice.

a) Quel emprunt peut-on obtenir au taux annuel de 6,5 % si on a la possibilité de rembourser, sous forme de mensualités constantes, 3 500 DH par mois pendant 12 ans ?
b) Combien faut-il payer par mois pour rembourser un emprunt de 400 000 DH sur 15 ans au taux annuel de 5,75 % ?
c) Pendant combien de temps peut-on rembourser un emprunt de 500 000 DH si on effectue des versements mensuels de 5551,02 DH et si le taux d'intérêt annuel est de 6%.
d) Pour rembourser un emprunt de 200 000 DH sur 5 ans, la banque a demandé un versement de 4479,27 DH par mois. Quel est le taux d'intérêt annuel appliqué par la banque ?

Réponse : a) 285 609,02 DH ; b) 3 321,64 DH ; c) 120 mois ; d) 12,3 %

4.6.12. Exercice.

Un emprunt de 200000 DH est remboursable en une seule fois à la fin de la cinquième année au taux de 13%. L'emprunteur effectue en même temps et à partir de la fin de la première année, le placement de cinq annuités constantes pour préparer le remboursement de l'emprunt. Le taux de placement est de 7 %. Quel doit être le montant de l'annuité pour pouvoir rembourser l'emprunt ?

Réponse : 64 076,47 DH

4.6.13. Exercice.

Une banque propose une formule d'épargne retraite à un taux de rémunération de 8% l'an. Compléter le tableau de simulation suivant :

Age à l'adhésion	Cotisation mensuelle	Capital constitué à 60 ans
30 ans	200,00 DH	
40 ans	300,00 DH	
50 ans	500,00 DH	

Réponses : 300 503,50 DH ; 177 587,08 DH et 91 677,42 DH.

4.6.14. Exercice.

Le crédit immobilier et hôtelier CIH, accorde des crédits pour l'acquisition ou la construction de logements. La mensualité de remboursement ne peut pas dépasser 40% du revenu mensuel du ménage. La durée maximale du prêt est de 20 ans.

Sachant que le taux d'intérêt annuel est de 11,5 %, quel est le capital maximum que peut emprunter un ménage dont le revenu est de 8 000,00 DH par mois ?

Réponse : 299 679,33 DH

4.6.15. Exercice.

Pour acquérir un logement, une personne a emprunté la somme de 400 000,00 DH qu'elle va rembourser en 15 ans sous formes de mensualités constantes. Le taux d'intérêt annuel est de 11,5%.

Sachant que cette personne a bénéficié d'une période de différé de six mois, calculer le montant de la mensualité constante.

Réponse : 4 906,74 DH.

Note de lecture 4

FORMULES DES ANNUITES

Dans cette note de lecture, il est seulement rappelé que toutes les formules donnant les valeurs acquises et actuelles d'une suite d'annuités se déduisent d'une seule et même formule(1), à savoir :

La valeur actuelle d'une suite d'annuités versées en fins périodes est :

$$V_{af} = V_a \frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$$

On a vu que pour établir la formule donnant la valeur acquise V_{At} *d'une série d'annuités versées en fin de périodes, il suffit de multiplier* V_{af} *par le coefficient d'actualisation* $(1+t)^n$*, ce qui donne :*

$$V_{Af} = V_a (1+t)^n = V_{af} \frac{(1+t)^n - 1}{t}$$

De même, pour passer de la formule donnant la valeur V_{af} *(respectivement la valeur acquise* V_{Af}*) d'une suite d'annuités versées en fin de période à la valeur actuelle* V_{ad} *(respectivement la valeur acquise* V_{Ad}*) d'une suite d'annuités versée en début de période, il suffit de multiplier* V_{af} *(respectivement par* V_{ad}*) par les coefficient d'actualisation* $(1+t)$.

En effet :

$$V_{ad} = V_{af}(1+t) = V_0(1+t)\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$$

$$V_{Ad} = V_{Af}(1+t) = V_0(1+t)\frac{(1+t)^n - 1}{t}$$

Tout ce chapitre sur les annuités, se résume donc en la seule formule (1) laquelle est établie à partir de la formule générale des intérêts composés, à savoir $C_n = C_0(1+t)^n$.

PARTIE 3

MATHEAMTIQUES FINANCIERES APPROFONDIES

Les mathématiques financières approfondies sont à moyens et longs termes, elles se déduisent donc des deux seules formules.

La formule générale des intérêts composés :

$$C_n = C\,(1+t)^n$$

La formule générale des annuités :

$$V_a = V_0\,\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$$

CHAPITRE 5
L'EMPRUNT INDIVIS

5.1. DEFINITION DES EMPRUNTS INDIVIS.

Un emprunt est dit indivis lorsque la totalité du capital emprunté est contractée auprès d'un seul prêteur.

L'emprunteur du capital s'engage à s'acquitter de sa dette (capital et intérêt) de telle sorte que les sommes versées pour le remboursement soient équivalentes au capital emprunté augmenté des intérêts dus.

Le remboursement d'un emprunt est donc composé de deux parties :

- L'amortissement qui est la somme destinée à rendre au prêteur le capital emprunté ;
- L'intérêt qui est la somme destinée à rémunérer le prêteur pour assurer le service de la dette.

Un emprunt peut être remboursé en une seule fois ou en plusieurs fois sous forme de plusieurs annuités.

5.2. REMBOURSEMENT EN UNE SEULE FOIS.

On considère un capital qui est emprunté, pour n périodes, à un taux d'intérêt t. L'emprunteur s'engage à rembourser le capital C, en un seul versement égal à C, à la fin de la nième période, mais entre temps, l'emprunteur peut acquitter les intérêts dus de deux manières :

- soit payer, à la fin de la date d'échéance, la totalité des intérêts dus.
- soit payer, à la fin de chaque période, l'intérêt dû ;

5.2.2. Remboursement des intérêts à l'échéance du prêt.

Dans ce cas, l'emprunteur doit payer, à la date d'échéance du prêt, le montant du capital emprunté C augmenté des intérêts composés :

Exemple 1 : Un particulier a emprunté une somme de 500 000,00 DH au taux d'intérêt de 10%, il s'engage à la rembourser, en une seule fois, intérêts compris, à la fin de la 10è année.

Le capital emprunté : $C = 500\ 000,00$ DH
Le taux d'intérêt : $t = 0,1$
La durée de l'emprunt : $n = 10$ ans

A la fin de la 10è année, l’emprunteur paiera le capital emprunté C augmenté des intérêts I :

$C_{10} = C + I = C\,(1 + t)^{10} = 500\ 000,00 \text{ x } 2,593746 = 1\ 296\ 871,23$ DH

D’une façon générale, si l’emprunteur ne paie les intérêts qu’à l’échéance du prêt, il devra payer, en tout :

$$C_n = C + I = C\,(1 + t)^n$$

Nous avons longuement étudié ce cas dans le chapitre 3, relatif aux intérêts composés.

5.2.3. Remboursement annuel des intérêts.

Dans ce cas, l'emprunteur doit verser, à la fin de chaque période, l'intérêt de la période qui est égal à C t.

Exemple 2 : Reprenons les données de l’exemple 1 est supposons, cette fois-ci, que l’emprunteur paie, à la fin de chaque période, les intérêts dus pour cette période, à savoir :

$$I = C \times t = 500\ 000,00 \times 0,1 = 50\ 000,00 \text{ DH}$$

On peut vérifier qu'à n'importe quelle date, avant la dixième année, la dette restante est toujours égale à la totalité du capital emprunté.

La dette restante est la différence entre la valeur acquise du capital emprunté et la valeur acquise de l'ensemble des versements.

Par exemple à la fin de la troisième année :

La valeur acquise du capital emprunté, à la fin de la 3è année, est égale :

$V_{a3} = C \times (1 + t)^3 = 500\ 000,00 \times 1,1^3 = 665\ 500,00$ DH

La valeur acquise des trois versements, à la fin de la 3è année, est égale :

$$V'_{a3} = 50\,000{,}00\,(1 + t)^2 + 50\,000{,}00\,(1 + t) + 50\,000{,}00 = 50000{,}00\frac{(1+t)^3 - 1}{t}$$

$$= 50\,000{,}00\frac{(1{,}1^3 - 1)}{0{,}1} = 165\,500{,}00 \text{ DH}$$

Dette restante = $V_{a3} - V'_{a3}$ = 665 500,00 – 165 500,00 = 500 000,00 DH

Par exemple à la fin de la huitième année :

La valeur acquise du capital emprunté, à la fin de la 8è année, est égale :

$V_{a8} = C\times(1 + t)^8 = 500\,000{,}00 \times 1{,}1^8 = 1\,071\,794{,}405$ DH

La valeur acquise des huit versements, à la fin de la 8è année, est égale :

$$V'_{a8} = 50\,000{,}0 \times \frac{1{,}1^8 - 1}{0{,}1} = 571794{,}405 \text{ DH}$$

Dette restante = $V_{a8} - V'_{a8}$ = 1 071 794,405 – 571 794,405 = 500 000,00 DH

Le tableau d’amortissement :

Dans le cas d’un remboursement intégral, à la fin de la période du prêt, avec paiement annuel des intérêts, le tableau d’amortissement du prêt peut être facilement dressé :

Périodes	Capital dû en début de période	Intérêt de la période	Capital restant dû	Annuité à payer
1	C	C x t	C	C x t
2	C	C x t	C	C x t
3	C	C x t	C	C x t
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
k	C	C x t	C	C x t
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
n	C	C x t	C	C + C x t

***Remarque 1** : On pourrait s'intéresser au montant total S des sommes payées par l'emprunteur et déclarer qu'il s'élève, à première vue, à :*

$$S = C + n\,C\,t$$

Mais c'est là un résultat qui n'a, financièrement parlant, aucun sens du fait qu'on a additionnée des valeurs payées à des dates différentes. Il faudrait plutôt parler de la valeur acquise des sommes payées pendant les n années que dure le prêt, celle-ci est égale à :

$S = C + C\,t \times [(1+t)^{n-1} + (1+t)^{n-2} + \ldots (1+t)^2 + (1+t) + 1]$

Or : $(1+t)^{n-1} + (1+t)^{n-2} + \ldots (1+t)^2 + (1+t) + 1 = \dfrac{(1+t)^n - 1}{t}$

On trouve que $S = C + C \times t \times \dfrac{(1+t)^n - 1}{t} = C\,(1+t)^n$

Ainsi tout se passe comme si l'emprunteur avait payé les intérêts à la date d'échéance du prêt.

C'est là, un résultat général très important que nous allons essayer d'étayer, tout au long de ce chapitre.

Il est la conséquence simple et évidente que l'ensemble des annuités qui servent à rembourser un capital emprunté doit représenter un capital équivalent au capital emprunté.

En effet, nous allons montrer que quel que soit le mode de remboursement de l'emprunt d'un capital C :

- *la somme des valeurs acquises de l'ensemble des annuités est égale à la valeur acquise du capital prêté, c'est-à-dire :* $C(1+t)^n$ *;*

Ou ce qui revient au même que :

- *la somme des valeurs actuelles de l'ensemble des annuités est égale à la valeur actuelle du capital prêté, c'est-à-dire : C.*

Dans certains cas, comme nous le verrons, au paragraphe suivant, nous prendrons carrément cette assertion pour hypothèse.

5.3. REMBOURSEMENT EN PLUSIEURS ANNUITES.

Considérons le capital C emprunté pour n périodes à un taux d'intérêt t. L'emprunteur s'engage à rembourser le capital emprunté (capital et intérêt) sous forme de n annuités : a_1, a_2, ……., a_n de telle sorte que la dernière annuité a_n mette fin à la dette.

Le tableau d'amortissement d'un tel emprunt, dans ce cas est le suivant :

Périodes	**Capital dû en début de période**	**Anuités payées**	**Part de l'amortissement**	**Part des intérêts**
1	C	$a_1 = m_1 + I_1$	m_1	I_1
2	$C - m_1$	$a_2 = m_2 + I_2$	m_2	I_2
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
k	$C - (m_1 + m_2 + \ldots + m_{k-1})$	$a_k = m_k + I_k$	m_k	I_k
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
n	$C - (m_1 + m_2 + \ldots + m_k + \ldots + m_{n-1})$	$a_n = m_n + I_n$	m_n	I_n

Le remboursement en plusieurs annuités peut se faire de deux façons :

- Remboursement par annuités constantes : $a_k = a$ et ce $\forall\ k = 1$ à n ;
- Remboursement par amortissements constants : $m_k = m$ et ce $\forall\ k = 1$ à n .

La construction du tableau d'amortissement d'un capital C prêté, pendant n périodes, au taux d'intérêt t, se fait en respectant les conditions suivantes :

- Calculer l'intérêt que verse l'emprunteur, à la fin de chaque période, à la kième période, par exemple et au titre de cette période, cet intérêt est égal à :

$$I_k = [\ C - (a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1})\ ] \text{ x } t\ ;$$

- Décider du mode de remboursement :
  * Remboursement par annuités constantes : $a_k = a$;
  * Remboursement par amortissements constants : $m_k = m$;

- Vérifier l'égalité de l'équivalence des capitaux, le capital prêté et l'ensemble des annuités en écrivant :

* Soit que la valeur acquise par le capital prêté qui s'élève, après n période, à $C\times(1+t)^n$, est égale à la valeur acquise par les n annuités à la fin de la $n^{\text{ème}}$ période, c'est-à-dire :

$$a_1(1+t)^{n-1} + a_2(1+t)^{n-2} + ... + a_k(1+t)^{n-k} + ... + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k(1+t)^{n-k}$$

$$C\times(1+t)^n = \sum_{k=1}^{n} a_k \times (1+t)^{n-k}$$

* Soit que la valeur actuelle de ce capital qui est C, est égale à la valeur actuelle des n annuités, c'est-à-dire :

$$a_1(1+t)^{-1} + a_2(1+t)^{-2} + ... + a_k(1+t)^{-k} + ... + a_n(1+t)^{-n} = \sum_{k=1}^{n} a_k(1+t)^{-k}$$

$$C = \sum_{k=1}^{n} a_k \times (1+t)^{-k}$$

5.3.1. Remboursements par annuités constantes.

Dans le cas des annuités constantes, l'équation d'équivalence, entre valeurs acquises, devient :

$$C\times(1+t)^n = \sum_{k=1}^{n} a\times(1+t)^{n-k} = a\times\sum_{k=1}^{n}(1+t)^{n-k} \qquad \Rightarrow \qquad C = a\times\sum_{k=1}^{n}(1+t)^{-k}$$

Or on sait que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(1+t)^{-k} = \frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$

Ce qui donne les deux relations :

$$C = a\times\frac{1-(1+t)^{-n}}{t} \qquad \text{et} \qquad a = C\frac{t}{1-(1+t)^{-n}}$$

La première relation donne la valeur du capital C qu'on peut emprunter, au taux d'intérêt t, pendant n périodes, si l'on s'engage à rembourser le prêt en versant n annuités constantes égales à a.

La deuxième relation donne la valeur de l'annuité a qu'on doit payer, à la fin de chaque période, pendant les n périodes si l'on a emprunté un capital C, au taux d'intérêt t, pour n périodes.

Ces résultats qu'on vient de trouver sont exactement ceux qu'on a déjà trouvés, dans le chapitre précédent, relatif aux annuités. En effet, concernant la première relation, par exemple, on a bien trouvé, dans le chapitre précédent, que la valeur actuelle de n annuités toutes égales à a, versées en fin de périodes est égale à : $a \times \frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$, or cette valeur actuelle doit justement être égale au capital C emprunté.

Observons que nous avons utilisé, dans cette remarque, la valeur actuelle alors que nous avons utilisé la valeur acquise, pour notre démonstration ; mais nous savons que dire que C est la valeur actuelle du capital emprunté revient au même que dire que $C(1 + t)^n$ est sa valeur acquise.

Les 2 relations précédentes sont des relations qui lient les 4 paramètres : le capital C, l'annuité a, le taux d'intérêt t et le nombre d'annuités ou la durée du prêt n ; elles permettent donc de déterminer l'un de ces 4 paramètres si l'on connaît les 3 autres.

Les tables financières 4 et 5, jointes en annexe, donnent respectivement les valeurs de C et de a pour les différentes valeurs de t et de n.

Exemple 3 : Pour acquérir un logement, un particulier a demandé à sa banque un emprunt de 300 000,00 DH à rembourser en 10 ans sous forme de mensualités constantes. Le taux d'intérêt est fixé à 13% l'an.

Quelle est la mensualité constante nécessaire pour rembourser cet emprunt ?

Le capital emprunté : C = 300 000,00 DH ;
La durée du prêt : n = 10 ans = 120 mois ;
Taux d'intérêt annuel : t_a = 13%.

Le taux d'intérêt annuel doit être transformé en un taux mensuel, pour cela on calcule le taux équivalent :

$1 + t_a = (1 + t_m)^{12}$ => $t_m = (1 + 0{,}13)^{1/12} - 1 = 0{,}010237$

La mensualité constante de remboursement est :

$$a = C \times \frac{t_m}{1-(1+t_m)^{-n}} = 300\,000{,}00 \times \frac{0{,}010237}{1-1{,}010237^{-120}} = 4\,353{,}59 \text{ DH}$$

Remarquons que pour n = 120, nous n'avons pas pu utiliser les tables financières, nous avons dû recquirir à l'utilisation de la fonction x^y des calculatrices électroniques ou des calculatrices existant dans les micro-ordinateurs.

Exemple 3 : Pour rembourser un emprunt, un particulier peut verser, pendant 4 ans et à la fin de chaque mois une somme constante égale à 3 000,00 DH, Quel capital peut-il emprunter si le taux d'intérêt est de 12 % ?

La durée du prêt : n = 4 ans = 48 mois ;
La mensualité constante : a = 3 000,00 DH ;
Taux d'intrêt annuel : t_a = 12%.

Le taux d'intérêt mensuel équivalent au taux d'intérêt annuel de 12% est, d'après la table financière T.6 :

$$1 + t_a = (1 + t_m)^{12} \quad \Rightarrow \quad t_m = (1 + 0,12)^{1/12} - 1 = 0,00949$$

On peut résoudre un tel exercice, soit en utilisant la fonction x^y soit en utilisant les tables financières.

Utilisation de la fonction x^y :

Le capital emprunté est, après calculs sur calculatrices électroniques ou calculatrices existant dans les micro-ordinateurs :

$$C = a \times \frac{1-(1+t)^{-n}}{t} = 3000,00 \times \frac{1 - 1,00949^{-48}}{0,00949} = 115\,232,37 \text{ DH}$$

Utilisation des tables financières :

Remarquons que pour n = 48, nous pouvons utiliser les tables financières, en effet, on a d'après la table finnacière T.4 :

Pour n = 48 et t_m = 0,009 $\quad \frac{1-(1+t)^{-n}}{t} = 38,837208$

Pour n = 48 et t_m = 0,010 $\quad \frac{1-(1+t)^{-n}}{t} = 37,973959$

Par simple interpolation, on trouve que pour n + 48 et t_m = 0,00949.

0,09%-----------------------------t_m = 0,00949 ---------------------0,10%

38,837208----------------------------------- ? --------------------------37,973959

$$\frac{0{,}00949-0{,}009}{0{,}010-0{,}009}=\frac{a-38{,}837208}{37{,}973959-38{,}837208}$$

$$a=38{,}837208-\frac{0{,}00949-0{,}009}{0{,}010-0{,}009}\times(38{,}837208-37{,}973959)=38{,}414216$$

C = 3 000,00 x 38,414216 = 115 242,65 DH.

Le résultat trouvé avec les tables financières ne diffère que de 0,01% par rapport au résultat calculé grâce à une calculatrice de micro-ordinateur.

Exemple 4 : Sur quelle durée peut-on rembourser un emprunt de 250 000,00 DH au taux d'intérêt annuel de 12% si le remboursement s'effectue sous forme de mensualités constantes de 3 000,42 DH ?

Le capital emprunté : C = 250 000,00 DH ;
La mensualité constante : a = 3000,42 DH ;
Taux d'intérêt annuel : t_a = 12%.

Nous pouvons, dans ce cas, prendre comme taux d'intérêt mensuel, le taux d'intérêt mensuel proportionnel correspondant au taux d'intérêt annuel de 12%, soit : $t_m=\frac{12}{12}=1\%$

La durée du prêt est n tel que :

$$C=a\times\frac{1-(1+t_m)^{-n}}{t_m} \quad => \quad \frac{C}{a}\times t_m=1-(1+t_m)^{-n}$$

$$(1+t_m)^{-n}=1-\frac{C}{a}\times t_m \quad => \quad -n\times\log(1+t_m)=\log(1-\frac{C}{a}\times t_m)$$

$$n=-\frac{\mathrm{Log}(1-\frac{C}{a}t_m)}{\mathrm{Log}(1+t_m)}=-\frac{\mathrm{Log}(1-\frac{250\,000{,}00}{3\,000{,}42}\times 0{,}01)}{\mathrm{Log}(1{,}01)}=180\ \textit{mois}\ =\ \textit{15 ans}$$

Si l'on avait utilisé le taux d'intérêt mensuel équivalent au taux d'intérêt annuel 10%, c'est-à-dire : 0,007074 on aurait trouvé comme durée du prêt :

$$n = -\frac{\mathrm{Log}(1-\frac{C}{a}t_m)}{\mathrm{Log}(1+t_m)} = -\frac{\mathrm{Log}(1-\frac{250\,000,00}{3\,000,42}\times 0,00949)}{\mathrm{Log}(1,00949)} = 165,5959 \text{ mois}$$

$$= 13 \text{ ans } 9 \text{ mois et } 17 \text{ jours}$$

Ce qui est très différent du résultat précédemment trouvé avec un taux d'intérêt proportionnel.

Exemple 5 : Un particulier a remboursé un emprunt de 800 000,00 DH en 10 annuités constantes de 103 603,66 DH chacune. Quel taux d'intérêt a été appliqué à cet emprunt ?

Le capital emprunté : C = 800 000,00 DH ;
La durée de prêt : n = 10 ans ;
L'annuité constante : a = 103 603,66 DH.

Le taux d'intérêt est t tel que :

$$C = a\times\frac{1-(1+t)^{-n}}{t} \quad => \quad \frac{1-(1+t)^{-n}}{t} = \frac{C}{a} = \frac{800\,000,00}{103\,603,66} = 7,721735$$

En consultant la table financière numéro 4 on peut trouver : t = 5 %

Exemple 6 : Un capital de 100 000,00 DH a été emprunté au taux d'intérêt de 10 % l'an. Le remboursement s'effectue sous forme de 5 annuités constantes ; dresser le tableau d'amortissement de cet emprunt.

Le capital emprunté : C = 100 000,00 DH ;
La durée de prêt : n = 5 ans ;
Taux d'intérêt annuel : t_a = 10%.

Comme l'annuité est constante, on a :

$$a = C\times\frac{t}{1-(1+t)^{-n}} = 100\,000,00\times\frac{0,1}{1-(1+0,1)^{-5}} = 26\,379,75 \text{ DH}$$

Le tableau d'amortissement de cet emprunt est :

Période	**Dette au début De période**	**Intérêt de la Période**	**Annuité versée en fin de la période**	**Amortissement de la période**
k	$\mathbf{D_k}$	$\mathbf{I_k}$	$\mathbf{a_k = a}$	$\mathbf{m_k}$
1	100 000,00	10 000,00	26 379,75	16 379,75
2	83 620,25	8 362,03	26 379,75	18 017,73
3	65 062,53	6 560,25	26 379,75	19 819,50
4	45 783,03	4 578,30	26 379,75	21 801,45
5	23 981,58	2 398,16	26 379,75	23 981,58

Règles de calcul :

- on calcule d'abord l'annuité constante : a = 26 379,75 DH
- on calcule l'intérêt dû pour chaque période : $I_k = D_k \times t$
- on calcule l'amortissement, pour chaque période, par différence entre l'annuité constante et l'intérêt de la période : $m_k = a - I_k$

On constate que la dette au début de la dernière période est égale à l'amortissement de la dernière période. Ceci veut dire que la dernière annuité met fin à la dette. On peut vérifier cela en vérifiant que la somme des amortissements est égale au capital emprunté : $\sum_{k=1}^{n} m_k = C$

On constate que l'intérêt diminue dans le temps alors que l'amortissement augmente.

5.3.2. Remboursement par amortissement constant.

Dans ce cas, l'amortissement est réparti de façon égale sur l'ensemble des périodes : $m = \frac{C}{n}$

L'annuité est obtenue par la somme de l'intérêt de la période et de l'amortissement constant, puisque l'intérêt baisse d'une période à l'autre, l'annuité sera donc en diminution.

Exemple 7 : Un emprunt de 100 000,00 DH est remboursable en 5 ans selon le système des amortissements constants, dresser le tableau d'amortissement de cet emprunt si le taux d'intérêt annuel est de 10%.

Le capital emprunté : C = 100 000,00 DH ;
La durée de prêt : n = 5 ans ;
Taux d'intérêt annuel : t_a = 10%.

Comme l'amortissement est constant, on a : $m = \frac{100\,000,00}{5} = 20\,000,00$ DH

Le tableau d'amortissement de cet emprunt est :

Période	Dette au début de période	Intérêt de la période	Amortissement de la période	Annuité versée en fin de période
k	**D_k**	**Ik**	**m_k**	**a_k**
1	100 000,00	10 000,00	20 000,00	30 000,00
2	80 000,00	8 000,00	20 000,00	28 000,00
3	60 000,00	6 000,00	20 000,00	26 000,00
4	40 000,00	4 000,00	20 000,00	24 000,00
5	20 000,00	2 000,00	20 000,00	22 000,00

Règles de calcul :

- on calcule d'abord l'amortissement constant : m = 20 000,00 DH ;
- on calcule l'intérêt dû pour chaque période : $I_k = D_k$ x t ;
- on calcule l'annuité : $a_k = m + I_k$.

On constate que l'intérêt comme l'annuité diminuent dans le temps.

Remarque 2 *: Calculons la valeur acquise des 5 annuités pour vérifier l'assertion de la remarque 1 faite au début de ce chapitre.*

VA = 30 000,00 x $1{,}1^4$ + 28 000,00 x $1{,}1^3$ + 26 000,00 x $1{,}1^2$ + 24 000,00 x 1,1+ 22 000,00 DH

VA = 43 923,00 + 37 268,99 + 31 460,00 + 26 400,00 + 22 000,00 = 161 051,00 DH

Or on a : C x $(1 + t)^n$ = 100 000,00 x $(1{,}1)^5$ = 161 051,00 DH.

On trouve bien que : $\sum_{k=1}^{5} a_k \times (1+t)^k = C \times (1+t)^5 = 161\,051{,}00\ DH$.

Remarquons que, dans ce cas, nous n'avons fait aucune hypothèse, au départ de nos calculs, sur l'équivalence entre capitaux, le capital prêté C et l'ensemble des annuités a_k qui sert au remboursement de ce capital ; mais nos calculs financiers, pour être « justes » doivent assurer immanquablement cette équivalence de capitaux, c'est-à-dire l'égalité entre la valeur acquise du capital prêté : C x $(1 + t)^n$ et la sommes des valeurs acquises des annuités qui sert à remplacer le capital prêté : $\sum_{k=1}^{k=n} a_k (1+t)^{n-k}$ *afin que la suite des annuités puissent remplacer valablement le capital prêté.*

Nous donnons, dans l'annexe 1, la démonstration d'une telle assertion, dans le cas général du remboursement d'un emprunt par amortissements constants.

5.3.3. Remboursement par amortissements et annuités quelconques.

Il s'agit d'un cas purement didactique, en ce sens qu'on suppose qu'un emprunt C soit contracté, pour n périodes, au taux t et remboursable par amortissements et annuités non constants. Ce cas exceptionnel peut :

- servir pour bien assoire notre méthode de calcul basée sur le tableau d'amortissement ;
- être envisagé dans le cas où le remboursement de l'emprunt est ajusté aux possibilités financières de l'emprunteur.

Exemple 8 : On considère un emprunt de 1 000 000,00 DH, remboursable en 4 annuités, selon la suite suivante d'amortissements :

* 1è amortissement m_1 = 150 000,00 DH
* 2è amortissement m_2 = 117 000,00 DH
* 3è amortissement m_3 = 445 000,00 DH
* 4è amortissement m_4 = 288 000,00 DH

Dresser le tableau d'amortissement de cet emprunt si le taux d'intérêt annuel est de 11%.

Le tableau d'amortissement de cet emprunt est :

Période	Dette au début de période	Intérêt de la période	Amortissement de la période	Annuité versée en fin de période
k	**D_k**	**Ik**	**m_k**	**a_k**
1	1 000 000,00	110 000,00	150 000,00	260 000,00
2	850 000,00	93 500,00	117 000,00	210 500,00
3	733 000,00	80 630,00	445 000,00	525 630,00
4	288 000,00	31 680,00	288 000,00	319 680,00

Règles de calcul :

- on remplit d'abord la colonne des amortissements donnés ;
- on calcule la dette due au début de chaque période ;
- on calcule l'intérêt dû pour chaque période : $I_k = D_k$ x t ;
- on calcule l'annuité : $a_k = m + I_k$.

Remarque 3 : Calculons la valeur acquise des 4 annuités pour vérifier l'assertion de la remarque 1 faite au début de ce chapitre.

VA = 260 000,00 x $1{,}11^3$ + 210 500,00 x $1{,}11^2$ + 525 630,00 x 1,11 + 319 680

VA = 355 584,06 + 259 357,05 + 583 449,30 + 319 680,00 = 1 518 070,41 DH

Or on a : C x $(1 + t)^n$ = 10 00 000,00 x $(1{,}11)^4$ = 1 518 070,41 DH.

On trouve bien que : $\sum_{k=1}^{4} a_k \times (1+t)^{4-k} = C \times (1+t)^4 = 1518\,070{,}41\,\text{DH}$.

Remarquons que, dans ce cas, nous n’avons fait aucune hypothèse, au départ de nos calculs, sur l’équivalence entre capitaux, le capital prêté C et l’ensemble des annuités a_k qui sert au remboursement de ce capital ; mais nos calculs financiers, pour être « justes » doivent assurer immanquablement cette équivalence de capitaux, c’est-à-dire l’égalité entre la valeur acquise du capital prêté : C x (1 + t)^n et la sommes des valeurs acquises des annuités qui sert à remplacer le capital prêté : $\sum_{k=1}^{k+n} a_k (1+t)^n$ afin que la suite des annuités puissent remplacer valablement le capital prêté.

Nous donnons, dans l’annexe 2, la démonstration d’une telle assertion, dans le cas général du remboursement d’un emprunt par amortissements et annuités quelconques.

5.4. TABLEAU D’AMORTISSEMENT D’UN EMPRUNT.

Nous allons, dans ce paragraphe, étudié, d’une façon détaillée, le tableau d’amortissement d’un emprunt, dans tous les cas.

Soit un capital emprunté C à un taux d'intérêt t, à rembourser en n périodes.

Après une période, l'emprunteur verse une première annuité a_1. Cette annuité sert à rembourser l'intérêt de la première période I_1 et une partie du capital, appelée amortissement m_1.

L'intérêt I_1 est calculé à partir de la dette au début de la première période D_0.

$D_0 = C$ => $I_1 = D_0 \times t$ => $a_1 = I_1 + m_1 = D_0 \times t + m_1$

Le montant de la dette au début de la deuxième période est : $D_1 = D_0 - m_1$

Après la deuxième période, l'emprunteur verse une annuité a_2. Cette annuité sert à rembourser l'intérêt de la deuxième période I_2 et une partie du capital, l'amortissement m_2.

L'intérêt I_2 est calculé à partir de la dette au début de la deuxième période D_1.

$D_1 = D_0 - m_1$ => $I_2 = D_1 \times t$ => $a_2 = I_2 + m_2 = D_1 \times t + m_2$

Le montant de la dette au début de la troisième période est : $D_2 = D_1 – m_2 = D_0 – m_1 – m_2$

On continue de la même façon jusqu'à la dernière période. L'annuité a_n sert à rembourser l'intérêt de la dernière période I_n et l'amortissement m_n.

L'intérêt I_n est calculé à partir de la dette au début de n^{ème} période D_{n-1}.

$D_{n-1} = D_{n-2} - m_{n-1}$ => $I_n = D_{n-1} \times t$ => $a_n = I_n + m_n = D_{n-1} \times t + m_n$

Le tableau d'amortissement décrit comment l'emprunt est remboursé sur toute la durée du prêt, il se présente de la manière suivante :

Période	**Dette au début De période**	**Intérêt de la période**	**Amortissement de la période**	**Annuité versée en fin de la période**
1	D_0	$I_1 = D_0\ t$	m_1	$a_1 = D_0\ t + m_1$
2	$D_1 = D_0 - m_1$	$I_2 = D_1\ t$	m_2	$a_2 = D_1\ t + m_2$
3	$D_2 = D_1 - m_2$	$I_3 = D_2\ t$	m_3	$a_3 = D_2\ t + m_3$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
k	$D_{k-1} = D_{k-2} - m_k$	$I_k = D_{k-1}\ t$	m_k	$a_k = D_{k-1}\ t + m_k$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
n - 1	$D_{n-2} = D_{n-3} - m_{n-2}$	$I_{n-1} = D_{n-2}\ t$	m_{n-1}	$a_{n-1} = D_{n-2}\ t + m_{n-1}$
n	$D_{n-1} = D_{n-2} - m_{n-1}$	$I_n = D_{n-1}\ t$	m_n	$a_n = D_{n-1}\ t + m_n$

L'annuité d'une période k est composé d'un intérêt I_k et d'un amortissement m_k.

$a_k = I_k + m_k$ et $a_{k+1} = I_{k+1} + m_{k+1}$

L'annuité d'une période I_k est calculé en appliquant le taux d'intérêt t à la dette au début de période D_{k-1} :

$I_k = D_{k-1} \times t$ et $I_{k+1} = D_k \times t$

La dette au début d'une période est égale à la dette au début de la période précédente diminuée de l'amortissement de la période :

$D_k = D_{k-1} - m_k$ donc $D_{k-1} = D_k + m_k$

On peut donc remplacer D_{k-1} dans la formule de a_k :

$$a_k = I_k + m_k = D_{k-1} \times t + m_k = (D_k + m_k) \times t + m_k = D_k t + m_k t + m_k = D_k t + m_k (1+t)$$

or

$$a_{k+1} = I_{k+1} + m_{k+1} \quad \text{et} \quad a_{k+1} = D_k \times t + m_{k+1}$$

5.4.1. Loi des amortissements pour des annuités constantes.

Dans le cas d'un remboursement par annuités constantes : $a_{k+1} = a_k = a$ et ce $\forall$ k = de 1 à n, on a successivement :

$$a_{k+1} = a_k \quad ; \quad D_k t + m_{k+1} = D_k t + m_k (1+t) \quad \text{et} \quad m_{k+1} = m_k (1+t)$$

On peut donc écrire par récurence :

$$m_p = m_{p-1}(1+t) = m_{p-2}(1+t)^2 = m_{p-3}(1+t)^3 = \ \ldots \ = m_1(1+t)^{p-1}$$

Cette relation est appelée loi des amortissements ; elle signifie que, lorsque le remboursement se fait par annuités constantes, les amortissements varient en progression géométrique de raison (1+t).

Exemple 9 : On considère un emprunt de 35 000,00 DH, au taux d'intérêt de 10% l'an remboursable en 15 mensualités constantes, dresser le tableau d'amortissement de cet emprunt et montrer que les amortissements sont en progression géométrique.

Le taux d'intérêt mensuel proportionnel correspondant au taux d'intérêt annuel de 10% est tel que t_m = 10%/12 = 0,0083333

La mensualité constante de remboursement est :

$$a = C \times \frac{t_m}{1-(1+t_m)^{-n}} = 35000 \times \frac{0{,}0083333}{1-1{,}0083333^{-15}} = 2491{,}90 \text{ DH}$$

Nous pouvons, maintenant dresser le tableau d'amortissement.

Périodes	**Dette**	**Annuité**	**Intérêt**	**Amortissement**	$\frac{\mathbf{m_{k+1}}}{\mathbf{m_k}}$
k	$\mathbf{D_k}$	$\mathbf{a_k}$	$\mathbf{I_k}$	$\mathbf{m_k}$	
1	35000	2491,9	291,67	2200,23	- - -
2	32799,77	2491,90	273,33	2218,57	1,008335
3	30581,20	2491,90	254,84	2237,06	1,008333
4	28344,14	2491,90	236,20	2255,70	1,008333
5	26088,45	2491,90	217,40	2274,50	1,008333
6	23813,95	2491,90	198,45	2293,45	1,008333
7	21520,50	2491,90	179,34	2312,56	1,008333
8	19207,94	2491,90	160,07	2331,83	1,008333
9	16876,10	2491,90	140,63	2351,27	1,008333
10	14524,84	2491,90	121,04	2370,86	1,008333
11	12153,98	2491,90	101,28	2390,62	1,008333
12	9763,36	2491,90	81,36	2410,54	1,008333
13	7352,82	2491,90	61,27	2430,63	1,008333
14	4922,20	2491,90	41,02	2450,88	1,008333
15	2471,31	2491,90	20,59	2471,31	1,008333

Nous avons inscrit, dans la dernière colonne, les rapports (m_{k+1} / m_k) pour montrer que, pour un remboursement à annuités constantes, les amortissements sont en progression géométrique de raison 1,0083333 c'est-à-dire 1 +t_m.

La dernière dette doit être égale au dernier amortissement, ce qui est bien le cas.

5.4.2. Loi des annuités pour des amortissements constants.

Dans le cas d'un remboursement par amortissements constants : $m_{k+1} = m_k = m$ et ce $\forall$ k = de 1 à n, on a successivement :

$D_k = D_{k-1} - m_k$; $a_{k+1} = D_k t + m_{k+1}$ et $a_k = D_{k-1} t + m_k$

$a_{k+1} – a_k = (D_k – D_{k-1}) t + (m_{k+1} – m_k) = - m_k t + (m_{k+1} – m_k) = - m t$

Cette relation est appelée loi des annuités ; elle signifie que, lorsque le remboursement se fait par amortissements constants, les annuités varient en progression arithmétique dont la raison est égale à : – m t.

Cette loi est facile à prévoir, en effet du fait que l'amortissement est constant, la dette due, au début de chaque période, se voit diminuer de l'amortissement m, donc les intérêts dus, au titre de la période en question diminuent de mt et de ce fait, l'annuité diminue, elle aussi, à chaque période, de mt.

Exemple 10 : Soit l'emprunt de 300 000,00 DH contracté pour 25 mois, au taux de 12%. Dresser le tableau d'amortissement d'un tel emprunt, dans le cas d'un remboursement à amortissements constants et montrer que les annuités sont en progression arithmétique de raison – mt.

Utilisons le taux d'intérêt mensuel proportionnel relatif au taux d'intérêt annuel de 12% est tel que :

$t_m = 0{,}12 / 12 = 0{,}01$

Le tableau d'amortissement de cet emprunt peut être dressé :

Périodes	**Dette**	**Amortissement**	**Intérêt**	**Annuité**	$a_{k-1} - a_k$
k	D_k	m_k	I_k	a_k	
1	300 000,00	12000,00	3000,00	15000,00	- - -
2	288 000,00	12000,00	2880,00	14880,00	-120,00
3	276 000,00	12000,00	2760,00	14760,00	-120,00
4	264 000,00	12000,00	2640,00	14640,00	-120,00
5	252 000,00	12000,00	2520,00	14520,00	-120,00
6	240 000,00	12000,00	2400,00	14400,00	-120,00
7	228 000,00	12000,00	2280,00	14280,00	-120,00
8	216 000,00	12000,00	2160,00	14160,00	-120,00
9	204 000,00	12000,00	2040,00	14040,00	-120,00
10	192 000,00	12000,00	1920,00	13920,00	-120,00
11	180 000,00	12000,00	1800,00	13800,00	-120,00
12	168 000,00	12000,00	1680,00	13680,00	-120,00
13	156 000,00	12000,00	1560,00	13560,00	-120,00
14	144 000,00	12000,00	1440,00	13440,00	-120,00
15	132 000,00	12000,00	1320,00	13320,00	-120,00
16	120 000,00	12000,00	1200,00	13200,00	-120,00
17	108 000,00	12000,00	1080,00	13080,00	-120,00
18	96 000,00	12000,00	960,00	12960,00	-120,00
19	84 000,00	12000,00	840,00	12840,00	-120,00
20	72 000,00	12000,00	720,00	12720,00	-120,00
21	60 000,00	12000,00	600,00	12600,00	-120,00
22	48 000,00	12000,00	480,00	12480,00	-120,00
23	36 000,00	12000,00	360,00	12360,00	-120,00
24	24 000,00	12000,00	240,00	12240,00	-120,00
25	12 000,00	12000,00	120,00	12120,00	-120,00

Nous avons inscrit, dans la dernière colonne, les différences (a_{k-1} - a_k) pour montrer que, pour une remboursement à amortissement constants, les annuités sont en progression arithmétique de raison – 120,00 c'est-à-dire – m t_m.

5.5. TAXE SUR LA VALEUR AJOUTEE : TVA.

Lorsque le prêt est contracté auprès d'une banque, celle-ci facture évidemment les intérêts, qui représentent le prix du service rendu par la banque en octroyant le prêt et comme tout service, il est soumis à la TVA.

Actuellement, le taux de la TVA, pour les prêts est de 10%.

Comme la TVA ne concerne que les intérêts, on a tendance, pour faire les calculs, de considérer un taux d'intérêt TTC.

Reprenons les 2 derniers exemples et voyons comment intervient la TVA dans l'amortissement d'un prêt.

Exemple 11 : **Cas d'un prêt remboursé par annuités constantes.**

On reprend, pour ce faire, les données de l'exemple 9., le tableau d'amortissement de l'emprunt des 35 000,00 DH devient :

Dans ce cas, le taux d'intérêt TTC est 0,00833333 x 1,10 = 0,00916666667.

Périodes	Dette	Annuité	Intérêt	Amortissement
1	35 000,00	2 508,09	320,73	2 187,26
2	32 812,74	2 508,09	300,78	2 207,31
3	30 605,44	2 508,09	280,55	2 227,54
4	28 377,90	2 508,09	260,13	2 247,96
5	26 129,94	2 508,09	239,52	2 268,57
6	23 861,37	2 508,09	218,73	2 289,36
7	21 572,01	2 508,09	197,74	2 310,35
8	19 261,66	2 508,09	176,57	2 331,52
9	16 930,14	2 508,09	155,19	2 352,90
10	14 577,24	2 508,09	133,62	2 374,47
11	12 202,78	2 508,09	111,86	2 396,23
12	9 806,55	2 508,09	89,89	2 418,20
13	7 388,35	2 508,09	67,73	2 440,36
14	4 947,99	2 508,09	45,36	2 462,73
15	2 485,25	2 508,09	22,78	2 485,31

On retrouve bien que la dernière dette est égale au dernier amortissement (aux arrondis prés).

Exemple 12 : **Cas d'un prêt remboursé par amortissements constants.**

On reprend, pour ce faire, les données de l'exemple 10, le tableau d'amortissement de l'emprunt des 300 000,00 DH devient, si l'on considère un taux d'intérêt TTC :

$T_m = 0{,}01 \text{ x } 1{,}10 = 0{,}011$

Périodes	**Dette**	**Amortissement**	**Intérêt**	**Annuité**
k	**D_k**	**m_k**	**I_k**	**a_k**
1	300 000,00	12 000,00	3 300,00	15 300,00
2	288 000,00	12000,00	3 168,00	15 168,00
3	276 000,00	12 000,00	3 036,00	15 036,00
4	264 000,00	12 000,00	2 904,00	14 904,00
5	252 000,00	12 000,00	2 772,00	14 772,00
6	240 000,00	12 000,00	2 640,00	14 640,00
7	228 000,00	12 000,00	2 508,00	14 508,00
8	216 000,00	12 000,00	2 376,00	14 376,00
9	204 000,00	12 000,00	2 244,00	14 244,00
10	192 000,00	12 000,00	2 112,00	14 112,00
11	180 000,00	12 000,00	1 980,00	13 980,00
12	168 000,00	12 000,00	1 848,00	13 848,00
13	156 000,00	12 000,00	1 716,00	13 716,00
14	144 000,00	12 000,00	1 584,00	13 584,00
15	132 000,00	12 000,00	1 452,00	13 452,00
16	120 000,00	12 000,00	1 320,00	13 320,00
17	108 000,00	12 000,00	1 188,00	13 188,00
18	96 000,00	12 000,00	1 056,00	13 056,00
19	84 000,00	12 000,00	924,00	12 924,00
20	72000,00	12 000,00	792,00	12 792,00
21	60 000,00	12 000,00	660,00	12 660,00
22	48 000,00	12 000,00	528,00	12 528,00
23	36000,00	12 000,00	396,00	12 396,00
24	24 000,00	12 000,00	264,00	12 264,00
25	12 000,00	12 000,00	132,00	12 132,00

5.6. TAUX PROPORTIONNEL ET TAUX EQUIVALENT.

Nous avons, tout au long de ce chapitre, pris indifféremment comme taux d'intérêt mensuel, des fois le taux d'intérêt proportionnel et d'autres fois le taux d'intérêt équivalent mais nous n'avons, jusqu'à maintenant, jamais discuté, des raisons de ces choix.

Rappelons que les taux correspondants au taux annuel t_a sont tels que :

- taux proportionnel : $t_{pm} = t_a / 12$
- taux équivalent : $t_{ém} = (1 + t_a)^{1/12} - 1$

Observons d'abord que le taux d'intérêt mensuel proportionnel t_{pm} est supérieur au taux d'intérêt équivalent $t_{ém}$: $t_{pm} > t_{ém}$.

En toute rigueur, dans tout calcul d'un emprunt, il faut prendre le taux d'intérêt mensuel équivalent au taux d'intérêt annuel négocié avec la banque mais celle-ci aura tendance à privilégier l'utilisation du taux d'intérêt mensuel proportionnel par ce qu'il est justement supérieur au taux d'intérêt mensuel équivalent. Il représente ainsi un avantage pour la banque.

La banque présente souvent comme argument la simplicité des calculs d'un taux proportionnel par rapport à ceux nécessaires pour le calcul d'un taux équivalent mais ce n'est là qu'un prétexte.

En toute rigueur aussi, les calculs, pour un emprunt, doivent être faits avec un seul et même taux, taux d'intérêt proportionnel ou taux d'intérêt équivalent.

***Remarque 4** : Reprenons intégralement l'énoncé et la solution donnés dans l'exemple 3, tout au début de ce chapitre :*

Pour acquérir un logement, un particulier demande à sa banque un emprunt de 300 000,00 DH qu'il prévoir de rembourser en 10 ans sous forme de mensualités constantes. Le taux d'intérêt annuel est fixé à 13% l'an.

Quelle est la mensualité constante nécessaire pour rembourser cet emprunt ?

Le capital emprunté : C = 300 000,00 DH.
La durée du prêt : n = 10 ans = 120 mois.
Taux d'intérêt annuel : t = 13%.

Le taux d'intérêt annuel doit être transformé en un taux mensuel, pour cela on calcule le taux équivalent :

$1 + t_a = (1 + t_m)^{12}$ => $t_m = (1 + 0{,}13)^{1/12} - 1 = 0{,}010237$

La mensualité constante de remboursement est :

$$a = C \times \frac{t_m}{1-(1+t_m)^{-n}} = 300\,000{,}00 \times \frac{0{,}010237}{1-1{,}010237^{-120}} = 4\,353{,}59\ DH$$

Nous avions fait la remarque suivante : le calcul de l'annuité constante a_{120} relative à un capital C emprunté pour une durée de n = 120, n'a pas pu être fait en utilisant les tables financières, dans lesquelles n < 50 ; nous avons donc dû recquirir à l'utilisation de la fonction x^y des calculatrices électroniques ou des calculatrices existant dans les micro-ordinateurs.

Mais nous aurions pu détourner cette difficulté en essayant de résoudre le problème, en 2 étapes successives, à savoir :

- *Calculer l'annuité contante a_{10} relative à une année, pour un capital C emprunté pendant 10 ans ;*
- *Calculer la mensualité constante m_{12} relative à un mois, pour un capital a_{10} emprunté pour 12 mois.*

Nous devrons voir, par la suite, si m_{12} n'est pas égal à a_{120} tel qu'il a été calculé directement, dans l'exemple 3.

Pour n = 10 et t_a = 13% => la table financière T.5. donne :

$$\frac{t}{1-(1+0{,}13)^{-10}} = 0{,}184289$$

Donc a_{10} = 300 000,00 x 0,184289 = 55 286,70 DH

Pour n = 12 et t_m = 1,0237 %

La table financière T.5. donne :

t_m = 1,00% $\quad \dfrac{0{,}0100}{1-(1+0{,}0100)^{-12}} = 0{,}088849$

t_m = 1,25 $\quad \dfrac{0{,}0125}{1-(1+0{,}0125)^{-12}} = 0{,}090258$

Une interpolation simple donne :

1,00%-----------------------------t_m = 1,0237% ---------------------1,25%

0,088849--------------------------------- ? -----------------------------0,090258

$$\frac{1,0237-1}{1,25-1}=\frac{a-0,088849}{0,090258-0,088849}$$

$$\frac{0,010237}{1-(1+0,010237)^{-12}} = 0,088849 + \frac{1,0237-1}{1,25-1}\times(0,09258-0,088849)=0,088983$$

Soit m_{12} = 0,088983 x 55 286,70 = 4 919,58 DH qui devrait être égal à a_{120} = 4 353,59 DH

Examinons d'où peut venir la différence entre ces deux résultats et essayons de l'interpréter.

Pour ce faire, posons quelques notations : On notera :

n : *le nombre d'années que dure le prêt ;*
t_a : *le taux d'intérêt annuel du prêt ;*
t_m : *le taux d'intérêt mensuel équivalent*

Le calcul direct de l'annuité constante donne : $a_{12n} = \dfrac{t_m}{1-(1+t_m)^{-12n}}$

Le calcul intermédiaire donne successivement :

$$a_{10} = \frac{t_a}{1-(1+t_a)^{-10}} \qquad m_{12} = a_{10}\times\frac{t_m}{1-(1+t_m)^{-12}}=\frac{t_a}{1-(1+t_a)^{-10}}\times\frac{t_m}{1-(1+t_m)^{-12}}$$

Rappelons les égalités évidentes : $1 + t_a = (1 + t_m)^{12}$ => $(1 + t_a)^{10} = (1 + t_m)^{120}$

On peut écrire : $m_{12} = \dfrac{t_a}{1-(1+t_a)^{-10}}\times\dfrac{t_m}{1-(1+t_m)^{-12}} = \dfrac{t_a\times(1+t_a)^{10}}{(1+t_a)^{10}-1}\times\dfrac{t_m\times(1+t_m)^{12}}{(1+t_m)^{12}-1}$

$$= \frac{t_a\times(1+t_m)^{120}}{(1+t_m)^{120}-1}\times\frac{t_m\times(1+t_m)^{12}}{t_a}=\frac{t_m\times(1+t_m)^{120}}{(1+t_m)^{120}-1}\times(1+t_a)$$

C'est-à-dire que : $m_{12} = a_{120} \times (1 + t_a)$ *puisque* $a_{120} = \dfrac{t_m\times(1+t_m)^{120}}{(1+t_m)^{120}-1}$

Vérifions d'abord cette assertion dans l'exemple que nous venons d'étudier. On a bien :

m_{12} = 4 919,58 DH = 4 353,59 x 1,13 = a_{120} x $(1 + t_a)$

Cette différence vient du fait que lorsque nous avons calculé m_{12} à partir de a_{10}, cette dernière annuité est payée en fin de période alors que tous les calculs relatifs à a_{120} concernent un capital payé au tout début de l'emprunt. Nous aurions donc dû considérer, dans les calculs de m_{12}, la valeur actuelle $a_{10} / (1 + t_a)$.

Cette méthode permet ainsi d'utiliser les tables financières pour toutes les valeurs de n qui ne sont pas données, dans ces tables, il suffit de décomposer n en produit de facteurs n_1 et n_2 (tel que $n = n_1 \times n_2$) qui existent dans les tables et de procéder aux corrections idoines.

5.7. EXERCICES D'APPLICATION.

5.7.1. Exercice.

Un prêt de 600 000,00 DH est consenti le 1 janvier 2004, au taux de 10 % l'an, pour financer un investissement. Le remboursement s'effectue par annuités constantes de fin de période, la dernière annuité échéant le 31 décembre 2009.

Calculez le montant de l'annuité et dresser le tableau d'amortissement de l'emprunt

Réponse : 137 764,43 DH

Période	Dettes	Annuité	Intérêt	Amortissements
k	D_k	a_k	I_k	m_k
1	600 000,00	137 764,43	60 000,00	77 764,43
2	522 235,57	137 764,43	52 223,56	85 540,87
3	436 694,70	137 764,43	43 669,47	94 094,96
4	342 599,74	137 764,43	34 259,97	103 504,45
5	239 095,28	137 764,43	23 909,53	113 854,90
6	125 240,38	137 764,43	12 524,04	125 240,39

5.7.2. Exercice.

Un emprunt de 50 000,00 DH est remboursé, en 5 annuités, à amortissements constants. Dresser le tableau d'amortissement de cet emprunt, si le taux d'intérêt annuel est de 7,5%.

Réponse :

Période	Dettes	Amortissement	Intérêt	Annuité
k	D_k	m_k	I_k	a_k
1	50000,00	10000,00	3750,00	13750,00
2	40000,00	10000,00	3000,00	13000,00
3	30000,00	10000,00	2250,00	12250,00
4	20000,00	10000,00	1500,00	11500,00
5	10000,00	10000,00	750,00	10750,00

5.7.3. Exercice.

Un emprunt de 250 000,00 DH est remboursable en 4 ans, par mensualités constantes, au taux d’intérêt annuel de 9,75%.

a) Quel est le montant d’une mensualité ?
b) Quel est le montant de l’amortissement du 1è mois ?
c) Quel est le montant de l’amortissement du dernier mois ?

Réponses : a) 6 310,67 DH ; b) 4 279,42 DH ; c) 6 259,81 DH

5.7.4. Exercice.

Un emprunt de 65 000,00 DH, remboursable en 5 ans, par amortissements mensuels constants, est accordé au taux d’intérêt de 7,25% l’an.

a) Calculer le montant de l’amortissement mensuel constant ;
b) Donner le montant de la 1è mensualité ;
c) Donner le montant de la dernière mensualité.

Réponses : a) 1 083,33 DH ; b) 1 476,04 DH ; c) 1 089,88 DH.

5.7.5. Exercice.

Un emprunt de 1 000 000,00 DH est remboursé en 10 annuités constantes au taux d'intérêt annuel de 8 %.

a) Calculer le montant de l'annuité constante ;
b) Construire les trois premières lignes du tableau d'amortissement ;
c) Donner la dernière ligne du tableau d'amortissement.

Réponses : a) 149 029,49 DH

b)

Période	**Dette**	**Annuité**	**Intérêt**	**Amortissement**
k	$\mathbf{D_k}$	**ak**	$\mathbf{I_k}$	$\mathbf{m_k}$
1	1 000 000,00	149 029,49	80 000,00	69 029,49
2	930 970,51	149 029,49	74 477,64	74 551,85
3	856 418,66	149 029,49	68 513,49	80 516,00

c)

Période	**Dettes**	**Annuité**	**Intérêt**	**Amortissement**
k	$\mathbf{D_k}$	**ak**	$\mathbf{I_k}$	$\mathbf{m_k}$
10	137 990,25	149 029,49	11 039,22	137 990,27

5.7.6. Exercice.

Un emprunt d'un montant de 800 000,00 dirhams est amorti en huit annuités. Le taux d'intérêt est de 9 %. La première moitié de l'emprunt est remboursable en 4 annuités et avec des amortissements constants. Les quatre dernières annuités sont constantes.

Présenter le tableau d'amortissement de cet emprunt.

Réponse : On a, en fait 2 tableaux d’amortissement :

Période	**Dettes**	**Amortissement**	**Intérêt**	**Annuité**
k	$\mathbf{D_k}$	$\mathbf{m_k}$	$\mathbf{I_k}$	$\mathbf{a_k}$
1	800 000,00	100 000,00	72 000,00	172 000,00
2	700 000,00	100 000,00	63 000,00	163 000,00
3	600 000,00	100 000,00	54 000,00	154 000,00
4	500 000,00	100 000,00	45 000,00	145 000,00
- - -	- - -	- - -	- - -	- - -
5	400 000,00	87 467,46	36 000,00	123 467,46
6	312 532,54	95 339,53	28 127,93	123 467,46
7	217 193,01	103 920,09	19 547,37	123 467,46
8	113 272,92	113 272,90	10 194,56	123 467,46

5.7.7. Exercice.

Un emprunt de 500 000,00 DH est remboursable au moyen de 10 annuités constantes au taux d'intérêt de 9 %.

a) Calculer le montant de l'annuité ;
b) Décomposer en intérêt et amortissement la première ;
c) Décomposer en intérêt et amortissement la dernière annuité ;
d) Calculer le montant de la dette non encore amortie après 7 années de l'emprunt ;
e) Calculer l'amortissement contenu dans la 8ème annuité.

Réponses : a) 77 910,04 DH ; b) m_1 = 32 910,04 DH et I_1 = 45 000 DH ; c) m_{10} = 71 477,11 DH et I_{10} = 6432,94 DH ; d) 197 213,28 DH et e) m_8 = 60 160,85 DH.

5.7.8. Exercice.

La dixième annuité remboursant un emprunt se compose comme suit :

- Amortissement : 12 500,00 DH ;
- Intérêt : 812,50 DH.

Sachant que le taux d’intérêt annuel est de 6,5% et que le remboursement se fait à annuités constantes :

a) Montrer que cette dixième annuité est justement la dernière annuité ;
b) Calculer le montant de l’annuité ;
c) calculer le montant du prêt.

Réponses : a) $I_{10} = m_{10}$ x Taux d’intérêt ; b) 13 312,50 DH ; c) 95 701,30 DH.

5.7.9. Exercice.

La onzième annuité remboursant un emprunt se décompose comme suit :

- Amortissement : 146 522,38 DH
- Intérêt : 47 256,23 DH

Sachant que le taux d'intérêt de cet emprunt est égal à 5,75% et que les annuités sont constantes :

a) Calculer le montant d'une annuité ;

b) Quelle est la durée de l'emprunt ?

c) Calculer le montant du capital emprunté.

Réponses : a) 193 778,61 DH ; b) n = 15 ; c) 1 913 154,02 DH.

5.7.10. Exercice.

Une société a contracté le 1er janvier 2006, un emprunt auprès de sa banque, qui lui propose de mettre à sa disposition une somme aux conditions suivantes: amortissement de l'emprunt en 10 annuités constantes.

La 1ère venant à échéance dans un an :

- montant du premier amortissement : 962,37 DH
- montant du 2ème amortissement : 1 116,35 DH

a) Calculez le taux et le montant de l'emprunt ;

b) Calculez le montant de l'annuité ;

c) Calculer le montant du 10ème amortissement.

Réponses : a) ; t = 16% et C = 20 519,19 DH ; b) 4 245,44 DH ; c) 3 659,86 DH.

5.7.11. Exercice.

Le premier amortissement d'un emprunt, remboursable en 15 annuités constantes, s'élève à la somme de 53 648,48 DH. Sachant que le $10^{ème}$ amortissement s'élève à 148 771,46 DH, calculer :

a) Le taux de l'emprunt ;

b) Le montant de l'annuité constante ;

c) Le montant de l'emprunt.

Réponses : a) 12 % ; b) 293 648,49 DH et c) 2 000 000 DH.

5.7.12. Exercice.

Une banque a accordé à un client un prêt logement de 350 000,00 DH à un taux d'intérêt annuel de 12 % l'an. Le remboursement s'effectue par mensualités constantes sur une durée de 20 ans, avec une période de différé de six mois.

a) Donner les lignes numéro 64 et 65 du tableau d'amortissement ;

b) Juste après le paiement de la $100^{ème}$ annuité, l'emprunteur désire rembourser la totalité de la dette restante en un seul versement. Quel est le montant à payer ?

On utilisera un taux mensuel proportionnel.

Réponses :

a)

Période	Dette au début de période	Intérêt de la période	Amortissement de la période	Annuité versée en fin de période
64	319 157,55	3 191,57	662,23	3 853,80
65	318 495,33	3 184,95	668,85	3 853,80

b) 289 683,44 DH.

5.7.13. Exercice.

Un emprunt de 400 000,00 DH est remboursable en 5 annuités. Le taux d'intérêt hors taxe est égal à 9%. Le taux de TVA est de 10 %. Construire le tableau d'amortissement selon le système de remboursement en :

a) Amortissements constants ;

b) Annuités constantes ;

c) Dire quel est le système de remboursement le plus rentable pour l'emprunteur et pour le prêteur.

On prendra un taux d'intérêt mensuel proportionnel correspondant au taux d'intérêt annuel.

Réponses :

a) Amortissements constants

Période	Dette au début de période	Amortissement de la période	Intérêt de la période	TVA sur intérêt	Annuité versée en fin de période
1	400 000,00	80 000,00	36 000,00	3 600,00	119 600,00
2	320 000,00	80 000,00	28 800,00	2 880,00	111 680,00
3	240 000,00	80 000,00	21 600,00	2 160,00	103 760,00
4	160 000,00	80 000,00	14 400,00	1 440,00	95 840,00
5	80 000,00	80 000,00	7 200,00	720,00	87 920,00

b) Annuités constantes

Période	Dette au début de période	Annuités	Intérêt de la période	Amortissement de la période	TVA sur intérêt
1	400 000,00	105 249,56	36 000,00	65 649,56	3 600,00
2	334 350,44	105 249,56	30 091,54	72 148,87	3 009,15
3	262 201,57	105 249,56	23 598,14	79 291,61	2 359,81
4	182 909,96	105 249,56	16 461,90	87 141,48	1 646,19
5	95 768,48	105 249,56	8 619,16	95 768,48	861,92

c) Les 2 systèmes sont financièrement équivalents puisque nous avons montré, dans la remarque les sommes des valeurs acquises des annuités sont toujours égales à $C(1+t)^n$.

5.7.14. Exercice.

Un capital de 100 000,00 DH est emprunté aux conditions suivantes :

- Durée de remboursement : 10 ans ;
- 1er taux d'intérêt : 10 % ;
- Durée du 1er taux : 5 ans ;
- 2ème taux d'intérêt : 15 % ;

- Modalités : annuités constantes.

La période de différée est de 5 années pendant lesquelles, seule les intérêts sont payés. Présenter le tableau d'amortissement.

Réponse :

Période	Dette au début de période	Intérêt de la période	Amortissement de la période	Annuité versée en fin de période
1	100 000,00	10 000,00	0,00	10 000,00
2	100 000,00	10 000,00	0,00	10 000,00
3	100 000,00	10 000,00	0,00	10 000,00
4	100 000,00	10 000,00	0,00	10 000,00
5	100 000,00	10 000,00	0,00	10 000,00
6	100 000,00	15 000,00	14 831,56	29 831,56
7	85 168,44	12 775,27	17 056,29	29 831,56
8	68 112,16	10 216,82	19 614,74	29 831,56
9	48 497,42	7 274,61	22 556,95	29 831,56
10	25 940,48	3 891,07	25 940,48	29 831,56

5.7.15. Exercice.

Une personne a contracté un emprunt de 350 000,00 DH au taux annuel de 4 %. Elle a pensé à deux modalités de remboursement en mensualités constantes :

- Contracter le crédit sur 15 ans et anticiper le remboursement à la fin de la 8ème année en préparant l'anticipation par un placement de mensualités constantes au taux de 9 %.
- Contracter le crédit sur 8 ans.

Quelle modalité conseilleriez-vous ?

Réponse :
La première modalité, l'emprunteur doit verser mensuellement et pendant 8 ans 3934,32 DH.
La deuxième modalité, l'emprunteur doit verser mensuellement et pendant 8 ans 4259,74 DH.
La première modalité est donc plus avantageuse.

Note de lecture 5

CAS DE REMBOURSEMENT PAR ANNUITES CONSTANTES

Ces deux expressions donnant m_2 et m_3 respectivement en fonction de m_1 et m_2 montrent que les amortissements sont, dans le cas d'un remboursement à annuités constantes, en progression géométrique de 1è terme m_1 et de raison $(1 + t)$.

Démontrons, par récurrence, une telle assertion.

Nous venons de voir qu'elle est vraie pour $k = 1$ et $k = 2$, supposons qu'elle soit vraie pour k et montrons qu'elle est toujours vraie pour $k + 1$.

Nous avons par hypothèse : $m_k = (1 + t)\, m_{k-1}$ et nous devons montrer que $m_{k+1} = (1 + t)\, m_k$.

On a : $a_k = a_{k+1}$ $\quad\Rightarrow\quad D_{k-1}\, t + m_k = D_{k-1}\, t + m_{k+1}$

$(C - m_1 - m_2 - \dots - m_{k-1})t + m_k = (C - m_1 - m_2 - \dots - m_{k-1} - m_k)t + m_{k+1}$

Ce qui donne : $m_{k+1} = (1 + t)m_k$

Et d'une façon générale : $m_k = (1 + t)^{k-1}\, m_1$

Ainsi, nous avons établi que les amortissements sont, dans le cas d'un remboursement à annuités constantes, en progression géométrique de 1è terme m_1 et de raison $(1 + t)$.

Or nous avons l'égalité évidente : $\sum_{k=1}^{n} m_k = C$

Soit : $C = \sum_{k=1}^{n} (1+t)^{k-1} m_1 = m_1 \dfrac{(1+t)^n - 1}{t}$ $\quad\Rightarrow\quad m_1 = \dfrac{Ct}{(1+t)^n - 1}$

Et l'annuité constante est égale à l'une des annuités, prenons la première : $Ct + m_1$

$$a = Ct + m_1 = Ct + \frac{Ct}{(1+t)^n - 1} = Ct\frac{(1+t)^n - 1 + 1}{(1+t)^n - 1} = C\frac{t}{1-(1+t)^{-n}}$$

On retrouve ainsi l'expression bien connue de l'annuité dans le cas d'un remboursement à annuités constantes sans avoir fait une hypothèse relative à l'égalité de la somme des valeurs acquises des annuités constantes et de la valeur acquise du capital prêté.

Nous pourrons facilement, à partir de ce résultat, montrer que la somme des valeurs acquises des annuités est bien égale à la valeur acquise du capital prêté, c'est-à-dire que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{t}{1-(1+t)^{-n}} C \times (1+t)^{n-k} = C(1+t)^n$$

En effet :

$$C\frac{t(1+t)^n}{(1+t)^n - 1}\sum_{k=1}^{k=n}(1+t)^{-k} = C\frac{t(1+t)^n}{(1+t)^n - 1} \times \frac{(1+t)^n - 1}{t} = C(1+t)^n$$

Note de lecture 6

MATHMATIQUES FINANCIERES A COURT TERME MATHEMATIQUES FINANCIERES A MOYEN ET LONG TERME

Reprenons la réflexion objet de notre remarque 8 du chapitre 3 relatif aux intérêts composés et essayons d'appliquer la même démarche pour l'annuité dans le cas où t, taux d'intérêt est très petit devant 1.

Rappelons que, dans la remarque 8 du chapitre 2, nous avons montré, grâce à des développements limités du 1è ordre, que les formules des mathématiques financières à court terme se déduisent des formules des mathématiques financières à moyens et longs termes par des approximations de premier ordre.

Considérons l'expression de l'annuité : $a = C\,\dfrac{t}{1-(1+t)^{-n}}$

Or on sait que si t est très petit devant 1, on a : $(1+t)^n \approx 1 + nt + \dfrac{n(1+t)^2}{2}t^2$

On peut écrire : $a = C\dfrac{t\times(1+t)^n}{(1+t)^n - 1} \approx C\dfrac{t\times(1+nt+\frac{n(n-1)}{2}t^2)}{nt+\frac{n(n-1)}{2}t^2} = \dfrac{C}{n}\times\dfrac{1+nt+\frac{n(n-1)}{2}t^2}{1+\frac{(n-1)}{2}t}$

Soit, en ne retenant que les termes et t et en éliminant ceux en t² : $a \approx \dfrac{C}{n}\times\dfrac{1+nt}{1+\frac{(n-1)}{2}t}$

Comme nous sommes, dans le cas de mathématiques financières à court terme, c'est-à-dire dans le cas où l'on considère des taux d'intérêt mensuels proportionnels $t_m = t/12$*, la dernière expression devient après remplacement de t pat* t_m *c'est-à-dire t/12 :*

$$a \approx \frac{C}{n}\times\frac{1+nt}{1+\frac{(n-1)}{2}t} = \frac{C}{n}\times\frac{1+n\frac{t}{12}}{1+\frac{n-1}{2}\times\frac{t}{12}} = \frac{C\times(24+2nt)}{n(24+(n-1)t)}$$

Nous retrouvons ainsi la même formule que celle que nous avions trouvée, dans le paragraphe 1.5.3. du chapitre 1 dans la cas de calcul d'annuités constantes, avec intérêt simple post compté.

Reprenons cette dernière expression et transformons-la encore :

$$a \approx \frac{C \times (24 + 2nt)}{n(24 + (n-1)t)} = \frac{24C \times (1 + \frac{2nt}{24})}{n(24 + (n-1)t)} = \frac{24C}{n[24 + (n-1)t] \times (1 - \frac{2nt}{24})}$$

Car nous savons que : $1 + \frac{2nt}{24} \approx \frac{1}{1 - \frac{2nt}{24}}$

$$a \approx \frac{24C}{n(24 - 2nt + (n-1)t - \frac{2n(n-1)t^2}{24}} = \frac{24C}{n[24 - (n+1)t]}$$

Nous retrouvons ainsi la même expression que celle que nous avions trouvée, dans le paragraphe2.6.2 du chapitre 2, dans le cas d'annuités constantes, avec intérêt simple pré compté.

Ceci montre bien :

- comment les mathématiques financières à court terme à intérêt simple post compté se déduisent des mathématiques financières à moyens et longs termes ;

- comment les mathématiques financières à court terme à intérêt pré compté se déduisent des mathématiques financières à court terme à intérêt simple post compté.

Note de lecture 7

CAS D'UN REMBOURSEMENT A AMORTISSEMENTS CONSTANTS

Nous proposons dans cette note de lecture de démontrer l'assertion objet de la remarque 5 du chapitre 5, à savoir que :

Pour un capital C prêté, pour n périodes, au taux d'intérêt t et remboursable, par amortissements constants, la somme des valeurs acquises des n annuités est égale à la valeur acquise du capital, après les n périodes, c'est-à-dire que :

$$C \times (1+t)^n = \sum_{k=1}^{n} a_k \times (1+t)^{n-k} \quad \textit{avec} \quad m_k = m \quad \forall k$$

Dressons, dans ce cas, le tableau d'amortissement de cet emprunt :

Période	***Dette au début De période***	***Intérêt de la période***	***Amortissement de la période***	***Annuité versée en fin de la période***	***Valeur acquise des annuités***
1	$D_0 = C$	$I_1 = D_0\, t$	*C/n*	$a_1 = D_0\, t + C/n$	$a_1\,(1 + t)^{n-1}$
2	$D_1 = C - C/n$	$I_2 = D_1\, t$	*C/n*	$a_2 = D_1\, t + C/n$	$a_2\,(1 + t)^{n-2}$
3	$D_2 = C - 2C/n$	$I_3 = D_2\, t$	*C/n*	$a_3 = D_2\, t + C/n$	$a_3\,(1 + t)^{n-3}$
. . ..	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
k	$D_k = C - (k\text{-}1)C/n$	$I_k = D_k\, t$	*C/n*	$a_k = D_k\, t + C/n$	$a_k\,(1 + t)^{n-k}$
. . .	. . .	. . ...	. . .	. . .	. . .
n - 1	$D_{n-2} = C - (n\text{-}2)C/n$	$I_{n-1} = D_{n-2}\, t$	*C/n*	$a_{n-1} = D_{n-2}t + C/n$	$a_{n-1}\,(1 + t)^1$
n	$D_{n-1} = C - (n\text{-}1)C/n$	$I_n = D_{n-1}\, t$	*C/n*	$a_n = D_{n-1}\, t + C/n$	a_n

Nous avons à montrer que $\sum_{k=1}^{n} a_k \times (1+t)^{n-k} = C \times (1+t)^n$ *et ce* $\forall\, a_k$ et m_k

Nous avons d'abord : $a_k = C/n + D_{k-1}\, t = C/n + [C - (k-1)C/n]t$

Nous devons donc montrer que : $S = \sum_{k=1}^{n} [\frac{C}{n} + (C - (k-1)\frac{C}{n})t] \times (1+t)^{n-k} = C \times (1+t)^n$

$S = \sum_{k=1}^{n} [\frac{C}{n} + (n - (k-1))\frac{Ct}{n}] \times (1+t)^{n-k} = C \times (1+t)^n$

La somme S est la somme de 2 termes qui sont : T_1 *et* T_2 *tel que :*

$$T_1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{C}{n}(1+t)^{n-k} = \frac{C}{n} \times \sum_{k=1}^{n} (1+t)^{n-k+1} = \frac{C}{n} \times (1+t)^{n+1} \sum_{k=1}^{n} (1+t)^{-k} = \frac{C}{nt} \times \frac{(1+t)^{n+1}}{1+t} \frac{1 - \frac{1}{(1+t)^n}}{1 - \frac{1}{1+t}}$$

$$= \frac{C}{nt}(1+t)^{n+1} - \frac{C}{nt}(1+t) = \frac{C}{nt}(1+t)^n + \frac{C}{n}(1+t)^n - \frac{C}{nt}(1+t)$$

$$T_2 = \sum_{k=1}^{n} (n-k)\frac{Ct}{n} \times (1+t)^{n-k} = \frac{Ct}{n} \sum_{k=1}^{n-1} k(1+t)^k$$

Nous devons d'abord calculer la somme S' = $\sum_{k=1}^{n-1} k(1+t)^k$

La somme S' est de la forme :

S' = $a + 2a^2 + 3a^3 + \ldots + ka^k + \ldots + (n-1)a^{n-1}$ *avec* $a = (1 + t)$

On calcule: $S' x(1-a) = a + 2a^2 + 3a^3 + \ldots + ka^k + \ldots + (n-1)a^{n-1}$

$$- a^2 - 2a^3 - \ldots -(k-1)a^k - \ldots - (n-2)a^{n-1} - (n-1)a^n$$

$S' \times (1-a) = a + a^2 + a^3 + \ldots a^k + \ldots + a^{n-1} - (n-1)a^n = a \times \frac{a^{n-1} - 1}{a - 1} - (n-1) \times a^n$

Donc: $S' = \frac{1+t}{1-(1+t)}[\frac{(1+t)^{n-1} - 1}{(1+t) - 1} - \frac{(n-1) \times (1+t)^n}{1 - (1+t)}] = -\frac{(1+t)^n - (1+t)}{t^2} + \frac{(n-1)(1+t)^n}{t}$

Et $T_2 = -\frac{C}{nt}(1+t)^n + \frac{C}{nt}(1+t) + \frac{n-1}{n}C(1+t)^n$

$T_2 = -\frac{C}{nt}(1+t)^n - \frac{C}{n}(1+t)^n + \frac{C}{nt}(1+t) + C(1+t)^n - \frac{C}{n}(1+t)^n$

$$S = \frac{C}{nt}(1+t)^n + \frac{C}{n}(1+t)^n - \frac{C}{nt}(1+t) - \frac{C}{nt}(1+t)^n - \frac{C}{n}(1+t)^n + \frac{C}{nt}(1+t) + C(1+t)^n - \frac{C}{n}(1+t)^n$$

Ce qui donne après simplification $S = C\,(1+t)^n$

Et c'est exactement ce que nous nous proposions d'établir.

Note de lecture 8

CAS D'UN REMBOURSEMENT A ANNUITES ET A AMORTISSEMENTS QUELCONQUES.

Nous proposons dans cette annexe de démontrer l'assertion objet de la remarque 6 du chapitre 5, à savoir que :

Pour un capital C prêté, pour n périodes, au taux d'intérêt t et remboursable, par amortissements et annuités quelconques, la somme des valeurs acquises des n annuités est égale à la valeur acquise du capital, après les n périodes, c'est-à-dire que :

$$C \times (1+t)^n = \sum_{k=1}^{n} a_k \times (1+t)^{n-k} \quad \textit{avec} \quad a_k \textit{ et } m_k \textit{ quelconques} \; \forall \, k$$

Dressons, dans ce cas, le tableau d'amortissement de cet emprunt :

Période	*Dette au début De période*	*Intérêt de la période*	*Amortissement de la période*	*Annuité versée en fin de la période*	*Valeur acquise des annuités*
1	$D_0 = C$	$I_1 = D_0\, t$	m_1	$a_1 = D_0\, t + m_1$	$a_1\, (1+t)^{n-1}$
2	$D_1 = D_0 - m_1$	$I_2 = D_1\, t$	m_2	$a_2 = D_1\, t + m_2$	$a_2\, (1+t)^{n-2}$
3	$D_2 = D_1 - m_2$	$I_3 = D_2\, t$	m_3	$a_3 = D_2\, t + m_3$	$a_3\, (1+t)^{n-3}$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
k	$D_k = D_{k-1} - m_k$	$I_k = D_k\, t$	m_k	$a_k = D_k\, t + m_k$	$a_k\, (1+t)^{n-k}$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
$n - 1$	$D_{n-2} = D_{n-3} - m_{n-2}$	$I_{n-1} = D_{n-2}\, t$	m_{n-1}	$a_{n-1} = D_{n-2} t + m_{n-1}$	$a_{n-1}\, (1+t)^1$
n	$D_{n-1} = D_{n-2} - m_{n-1}$	$I_n = D_{n-1}\, t$	m_n	$a_n = D_{n-1}\, t + m_n$	a_n

N'oublions pas que $\sum_{k=1}^{n} m_k = C$

Nous avons à montrer que $\sum_{k=1}^{n} a_k \times (1+t)^{n-k} = C \times (1+t)^n$ *et ce* $\forall\, a_k$ et m_k

Nous avons d'abord : $a_k = m_k + D_k t = m_k + (C - \sum_{i=1}^{k-1} m_i)t$

Nous devons donc montrer que $\sum_{k=1}^{n} [m_k + (C - \sum_{i=1}^{k-1} m_i) \times t] \times (1+t)^{n-k} = C \times (1+t)^n$

Ou ce qui revient au même : $\sum_{k=1}^{n} [m_k + (C - \sum_{i=1}^{k-1} m_i) \times t] \times (1+t)^{-k} = C$ *, après simplification par l'expression :* $(1+t)^n$

Calculons donc : $S = \sum_{k=1}^{n} [m_k + (C - \sum_{i=0}^{k-1} m_i) \times t] \times (1+t)^{-k}$ avec $m_0 = 0$

Or : $(C - \sum_{i=0}^{k-1} m_i) = \sum_{i=k}^{n} m_i$

$$S = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k}{(1+t)^k} + t \times \sum_{k=1}^{n} \frac{\sum_{i=k}^{n} m_i}{(1+t)^k}$$

Considérons le 2è terme de cette somme et essayons de l'écrire différemment :

$$t \sum_{k=1}^{n} \frac{\sum_{i=0}^{k-1} m_i}{(1+t)^k} = t[\frac{m_1 + m_2 + ... + m_n}{(1+t)} + \frac{m_2 + m_3 + ... + m_n}{(1+t)^2} + ... + \frac{m_k + ... + m_n}{(1+t)^k} + ... + \frac{m_n}{(1+t)^n}]$$

En factorisant par les m_k *plutôt que par les* $\frac{1}{(1+t)^i}$ *on trouve :*

$$t \sum_{k=1}^{n} \frac{\sum_{i=0}^{k-1} m_i}{(1+t)^k} = t \sum_{k=1}^{n} (m_1 \frac{1}{(1+t)} + m_2[\frac{1}{(1+t)} + \frac{1}{(1+t)^2}] + m_3[\frac{1}{(1+t)} + \frac{1}{(1+t)^2} + \frac{1}{(1+t)^3}] + ...$$

$$... + m_n \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(1+t)^i})$$

$$t\sum_{k=1}^{n}\frac{\sum_{i=0}^{k-1} m_i}{(1+t)^k} = t\sum_{k=1}^{n} m_k \sum_{i=1}^{k}\frac{1}{(1+t)^i} = \sum_{k=1}^{n} m_k \times \frac{1}{1+t}\, t\,\frac{1-\frac{1}{(1+t)^k}}{1-\frac{1}{(1+t)}} = \sum_{k=1}^{n}[m_k - \frac{m_k}{(1+t)^k}]$$

Nous pouvons donc écrire S sous la forme de :

$$S = \sum_{k=1}^{n}\frac{m_k}{(1+t)^k} + \sum_{k=1}^{n}[m_k - \frac{m_k}{(1+t)^k}] = \sum_{k=1}^{n}[\frac{m_k}{(1+t)^k} + m_k - \frac{m_k}{(1+t)^k}] = \sum_{k=1}^{n} m_k = C$$

Et c'est exactement ce que nous nous proposions d'établir.

CHAPITRE 6
EMPRUNTS OBLIGATAIRES.

6.1. DEFINITION.

Les emprunts obligataires interviennent dans le cas d'un emprunt très élevé ; l'emprunteur peut alors s'adresser à plusieurs prêteurs. Le nominal de l'emprunt est donc divisé en plusieurs fractions d'égal montant.

L'emprunteur obtient le capital dont il a besoin auprès de plusieurs prêteurs, chaque prêteur ayant prêté une fraction et reçoit en contre partie un titre appelé obligation, d'où le nom d'emprunt obligataire.

Pour emprunter un capital K, l'emprunteur émet donc N obligations de valeur nominale C chacune, tel que :

$$K = N \times C$$

6.2. REMBOURSEMENT D'UN EMPRUNT OBLIGATAIRE.

A la fin de chaque année le porteur d'une obligation a droit à un intérêt appelé coupon annuel d'intérêt, calculé à un taux d'intérêt t :

Coupon annuel d'intérêt = $C \times t$

A la fin de la première année de l'emprunt, l'emprunteur doit verser une première annuité a_1 dont une partie sert à payer les intérêts et une partie sert à amortir une partie de l'emprunt.

$$a_1 = K \times t + m_1$$

L'intérêt $K \times t = N \times C \times t$ est versé aux porteurs des N obligations.

L'amortissement m_1 est réparti en n_1 obligations : $n_1 = \frac{m_1}{C}$

Ces n_1 obligations sont tirées au sort parmi les N obligations émises. Les porteurs de ces obligations reçoivent le capital qu'ils avaient prêté à l'émission, c'est à dire la valeur nominale de l'obligation C, et perdent alors toute existence. Ces obligations sont dites amorties.

Le nombre d'obligations non encore amorties est donc : $r_1 = N – n1$

Ces r_1 obligations sont dites vivantes.

La dette non encore amortit est :

$$D_1 = K – m_1 = K – n_1 \times C = NC - n_1C = (N – n_1)\ C = r_1 \times C$$

A la fin de la deuxième année de l'emprunt, l'emprunteur doit verser une deuxième annuité a_2 dont une partie sert à payer les intérêts et une partie sert à amortir une partie de l'emprunt.

$$a_2 = D1 \times t + m_2$$

L'intérêt $D1 \times t = r_1 \times C \times t$ est versé aux porteurs des r_1 obligations vivantes.

L'amortissement m_2 est réparti en n_2 obligations : $n_2 = \frac{m_2}{C}$

Ces n_2 obligations sont tirées au sort parmi les r_1 obligations vivantes. Les porteurs de ces obligations reçoivent le capital qu'ils avaient prêté à l'émission, c'est à dire la valeur nominale de l'obligation C, et perdent alors toute existence. Ces obligations sont dites amorties.

Le nombre d'obligations non encore amorties est donc : $r_2 = r_1 – n_2$

Ces r_2 obligations sont dites vivantes.

La dette non encore amortit est :

$$D_2 = D_1 – m_2 = D_1 – n_2 \times C = r_1C – n_2C = (r_1 – n_2)\ C = r_2 \times C$$

De la même manière, à la fin d'une année p de l'emprunt, l'emprunteur doit verser une annuité a_p dont une partie sert à payer les intérêts et une partie sert à amortir une partie de l'emprunt.

$$a_p = D_{p-1} \times t + m_p$$

L'intérêt $D_{p-1} \times t = r_{p-1} \times C \times t$ est versé aux porteurs des r_{p-1} obligations vivantes.

L'amortissement m_p est réparti en n_p obligations : $n_p = \frac{m_p}{C}$

Ces n_p obligations sont tirées au sort parmi les r_{p-1} obligations vivantes. Les porteurs de ces obligations reçoivent le capital qu'ils avaient prêté à l'émission, c'est à dire la valeur nominale de l'obligation C, et perdent alors toute existence. Ces obligations sont dites amorties.

Le nombre d'obligations non encore amorties est donc : $r_p = r_{p-1} - n_p$

Ces r_p obligations sont dites vivantes.

La dette non encore amortit est :

$$Dp = D_{p-1} - m_p = D_{p-1} - n_p \times C = r_{p-1}C - n_pC = (r_{p-1} - n_p)\, C = r_p \times C$$

Le tableau d'amortissement d'un emprunt obligataire se présente comme suit :

Période	**Dette début période**	**Intérêt de la période**	**Nombre d'obligations amorties**	**Amortissement de la période**	**Annuité**
1	$K=N\times C$	$K\times t=N\times C\times t$	n_1	$m_1=n_1\times C$	$a_1=K\times i+m_1$
2	$D_1=r_1\times C$	$D_1\times t= r_1\times C\times t$	n_2	$m_2=n_2\times C$	$a_2=D_1\times i+m_2$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
P	$D_{p-1}=r_{p-1}\times C$	$D_{p-1}\times t=r_{p-1}\times C\times t$	n_p	$m_p=n_p\times C$	$a_p=D_{p-1}\times i+m_p$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
n	$D_{n-1}=r_{n-1}\times C$	$D_{n-1}\times t=r_{n-1}\times C\times t$	n_n	$m_n=n_n\times C$	$a_n=D_{n-1}i+m_n$

La dernière période n met fin à l'emprunt. On peut constater qu'au début de la période n, le nombre d'obligations vivantes r_{n-1} est exactement égal au nombre d'obligations amorties en fin de période n_n, afin que la dette soit définitivement et totalement éteinte.

La somme des amortissements est égale au capital emprunté : $\sum_{i=1}^{n} m_i = K$

Exemple 1 : Une société lance un emprunt obligataire de 10 000 obligations. La valeur nominale de l'obligation est fixée à 500,00 DH. Le taux d'intérêt est de 10% l'an. La société amortit l'emprunt en cinq ans, elle amortit successivement les nombres suivants d'obligations : 10 00, 1 500, 2 000, 2 500, et 3 000.

Le capital emprunté est donc : $K = 10\,000 \times 500{,}00 = 5\,000\,000{,}00$ DH

Le tableau d'amortissement de cet emprunt est :

Période	Dette début période	Intérêt de la période	Nombre d'obligations amorties	Amortissement de la période	Annuités
1	5 000 000	500 000	1 000	500 000	1 000 000
2	4 500 000	450 000	1 500	750 000	1 200 000
3	3 750 000	375 000	2 000	1 000 000	1 375 000
4	2 750 000	275 000	2 500	1 250 000	1 525 000
5	1 500 000	150 000	3 000	1 500 000	1 650 000

6.3. REMBOURSEMENT PAR ANNUITES CONSTANTES.

6.3.1. Calcul de l'annuité constante.

Soit K le nominal d'un emprunt obligataire, N le nombre d'obligations émises, C la valeur nominale d'une obligation, t le taux d'intérêt et n la durée de l'emprunt.

L'annuité constante est la même que l'annuité constante de remboursement d'un emprunt indivis.

$$a = K \times \frac{t}{1-(1+t)^{-n}} \qquad \text{avec} \qquad K = N \times C$$

$$a = N \times C \times \frac{t}{1-(1+t)^{-n}}$$

6.3.2. Premier amortissement.

Pour l'emprunt indivis :

$$m_1 = K \times \frac{t}{(1+t)^n - 1}$$

Or : $m_1 = n_1 \times C$ et $K = N \times C$

$$n_1 \times C = N \times C \times \frac{t}{(1+t)^n - 1}$$

$$n_1 = N \times \frac{t}{(1+t)^n - 1}$$

6.3.3. Amortissement d'une période p.

Selon la loi des amortissements des emprunts indivis qui stipule que les amortissements son en progression géométrique de raison (1 + t) :

$m_p = m_1 \times (1+t)^{p-1}$

Le nombre d'obligations amorties à une période p est :

$n_p = \frac{m_p}{C}$ avec $n_1 = \frac{m_1}{C}$

$m_p = n_p \times C$ et $m_1 = n_1 \times C$ Donc : $n_p \times C = n_1 \times C\ (1+t)^{p-1}$

$$n_p = n_1 \times (1 + t)^{p-1}$$

Cette relation est appelée loi des amortissements, elle signifie que les nombres d'obligations amorties varient en progression géométrique de raison (1+t).

$$n_p = n_{p-1} \times (1 + t)$$

6.3.4. Nombre d'obligations amorties après p périodes.

La dette amortit après p périodes est dans le cas d'un emprunt indivis :

$$R_p = K \times \frac{(1+t)^p - 1}{(1+t)^n - 1}$$

Si on désigne par d_p le nombre total d'obligations amorties jusqu'à la période p, on peut écrire :

$R_p = d_p \times C$

$$d_p \times C = N \times C \times \frac{(1+t)^p - 1}{(1+t)^n - 1}$$

$$d_p = N \times \frac{(1+t)^p - 1}{(1+t)^n - 1}$$

6.3.5. Nombre d'obligations vivantes après p périodes.

La dette restante après p périodes est, dans le cas d'un emprunt indivis :

$$D_p = K \times \frac{(1+t)^n - (1+t)^p}{(1+t)^n - 1}$$

Or : $D_p = r_p \times C$

$$r_p \times C = N \times C \times \frac{(1+t)^n - (1+t)^p}{(1+t)^n - 1}$$

$$r_p = N \times \frac{(1+t)^n - (1+t)^p}{(1+t)^n - 1}$$

Exemple 2 : Une société lance un emprunt obligataire de 10000 obligations. La valeur de l'obligation est fixée à 500 DH. Le taux d'intérêt est de 10% l'an. La société amortit l'emprunt en cinq annuités constantes.

Le capital emprunté est donc : $K = 10\,000 \times 500 = 5\,000\,000$ DH

L'annuité constante est :

$$a = 10\,000 \times 500 \frac{0{,}1}{1-(1+0{,}1)^{-5}}$$

$$a = 1\,318\,987{,}40 \text{ DH}$$

Le nombre d'obligations amorties chaque année est :

$$n_1 = 10000 \times \frac{0{,}1}{(1+0{,}1)^5 - 1}$$

$$n_1 = 1637{,}97 \text{ obligations}$$

$n_2 = 1\,637{,}97 \times (1+0{,}1) = 1\,801{,}77$ obligations
$n_3 = 1\,801{,}77 \times (1+0{,}1) = 1\,981{,}95$ obligations
$n_4 = 1\,981{,}95 \times (1+0{,}1) = 2\,180{,}14$ obligations
$n_5 = 2\,180{,}14 \times (1+0{,}1) = 2\,398{,}15$ obligations

Ces nombres doivent être arrondis à des nombres entiers, pour cela, on calcule les nombres d'obligations cumulés arrondis et par différence on obtient les nombres d'obligations entiers.

Nombre d'obligations théoriques	**Nombre d'obligations théoriques cumulées**	**Nombre d'obligations cumulées arrondies**	**Nombre d'obligations entières**
1 637,97	1 637,97	1 638	1 638
1 801,77	3 439,74	3 440	1 802
1 981,95	5 421,69	5 422	1 982
2 180,14	7 601,83	7 602	2 180
2 398,15	9 999,98	10 000	2 398

Le tableau d'amortissement de cet emprunt est :

Période	Dette début période	Intérêt de la période	Nombre d'obligations amorties	Amortissement de la période	Annuité
1	5 000 000	500 000	1 638	819 000	1 319 000
2	4 181 000	418 100	1 802	901 000	1 319 100
3	3 280 000	328 000	1 982	991 000	1 319 000
4	2 289 000	228 900	2 180	1 090 000	1 318 900
5	1 199 000	119 900	2 398	1 199 000	1 318 900

On constate qu'il y a des légères modifications de l'annuité constante qui sont dues aux arrondis effectués sur les nombres d'obligations.

6.4. REMBOURSEMENT PAR AMORTISSEMENTS CONSTANTS.

Dans ce cas, le nombre d'obligations à amortir est réparti de façon égale sur l'ensemble des périodes.

Le nombre d'obligations amorties à chaque période est constant : $n_p = \frac{N}{n}$

Si le rapport $\frac{N}{n}$ n'est pas entier il faut l'arrondir à l'entier le plus proche, ce qui entraînera une légère modification de la valeur des annuités.

L'annuité est obtenue par la somme de l'intérêt de la période et l'amortissement constant, puisque l'intérêt baisse d'une période à l'autre, l'annuité sera donc en diminution. Les annuités sont en progression arithmétique de raison négative égale à $-n_p \times C \times t$.

Exemple 3 : Une société lance un emprunt obligataire de 10000 obligations. La valeur nominale de l'obligation est fixée à 500 DH. Le taux d'intérêt est de 10% l'an. La société amortit l'emprunt en cinq amortissements constants.

Le capital emprunté est donc : $K = 10000 \times 500 = 5000000$ DH

Le nombre d'obligations amorties chaque année est : $n_p = \frac{10000}{5} = 2000$ obligations

Le tableau d'amortissement de cet emprunt est :

Période	Dette début période	Intérêt de la période	Nombre d'obligations amorties	Amortissement de la période	Annuité
1	5 000 000	500 000	2 000	1 000 000	1 500 000
2	4 000 000	400 000	2 000	1 000 000	1 400 000
3	3 000 000	300 000	2 000	1 000 000	1 300 000
4	2 000 000	200 000	2 000	1 000 000	1 200 000
5	1 000 000	100 000	2 000	1 000 000	1 100 000

On constate que les annuités sont en progression arithmétique de raison négative :

$- 2\,000 \times 500 \times 0{,}1 = -100\,000$ DH

6.5. MESURES D'ENCOURAGEMENT POUR L'ACHAT DES OBLIGATIONS.

Pour encourager l'achat des obligations, la société émettrice de l'emprunt obligataire peut utiliser deux types de mesure d'encouragement :

- Remboursement de l'obligation à une valeur supérieure à sa valeur nominale ;
- Emission de l'obligation à une valeur inférieure à sa valeur nominale.

6.5.1. Remboursement de l'obligation à une valeur supérieure à sa valeur nominale.

L'obligation est émise à sa valeur nominale C mais elle est remboursée à une valeur R supérieure à C, telle que

$$R > C$$

La différence entre la valeur nominale et la valeur de remboursement est une prime de remboursement :

$$\text{Prime} = R - C$$

L'annuité constante et les intérêts sont calculés à partir de la valeur nominale C. L'annuité de remboursement à une période p sera donc égale à l'annuité constante plus la prime totale de cette période.

Prime totale = Prime × Nombre d'obligations amorties à la période p

Prime totale = $(R - C) \times n_p$

6.5.1.1. Cas de l'amortissement par annuités constantes.

Comme la prime totale varie, chaque année, en progression géométrique de raison (1+t). L'annuité de remboursement a_p n'est donc plus constante.

$a_p = n_p \times C + r_{p-1} \times C \times t \ + \ (R-C) \times n_p$

$a_p = r_{p-1} \times C \times t \ + \ n_p \times R$

Pour rendre l'annuité de remboursement constante, on peut procéder de la manière suivante :

$a_p = r_{p-1} \times C \times t \ + \ n_p \times R$

$a_{p+1} = r_p \times C \times t \ + \ n_{p+1} \times R$

On veut : $a_p = a_{p+1}$ et l'on a : $r_p = r_{p-1} - n_p$

$r_{p-1} \times C \times t \ + \ n_p \times R = r_p \times C \times t \ + \ n_{p+1} \times R$

$(r_p + n_p) \times C \times t \ + \ n_p \times R = r_p \times C \times t \ + \ n_{p+1} \times R$

$n_p \times C \times t \ + \ n_p \times R = n_{p+1} \times R$

soit : $n_{p+1} = n_p \times \frac{C \times t + R}{R} = n_p \times (1 + t\frac{C}{R})$

On pose : $t' = t\frac{C}{R}$

Les nombres d'obligations amorties sont donc en progression géométrique de raison (1 + t'). Le premier amortissement est :

$$n_1 = N\frac{t'}{(1+t')^n - 1}$$

Exemple 4 : Une société lance un emprunt obligataire de 10000 obligations. La valeur de l'obligation est fixée à 500 DH. Le taux d'intérêt est de 10% l'an. La société amortit l'emprunt en cinq annuités constantes. Le remboursement d'une obligation s'effectue à 550 DH.

La valeur nominale d'une obligation est : C = 500 DH
Le capital emprunté est donc : K = 10 000 × 500 = 5 000 000 DH
La valeur de remboursement est : R = 550 DH

$$t' = t\frac{C}{R} = 0{,}1 \times \frac{500}{550} = 0{,}091$$

Le nombre d'obligations amorties chaque année est :

$$n_1 = 10000 \times \frac{0{,}091}{(1+0{,}091)^5 - 1}$$

$$n_1 = 1667{,}90 \text{obligations}$$

n_2 = 1 667,90 × (1+0,091) = 1 819,53 obligations
n_3 = 1 819,53 × (1+0,091) = 1 984,94 obligations
n_4 = 1 984,94 × (1+0,091) = 2 165,39 obligations
n_5 = 2 165,39 × (1+0,091) = 2 362,24 obligations

Ces nombres doivent être arrondis à des nombres entiers, pour cela, on calcule les nombres d'obligations cumulés arrondis et par différence on obtient les nombres d'obligations entiers.

Le tableau de la page suivante donne ces calculs arrondis. :

Nombre d'obligations théoriques	**Nombre d'obligations théoriques cumulées**	**Nombre d'obligations cumulées arrondies**	**Nombre d'obligations entières**
1 667,90	1 667,90	1 668	1 668
1 819,53	3 487,43	3 487	1 819
1 984,94	5 472,37	5 472	1 985
2 165,39	7 637,76	7 638	2 166
2 362,24	1 0000	10 000	2 362

Le tableau d'amortissement de cet emprunt est :

Période	**Dette début période**	**Intérêt de période**	**Nombre d'obligations amorties**	**Amortissement de la période**	**Remboursement de la période**	**Annuité**
1	5 000 000	500 000	1 668	834 000	917 400	1 417 400
2	4 166 000	416 600	1 819	909 500	1 000 450	1 417 050
3	3 256 500	325 650	1 985	992 500	1 091 750	1 417 400
4	2 264 000	226 400	2 166	1 083 000	1 191 300	1 417 700
5	1 181 000	118 100	2 362	1 181 000	1 299 100	1 417 200

On constate qu'il y a des légères modifications de l'annuité constante qui sont dues aux arrondis effectués sur les nombres d'obligations.

6.5.1.2 taux de rendement.

Du fait que l'obligation est remboursée à une valeur supérieure à sa valeur nominale, l'obligataire réalise un taux de rendement supérieur au taux d'intérêt t. Ce taux dépend de la durée de vie de l'obligation.

A la date d'émission de l'emprunt, l'obligation est achetée à sa valeur nominale C. A la fin de chaque année et jusqu'à l'année de remboursement p, l'obligataire reçoit le coupon annuel d'intérêt C×t. A la date de remboursement de l'obligation, l'obligataire reçoit, en plus du coupon annuel d'intérêt, la valeur de remboursement R.

Le taux de rendement t_{rd} est tel que :

$$C \times (1 + t_{rd})^p = C \times t \; [(1 + t_{rd})^{p-1} + (1 + t_{rd})^{p-2} + \ldots\ldots\ldots + 1] + R$$

$$C \times (1 + t_{rd})^p = C \times t \times \frac{(1 + t_{rd})^p - 1}{t_{rd}} + R$$

Exemple 5 : Reprenons les données de l'exemple 4, à savoir :

C = 500 DH R = 550 DH t = 0,10

*** t_{rd1} : taux de rendement d'une obligation amortit après une année :**

$500 \times (1+t_1) = 500 \times 0,1 + 550$

$(1+t_{rd1}) = 1,2$

$t_{rd1} = 0,2 = 20\ \%$

*** t_{rd2} : taux de rendement d'une obligation amortit après deux années :**

$500 \times (1 + t_{rd2})^2 = 500 \times 0,1 \; [(1 + t_{rd2}) + 1] + 550$

$500 \times (1 + t_{rd2})^2 - 50 \times (1 + t_{rd2}) - 600 = 0$

$10 \times (1 + t_{rd2})^2 - (1 + t_{rd2}) - 12 = 0$

Après résolution de cette équation de second degré, on obtient :

$(1+t_{rd2}) = 1,15$

$t_{rd2} = 0,15 = 15\ \%$

*** t_{rd5} : taux de rendement d'une obligation amortit après cinq années :**

$$500 \times (1 + t_{rd5})^5 = 500 \times 0{,}1 \times \frac{(1 + t_{rd5})^5 - 1}{t_{rd5}} + 550$$

$$10 \times (1 + t_{rd5})^5 - \frac{(1 + t_{rd5})^5 - 1}{t_{rd5}} - 11 = 0$$

En essayant différentes valeurs on obtient :

Pour une valeur de t_{rd5} de 0,12 on a :

$$10 \times (1 + 0{,}12)^5 - \frac{(1 + 0{,}12)^5 - 1}{0{,}12} - 11 = 0{,}27$$

Pour une valeur de t_{rd5} de 0,11 on a :

$$10 \times (1 + 0{,}11)^5 - \frac{(1 + 0{,}11)^5 - 1}{0{,}11} - 11 = -0{,}38$$

La valeur de t_{rd5} est donc comprise entre 0,11 et 0,12. Par interpolation linéaire on obtient :

t_{rd5} = 0,1158 = 11,58 %

On remarque que le taux de rendement diminue lorsque la durée de vie de l'obligation augmente.

6.5.2. Emission de l'obligation à une valeur inferieure a sa valeur nominale.

A fin de vendre le plus rapidement possible les obligations, la société émettrice de l'emprunt peut vendre l'obligation à une valeur E inférieure à sa valeur nominale C. Cette mesure n'a aucun effet sur le remboursement de l'emprunt. L'annuité, les intérêts et le tableau d'amortissement sont calculés au taux d'intérêt t.

6.5.2.1. Taux de rendement a l'émission.

L'obligataire achète l'obligation à une valeur d'émission E, il reçoit des intérêts calculés au taux t sur la valeur nominale C qui est supérieure à la valeur d'émission E. L'obligataire réalise donc un placement à un taux supérieur au taux nominal t. Ce taux est appelé taux de rendement à l'émission.

A l'émission de l'emprunt, les N obligations émises rapportent un capital : $K = N \times E$

La société émettrice de l'emprunt devra rembourser un capital : $N \times C$

L'annuité de remboursement constante est :

$$a = N \times C \times \frac{t}{1-(1+t)^{-n}}$$

Le taux de rendement à l'émission t_{rd} est tel que :

$$K = a \times \frac{1-(1+t_{rd})^{-n}}{t_{rd}}$$

$$N \times E = N \times C \times \frac{t}{1-(1+t)^{-n}} \times \frac{1-(1+t_{rd})^{-n}}{t_{rd}}$$

$$\frac{1-(1+t_{rd})^{-n}}{t_{rd}} = \frac{E}{C} \times \frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$$

Ou $$\frac{t_{rd}}{1-(1+t_{rd})^{-n}} = \frac{C}{E} \times \frac{t}{1-(1+t)^{-n}}$$

La table financière numéro 4 donne les valeurs de $\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$

La table financière numéro 5 donne les valeurs de $\frac{t}{1-(1+t)^{-n}}$

Exemple 6 : Une société lance un emprunt obligataire de 10 000 obligations. La valeur de l'obligation est fixée à 500 DH. Le taux d'intérêt est de 10% l'an. La société amortit l'emprunt en cinq annuités constantes. L'obligation est émise à une valeur de 450 DH.

La valeur nominale d'une obligation est : C = 500 DH
La valeur d'émission d'une obligation est : E = 450 DH
Le taux d'intérêt nominal est : t = 10%

Le taux de rendement à l'émission t_{rd} est tel que :

$$\frac{1-(1+t_{rd})^{-5}}{t_{rd}} = \frac{450}{500} \times \frac{1-(1+0{,}1)^{-5}}{0{,}1} = 3{,}411708$$

En consultant la table financière numéro 4, on trouve :

Pour une valeur de t de 0,14 on a : $\frac{1-(1+t)^{-5}}{t} = 3{,}433081$

Pour une valeur de t de 0,145 on a : $\frac{1-(1+t)^{-5}}{t} = 3{,}392225$

La valeur de t_{rd} est donc comprise entre 0,14 et 0,145. Par interpolation linéaire on obtient :

t_{rd} = 0,1426 = 14,26 %

6.5.2.2. Taux de revient a l'émission.

L'émission d'un emprunt obligataire est souvent assurée par les banques qui prélèvent des commissions pour rémunérer leur intervention. Ces commissions sont supportées par la société émettrice de l'emprunt.

Les frais d'émission entraînent donc un taux d'intérêt, pour la société émettrice de l'emprunt, supérieur au taux nominal t. Ce taux est appelé taux de revient à l'émission.

En désignant par f les frais d'émission pour chaque obligation et par E la valeur d'émission d'une obligation, à l'émission de l'emprunt les N obligations émises rapportent un capital :

$K = N \times (E - f)$

La société émettrice de l'emprunt devra rembourser un capital : $N \times C$

L'annuité de remboursement constante est :

$$a = N \times C \times \frac{t}{1-(1+t)^{-n}}$$

Le taux de revient à l'émission t_{rv} est tel que :

$$K = a \times \frac{1-(1+t_{rv})^{-n}}{t_{rv}}$$

$$N \times (E - f) = N \times C \times \frac{t}{1-(1+t)^{-n}} \times \frac{1-(1+t_{rv})^{-n}}{t_{rv}}$$

$$\frac{1-(1+t_{rv})^{-n}}{t_{rv}} = \frac{E-f}{C} \times \frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$$

Ou $$\frac{t_{rv}}{1-(1+t_{rv})^{-n}} = \frac{C}{E-f} \times \frac{t}{1-(1+t)^{-n}}$$

La table financière numéro 4 donne les valeurs de $\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$

La table financière numéro 5 donne les valeurs de $\frac{t}{1-(1+t)^{-n}}$

Exemple 7 : Une société lance un emprunt obligataire de 10000 obligations. La valeur de l'obligation est fixée à 500 DH. Le taux d'intérêt est de 10% l'an. La société amortit l'emprunt en cinq annuités constantes. L'obligation est émise à une valeur de 450 DH. Les frais d'émission sont fixés à 10 % de la valeur nominale de l'obligation.

La valeur nominale d'une obligation est : C = 500 DH
La valeur d'émission d'une obligation est : E = 450 DH
Le taux d'intérêt nominal est : t = 0,10
Les frais d'émission sont : f = 500×0,10 = 50 DH par obligation

Le taux de revient à l'émission t_{rv} est tel que :

$$\frac{1-(1+t_{rv})^{-5}}{t_{rv}} = \frac{450-50}{500} \times \frac{1-(1+0{,}1)^{-5}}{0{,}1} = 3{,}032629$$

En consultant la table financière numéro 4, on trouve :

Pour une valeur de t de 0,19 on a : $\frac{1-(1+t)^{-5}}{t} = 3{,}057635$

Pour une valeur de t de 0,195 on a : $\frac{1-(1+t)^{-5}}{t} = 3{,}023817$

La valeur de t_{rv} est donc comprise entre 0,19 et 0,195. Par interpolation linéaire on obtient :

t_{rv} = 0,1937 = 19,37 %

6.6. VALEUR D'UNE OBLIGATION A UNE DATE DONNEE.

La valeur d'une obligation à une date donnée est égale à la valeur des coupons actualisés au taux de rentabilité r que les investisseurs exigent de leurs placements plus la valeur nominale de l'obligation actualisée au même taux.

	C t	C t	……………………	C t + C
0	1	2	……………………	n

A la date 0, la valeur de l'obligation est :

$$V_0 = \sum_{k=1}^{n} C \times t \times (1+r)^{-k} + C \times (1+r)^{-n}$$

$$V_0 = C \times t \times \sum_{k=1}^{n} (1+r)^{-k} + C \times (1+r)^{-n}$$

$$V_0 = C \times t \times \frac{1-(1+r)^{-n}}{r} + C \times (1+r)^{-n}$$

A une date $t = p$ la valeur de l'obligation est :

$$V_p = \sum_{k=1}^{n-p} C \times t \times (1+r)^{-k} + C \times (1+r)^{-(n-p)}$$

$$V_p = C \times t \times \frac{1-(1+r)^{-(n-p)}}{r} + C \times (1+r)^{-(n-p)}$$

Exemple 7 : Un emprunt obligataire a les caractéristiques suivantes :

Valeur nominale d'une obligation :	C = 5 000 DH
Durée de l'emprunt :	n = 10 ans
Taux d'intérêt nominal :	t = 10 %
Taux de rentabilité exigé :	r = 12 %

A la date 0, la valeur de l'obligation est :

$$V_0 = 5\,000 \times 0{,}10 \times \frac{1-(1+0{,}12)^{-10}}{0{,}12} + 5\,000 \times (1+0{,}12)^{-10} = 4\,435 \text{ DH}$$

A la date $t = 4$ la valeur de l'obligation est :

$$V_4 = 5\,000 \times 0{,}10 \times \frac{1-(1+0{,}12)^{-(10-4)}}{0{,}12} + 5\,000 \times (1+0{,}12)^{-(10-4)} = 4\,589 \text{ DH}$$

6.7. VARIATION DU PRIX D'UNE OBLIGATION SUR LES MARCHES FINANCIERS.

Le prix d'une obligation varie en fonction de la rentabilité attendue sur les marchés financiers. Une variation du taux sur les marchés fait varier le prix d'une obligation.

Quand les taux augmentent la valeur de l'obligation baisse et inversement,quand les taux baissent la valeur de l'obligation augmente.

Exemple 8 : Un emprunt obligataire a les caractéristiques suivantes :

Valeur nominale d'une obligation : C = 5000 DH
Durée de l'emprunt : n = 10 ans
Taux d'intérêt nominal : t = 10 %

Le tableau suivant donne l'évolution de la valeur de l'obligation au cours du temps avec un taux de rentabilité de 12% et un taux de rentabilité de 8%.

Année	r = 12 %	r = 8 %
0	4435	5671
1	4467	5625
2	4503	5575
3	4544	5521
4	4589	5462
5	4640	5400
6	4696	5331
7	4760	5258
8	4831	5178
9	4911	5093
10	5000	5000

Pour un taux de rentabilité de 12%, plus le temps passe, plus le prix de l'obligation augmente et se rapproche de sa valeur nominale.

Pour un taux de rentabilité de 8%, plus le temps passe, plus le prix de l'obligation diminue et se rapproche de sa valeur nominale.

Pour un taux de rentabilité de 10%, le prix de l'obligation reste constant et égal à sa valeur nominale.

De façon générale, pour un taux de rentabilité attendu supérieur au taux d'intérêt nominal, la valeur de l'obligation baisse. Par contre, pour un taux de rentabilité attendu inférieur au taux d'intérêt nominal, la valeur de l'obligation augmente.

6.8. EXERCICES D'APPLICATION.

6.8.1 Exercice.

Une banque lance un emprunt obligataire ayant les caractéristiques suivantes :

Montant total de l'emprunt : K = 10 000 000 DH
Nombre d'obligations N = 20 000
Taux d'intérêt t = 0,075
Durée de l'emprunt : n = 5

Dresser le tableau d'amortissement de cet emprunt pour un amortissement à annuités constantes.

Réponses :

Période	Dette début période	Intérêt de la période	Nombre d'obligations amorties	Amortissement de la période	Annuité
1	10 000 000	750 000,00	3 443	1 721 500	2 471 500,00
2	8 278 500	620 887,50	3 702	1 851 000	2 471 887,50
3	6 427 500	482 062,50	3 979	1 989 500	2 471 562,50
4	4 438 000	33 285,00	4 278	2 139 000	2 471 850,00
5	2 299 000	172 425,00	4 598	2 299 000	2 471 425,00

6.8.2 Exercice.

Une banque lance un emprunt obligataire ayant les caractéristiques suivantes :

Montant total de l'emprunt : K = 5 000 000 DH
Valeur nominale d'obligations C = 500 DH
Taux d'intérêt t = 0,09
Durée de l'emprunt : n = 8
Dresser le tableau d'amortissements constants de cet emprunt.

Réponses :

Période	Dette début de période	Intérêts de la période	Montant amortit	Montant annuité
1	5 000 000	450 000	625 000	1 075 000
2	4 375 000	393 750	625 000	1 018 750
3	3 750 000	337 500	625 000	962 500
4	3 125 000	281 250	625 000	906 250
5	2 500 000	225 000	625 000	850 000
6	1 875 000	168 750	625 000	793 750
7	1 250 000	112 500	625 000	737 500
8	625 000	56 250	625 000	681 250

6.8.3. Exercice.

L'Etat lance un emprunt obligataire ayant les caractéristiques suivantes :

Montant total de l'emprunt : K = 100 000 000 DH
Valeur nominale de l'obligation : C = 1 000 DH
Taux d'intérêt t = 10%
Durée : n = 25 ans

a) Représenter les 2 premières lignes du tableau d'amortissement à annuités constantes ;
b) Représenter les 12è et 13è lignes du tableau d'amortissement à annuités constantes ;
c) Représenter les 2 dernières lignes du tableau d'amortissement à annuités constantes.

Réponses :

Période	Dette début de période	Intérêts de période	Nombre obligations amorties	Montant amortit	Annuité
1	100 000 000	10 000 000	1 017	1 017 000	11 017 000
2	98 983 000	9 898 300	1 118	1 118 000	11 016 300
…	…	…	…	…	…
12	81 160 000	8 116 000	2 901	2 901 000	11 017 000
13	78 260 000	7 826 000	3 191	3 191 000	11 017 000
…	…	…	…	…	…
24	19 120 000	1 912 000	9 105	9 105 000	11 017 000
25	10 020 000	1 002 000	10 015	10 015 000	11 017 000

6.8.4. Exercice.

L'Etat lance un emprunt obligataire ayant les caractéristiques suivantes :

Montant total de l'emprunt : K = 60 000 000 DH
Valeur nominale de l'obligation : C = 2 500 DH
Taux d'intérêt t = 9,5%
Durée : n = 30 ans

a) Représenter les 2 premières lignes du tableau d'amortissement à amortissements constants ;
b) Représenter les 14è et 15è lignes du tableau d'amortissement à amortissements constants ;
c) Représenter les 2 dernières lignes du tableau d'amortissement à amortissements constants.

Réponses :

Période	Dette début période	Intérêt période	Montants amortis	Annuité
1	60 000 000	5 700 000	2 000 000	7 700 000
2	58 000 000	5 510 000	2 000 000	7 510 000
…	…	…	…	…
14	34 000 000	3 230 000	2 000 000	5 230 000
15	32 000 000	3 040 000	2 000 000	5 040 000
…	…	…	…	…
29	4 000 000	380 000	2 000 000	2 380 000
30	2 000 000	190 000	2 000 000	2 190 000

6.8.5. Exercice.

Une société émet 50 000 obligations de valeur nominale 600 DH au taux nominal de 12 % et pour une durée de 10 ans. Le remboursement s'effectue en annuités constantes.

a) Présenter les trois premières lignes du tableau d'amortissement.
b) Présenter la dernière ligne du tableau d'amortissement.

Réponses :
a)

Période	Dette début de période	Intérêts de période	Nombre obligations amorties	Montant amortis	Annuité
1	30 000 0000	3 600 000	2 849	1 709 400	5 309 400
2	2 829 0600	3 394 872	3 191	1 914 600	5 309 472
3	2 637 6000	3 165 120	3 574	2 144 400	5 309 520

b)

Période	Dette début de période	Intérêts de période	Nombre obligations amorties	Montant amorti	Annuité
10	4 741 000	568 920	7 901	4 740 600	5 309 520

6.8.6 Exercice.

Une société a émis un emprunt obligataire au taux de 11 % et pour une durée de 10 ans. Après 3 ans, la société a amorti, par anuités constantes, 1999 obligations (nombre théorique : 1998,62).

a) Calculer le nombre total d'obligations émises.
b) L'annuité constante de remboursement est égale à 679205,71 DH Calculer la valeur nominale d'une obligation.
c) Présenter le tableau d'amortissement de cet emprunt.

Réponses :

a) 10000 ; b) 400 DH ;
c)

Période	Dette début de période	Intérêts de période	Nombre obligations amorties	Montant amorti	Annuité
1	4 000 000	440 000	508	203 200	643 200
2	3 796 800	417 648	664	265 600	683 248
3	3 531 200	388 432	737	294 800	683 232
4	3 236 400	356 004	818	327 200	683 204
5	2 909 200	320 012	908	363 200	683 212
6	2 546 000	280 060	1008	403 200	683 260
7	2 142 800	235708	1119	447 600	683 308
8	1 695 200	186 472	1241	496 400	682 872
9	1 198 800	131 868	1378	551 200	683 068
10	647 600	71 236	1530	612 000	683 236

6.8.7. Exercice.

Un emprunt de 10 000 000 DH est divisé en 20 000 obligations. Le taux d'intérêt est de 8 %. Le remboursement s'effectue sur 5 ans. Construire le tableau d'amortissement selon le système de remboursement en :

a) Amortissements constants ;
b) Annuités constantes.

Réponses :
a)

Période	Dette début période	Intérêt période	Montant amorti	annuité
1	1 000 0000	800 000	2 000 000	2 800 000
2	800 0000	640 000	2 000 000	2 640 000
3	600 0000	480 000	2 000 000	2 480 000
4	400 0000	320 000	2 000 000	2 320 000
5	200 0000	160 000	2 000 000	2 160 000

b)

Période	Dette début de période	Intérêts de période	Nombre obligations amorties	Montant amorti	Annuité
1	10 000 000	800 000	3 409	1 704 500	2 504 500
2	8 295 500	663 640	3 682	1 841 000	2 504 640
3	6 454 500	516 360	3 977	1 988 500	2 504 860
4	4 466 000	357 280	4 295	2 147 500	2 504 780
5	2 318 500	185 480	4 638	2 319 000	2 504 480

6.8.8. Exercice.

Un emprunt obligataire a les caractéristiques suivantes :
Montant de l'emprunt K = 4.000.000 DH ;
Nombre d'obligations N = 10.000 obligations ;
Durée n = 4 ans ;
Taux d'intérêt t = 9 % ;
Remboursement par amortissements constants au prix de 430 DH l'obligation.

a) Présenter le tableau d'amortissement.
b) Quel est le taux de rendement d'une obligation amortit au bout de 2 ans ?
c) Quel est le taux de rendement d'une obligation amortit au bout de 4 ans ?

Réponses :
a)

Période	Dette début de période	Intérêts de période	Montant amorti	Annuité
1	4 000 000	360 000	1 000 000	1 360 000
2	3 000 000	270 000	1 000 000	1 270 000
3	2 000 000	180 000	1 000 000	1 180 000
4	1 000 000	90 000	1 000 000	1 090 000

b) t_{rd2} = 16,5% ; c) t_{rd4} = 15,05%

6.8.9. Exercice.

Un emprunt de 50.000.000 de dirhams est divisé en 20000 obligations. Le taux d'intérêt nominal est de 11 %. La durée de l'emprunt est de 10 ans. La valeur d'émission d'une obligation est de 2200 DH Les frais d'émission sont fixés à 60 DH par obligation. Le remboursement s'effectue par annuités constantes.

a) Calculer le taux de rendement à l'émission.
b) Calculer le taux de revient à l'émission.

Réponses :
a) t_{rd} = 14,17% ; b) t_{rv} = 14,88%

6.8.10. Exercice.

Une société a besoin d'une somme nette de 4.000.000 de dirhams, pour cela elle a décidé de lancer un emprunt obligataire d'une durée de 10 ans. Elle a fixé la valeur nominale d'une obligation à 500 DH mais elle la vend à 450 DH Le remboursement s'effectue par annuités constantes.

a) Sachant que les frais de commissions sont de 10 % de la valeur nominale de l'emprunt, combien d'obligations la société doit-elle émettre ?
b) Sachant que le nombre d'obligations amorties la première année est de 570 (nombre théorique : 569,84), calculer le taux d'intérêt nominal.
c) Quel est le nombre d'obligations encore vivantes après 6 ans ?
d) Calculer le taux de rendement à l'émission.
e) Calculer le taux de revient à l'émission.

Réponses :
a) N = 10 000 ; b) t) 12% ; c) r_6 = 5 376 ; d) t_{rd} =;15,66% e) t_{rv} = 19,19% ;

6.8.11. Exercice.

Une société a émis un emprunt obligataire dont les caractéristiques sont les suivantes :

Nombre total d'obligations émises	:	N = 200 000 obligations ;
Valeur nominale d'une obligation	:	C = 2000 DH ;
Taux d'intérêt nominal	:	t = 8 % ;
Durée de l'emprunt		n = 20 ans ;
Valeur d'émission d'une obligation	:	E = 1900 DH

a) Représenter les lignes 1, 10, et 20 du tableau d'amortissement par annuités constantes.
b) Calculer à l'émission de l'emprunt le taux moyen de rendement.
c) Sachant que les frais d'émission de l'emprunt s'élève à 3 %, calculer le taux de revient à l'émission.

d) Calculer la valeur d'une obligation 8 ans après l'émission de l'emprunt pour un taux de rentabilité de 7 %, puis de 10 %

Réponses :
a)

Période	Dette début de période	Intérêts de période	Nombre obligations amorties	Montant amorti	Annuité
1	200 000	16 000	2	4 000	2 0000
10	150 000	12 000	4	8 000	2 0000
20	25 000	2 000	9	18 000	2 0000

b) t_{rd} = 8,69% ; c) t_{rv} = 14,65% ; d) $V_{8(7\%)}$ = 2158,85 DH : $V_{8(10\%)}$ = 1727,45 DH

6.8.12. Exercice.

Un emprunt obligataire a les caractéristiques suivantes :

Montant de l'emprunt : K = 2.000.000 DH ;
Nombre d'obligations : N = 5.000 obligations ;
Durée : n = 5 ans ;
Taux d'intérêt : t = 10 % ;
Remboursement par amortissements constants au prix de 420 DH l'obligation.
Frais d'émission : 5 % de la valeur nominale de l'emprunt.

a) Vous détenez un portefeuille de 100 obligations, quelle est la valeur de votre portefeuille si le taux du marché est de 7 % et si 20 obligations par an étaient amorties ?
b) Quel est le taux de rendement d'une obligation amortit au bout de 2 ans ?
c) Donner l'évolution du prix d'une obligation au cours des 5 années à un taux de rentabilité de 9 % puis de 11 %.

Réponses :
a) 43085,04 DH ; b) 12,35 %

c)

Année	r = 9 %	r = 11 %
0	415,56	385,22
1	412,96	387,59
2	410,13	390,23
3	407,04	393,15
4	403,67	396,40
5	400	400

6.8.13. Exercice.

Un emprunt obligataire a les caractéristiques suivantes :

Montant de l'emprunt	:	K = 8.000.000 DH ;
Nombre d'obligations	:	N = 10.000 obligations ;
Durée	:	n = 8 ans ;
Taux d'intérêt	:	t = 7,5 % ;
Emission à		E = 750 DH l'obligation.

Frais d'émission : 4 % de la valeur nominale de l'emprunt.
Amortissement par annuités constantes.

a) Calculer le taux de rendement à l'émission ;
b) Calculer le taux de revient à l'émission ;
c) A quelle date a-t-on remboursé la moitié des obligations ?

Réponses :
a) 9,21 % ; b) 10,4 % ; c) 5 ans

6.8.14. Exercice.

Le 13 juillet 2007, une entreprise a émis un emprunt obligataire dont les caractéristiques sont :

Prix d'émission	:	990,40 DH
Valeur nominale	:	1 000 DH
Date de jouissance	:	13 juillet 2007
Taux nominal	:	3,75 %
Durée	:	5 ans

a) Calculer le taux de rendement à l'émission ;

b) En supposant que le 13 juillet 2010 et le 13 juillet 2011 les taux de marchés obligataires sont respectivement passés à 4,5 % et 3 % pour ce type de produit, calculer à chacune de ces dates la valeur de revente de l'obligation.

Réponses :
a) 3,97 ; b) 985,95 DH et 1007,28 DH

6.8.15. Exercice.

Un emprunt obligataire a les caractéristiques suivantes :

Montant de l'emprunt	:	1 000 000 000 DH ;
Nombre d'obligations	:	1 000 000 obligations ;
Date de jouissance	:	17 février 2007 ;
Durée	:	10 ans ;
Taux d'intérêt	:	4,375 % ;

a) Calculer le taux de rendement à l'émission ;
b) Le 30/09/2007 la valeur de l'obligation sur le marché est de 907,40 DH, calculer le taux du marché à cette date.

Réponses :
a) 4,40 % ; b) 6,08 %

CHAPITRE 7
RENTABILITE DES INVESTISSEMENTS.

7.1. DEFINITION.

Investir, c'est consentir une dépense susceptible d'engendrer des revenus futurs. Le plus souvent, il s'agit d'acquérir des moyens de production ou de commercialisation. Ces moyens peuvent être de nature très variée.

Investir, c'est décaisser aujourd'hui une somme d'argent avec l'espoir d'encaisser ultérieurement, sur plusieurs exercices, des sommes plus importantes permettant d'augmenter ainsi la valeur de l'entreprise, et par la suite, le patrimoine des propriétaires.

7.2. CLASSIFICATION DES INVESTISSEMENTS.

On peut classer les investissements selon plusieurs critères.

7.2.1. Classification comptable ou par nature.

On distingue trois types d'investissements :

- Investissements corporels : il s'agit d'objets matériels tels que les terrains, les bâtiments, les machines, les véhicules et les mobiliers.

- Investissements financiers : il s'agit des titres ou droits de créances tels que les actions, les obligations, les prêts, et les produits bancaires divers.

- Investissements incorporels : il s'agit de tout ce qui n'est ni corporel, ni financier tels que les fonds de commerce, les licences de fabrication, les brevets, les logiciels informatiques, et la formation.

7.2.2. Classification par fonction.

On distingue quatre types d'investissements :

- Investissements de production ;
- Investissements administratifs ;
- Investissements commerciaux ;
- Investissements logistiques.

7.2.3. Classification économique.

On distingue deux types d'investissements :

- Investissements de remplacement : se sont des investissements destinés à remplacer des installations existantes dans le but d'augmenter la productivité. Le nouvel investissement doit incorporer le progrès technique, la sécurité du travail et la protection de l'environnement.

- Investissements de croissance : se sont des investissements destinés à renforcer les installations existantes par de nouvelles installations pour faire face à un accroissement de la production.

7.3. ETUDE DE LA RENTABILITE DES INVESTISSEMENTS.

Investir consiste à avancer des sommes d'argents en vue de revenus futurs. L'investissement génère des encaissements sur plusieurs exercices. Le cycle d'investissement s'étale donc sur plusieurs années. Lors de l'étude de projets d'investissements, on est amené à essayer de prévoir et quantifier les recettes et les dépenses futurs sur toute la durée du cycle de l'investissement. Ces prévisions seront nécessaires à l'étude de rentabilité.

L'investissement est un pari sur l'avenir, qui n'est jamais connu avec certitude. En effet, le décideur ne peut que supposer ce que seront les encaissements à venir. Toute décision d'investissement comporte une analyse du risque.

Lors de l'étude de rentabilité, on distingue deux types de calculs :

- Calculs déterministes : sans tenir compte de la notion de risque ;
- Calculs en avenir incertain : c'est une analyse du risque.

7.3.1. Calculs déterministes.

Pour un calcul déterministe, un investissement est caractérisé par la suite des encaissements E_k et des dépenses D_k qu'entraîne la réalisation du projet. On désigne par flux F_k de trésorerie d'une année donnée k, la différence entre les encaissements et les décaissements de la même année.

$$F_k = E_k - D_k$$

Une fois les flux de trésorerie associés à un projet d'investissement sont définis, on peut évaluer la rentabilité économique du projet, pour cela, il y a plusieurs critères d'évaluation.

7.3.1.1. Critère du taux de rendement comptable en valeur non actualisée.

Le taux de rendement comptable mesure un revenu moyen annuel par dirham investi. Il est égal au rapport du revenu moyen annuel net au coût initial de l'investissement.

Le revenu moyen annuel net est égal à la somme des flux de trésorerie divisée par le nombre d'années d'exploitation.

Si on désigne par n, la durée d'exploitation d'un investissement :

$$\textit{Revenu moyen annuel net} = \frac{\sum_{k=0}^{n} F_k}{n}$$

$$\text{Taux de rendement comptable} = \frac{\text{Revenu moyen annuel net}}{\text{Coût initial de l'investissement}}$$

Pour pouvoir prendre une décision de réaliser ou de rejeter un projet, il faut définir un taux de rémunération minimum de son capital.

Exemple 1 : Une entreprise envisage un investissement qui pourra être exploité pendant cinq ans. Le coût initial de cet investissement est de 100 000,00 DH. Les flux de trésorerie prévisionnels sont estimés à 30 000 DH par an.

$$\textit{Revenu net total} = \sum_{k=0}^{5} F_k = -100\ 000 + (5 \times 30\ 000) = 50\ 000\ DH$$

$$\textit{Revenu moyen annuel net} = \frac{\sum_{k=0}^{5} F_k}{5} = \frac{50\ 000}{5} = 10\ 000\ DH\ \textit{par an}$$

$$\textit{Taux de rendement comptable} = \frac{\textit{Revenu moyen annuel net}}{\textit{Coût initial de l'investissement}} = \frac{10\ 000}{100\ 000} = 0{,}10 = 10\,\%$$

Le taux de rendement comptable de cet investissement est de 10 %, c'est à dire chaque cent dirhams investis rapporte 10 DH.

7.3.1.2. Critère du temps de récupération de l'investissement en valeur non actualisée.

Appelé aussi durée de remboursement ou de recouvrement du capital, le temps de récupération est égal à la durée d'exploitation de l'investissement nécessaire pour que les revenus dégagés permettent de récupérer le montant de l'investissement.

L'année de récupération est l'année A à partir de laquelle la somme des flux de trésorerie F_k devient positive.

$$\sum_{k=0}^{A} F_k \geq 0$$

Pour pouvoir prendre une décision de réaliser ou de rejeter un projet, il faut définir un temps de récupération maximum de référence.

Exemple 2 : Une entreprise envisage un investissement qui pourra être exploité pendant cinq ans. Le coût initial de cet investissement est de 100 000,00 DH. Les flux de trésorerie prévisionnels sont estimés à 50 000,00 DH la première année, 40 000,00 DH la deuxième année, 30 000,00 DH la troisième année, 20 000,00 DH la quatrième année, et 10 000,00 DH la dernière année.

Pour déterminer le temps de retour, il faut calculer les flux de trésorerie cumulés.

Année	Flux de trésorerie	Flux de trésorerie cumulés
0	-100 000	-100 000
1	50 000	-50 000
2	40 000	-10 000
3	30 000	20 000
4	20 000	
5	10 000	

La somme des flux de trésorerie devient positive à la troisième année d'exploitation. Le temps de retour se situe donc entre deux ans et trois ans. Par une interpolation linéaire, on peut calculer le temps de retour.

Durant toute la troisième année, c'est à dire 12 mois, on récupère 30 000 DH. Or, pour récupérer l'investissement initial, il reste à récupérer durant la troisième année 10 000 DH, par une règle de trois, le temps de retour est :

$$2 \text{ ans et } \frac{10\,000 \times 12}{30\,000} \text{ mois } = 2 \text{ ans et } 4 \text{ mois}$$

Mais les calculs que nous venons de faire prêchent par défaut important en ce sens que nous additionnons des montants qui interviennent à des périodes différentes sans pour autant leur affecter de coefficient d'actualisation. Pour ces raisons, les deux précédents critères ne sont utilisés que pour un premier calcul approximatif. Pour des calculs plus fins, nous allons introduire d'autres critères :

- Critère de la valeur actuelle nette ou VAN ;
- Taux de rendement interne ou TRI ;
- Critère du taux de rendement relatif ;
- Durée de récupération du capital investi.

7.3.1.3. Critère de la valeur actuelle nette ou VAN.

Un investissement doit générer des encaissements supérieurs aux décaissements. Ces encaissements et décaissements se situent à des périodes différentes, il n'est donc pas possible de faire la somme des flux de trésorerie. Il faut ramener ces flux à une même période qui est la période initiale.

En actualisant les flux nets de trésorerie à la date d'origine, il est alors possible d'en faire la somme. La valeur actuelle nette, désignée couramment par VAN, est égale à la somme des flux nets de trésorerie, F_k, actualisés à un taux d'actualisation t, qui correspond au taux d'intérêt que l'investisseur demande en cas de placement.

$$VAN = \sum_{k=0}^{n} F_k (1+t)^{-k}$$

Un investissement est rentable lorsque sa valeur actuelle nette est positive. L'investissement dont la valeur actuelle nette est la plus élevé sera considéré comme le plus rentable.

Exemple 3 :

Un investisseur envisage la construction d'une unité de production de chaussures. Une étude de marché a permis d'avoir les informations suivantes :

- Coût de l'investissement : 6 000 000 DH ;
- Durée du projet : 5 ans ;
- ventes : 20 000 paires de chaussures la première année, puis une augmentation de 10 % par an;
- Prix de vente : 110 DH la première année, puis une augmentation de 10 % par an ;
- Coût de production : 42 DH par paire de chaussure ;
- Taux d'actualisation : 10 % ;
- Taux d'impôt sur les bénéfices : 35 %.

Pour calculer la valeur actuelle nette, il faut déterminer, pour chaque année, les recettes, les dépenses, et les flux de trésorerie. Le tableau ci dessous regroupe tous ces éléments.

$$\text{Recettes} = \text{Ventes} \times \text{Prix de vente}$$

$$\text{Dépenses} = \text{Ventes} \times \text{coût de production}$$

$$\text{Amortissement} = \frac{\text{Coût d'investissement}}{\text{Durée de l'investissement}}$$

$$\text{Résultat avant impôt} = \text{Recettes - Dépenses - Amortissement}$$

$$\text{Impôt} = \text{Résultat avant impôt} \times \text{taux d'impôt}$$

$$\text{Résultat après impôt} = \text{Résultat avant impôt - Impôt}$$

$$\text{Flux de trésorerie} : F_k = \text{Résultat après impôt} + \text{Amortissement}$$

$$\text{Flux actualisés} = F_k \times (1+t)^{-k}$$

Année	0	1	2	3	4	5
Vente		20 000,00	22 000,00	24 200,00	26 620,00	29 282,00
Prix de vente		110,00	121,00	133,10	146,41	161,05
Recettes		2 200 000,00	2 662 000,00	3 221 020,00	3 897 434,20	4 715 866,10
Dépenses	6 000 000	840 000,00	924 000,00	1 016 400,00	1 118 040,00	1 229 844,00
Amortissements		1 200 000,00	1 200 000,00	1 200 000,00	1 200 000,00	1 200 000,00
Résultat avant impôt	-6 000 000	160 000,00	538 000,00	1 004 620,00	1 579 394,20	2 286 022,10
Impôts		56 000,00	188 300,00	351 617,00	552 787,97	800 107,74
Résultat après impôt		104 000,00	349 700,00	653 003,00	1 026 606,23	1 485 914,36
Amortissement		1 200 000,00	1 200 000,00	1 200 000,00	1 200 000,00	1 200 000,00
Flux de trésorerie	-6 000 000	1 304 000,00	1 549 700,00	1 853 003,00	2 226 606,23	2 685 914,36
Flux actualisés	-6 000 000	1 185 454,55	1 280 743,80	1 392 188,58	1 520 802,01	1 667 741,50

La valeur actuelle nette est :

$$\text{VAN} = -6000000+1185454{,}55+1280743{,}80+1392188{,}58+1520802{,}01+1667741{,}50$$

$$\text{VAN} = 1046930{,}44 \text{ DH}$$

La valeur actuelle nette est positive, le projet est donc rentable au taux d'actualisation de10 %.

7.3.1.4. Critère du taux de rentabilité interne ou TRI.

La valeur actuelle nette est une fonction décroissante du taux d'actualisation, en effet, elle décroît lorsque le taux croît.

Le taux de rentabilité interne, désigné par TRI, est le taux d'actualisation maximum acceptable. C'est un taux qui permet à l'investisseur de récupérer le coût de l'investissement sur la durée de l'étude.

Le taux de rentabilité interne est donc le taux d'actualisation qui annule la valeur actuelle nette. Il est la solution de l'équation :

$$\text{VAN}(t) = 0$$

Le taux de rentabilité interne est le taux d'actualisation à partir duquel l'investissement devient rentable.

Le taux de rentabilité interne permet de décider de choisir ou de rejeter un projet. On choisit d'investir si le TRI est supérieur à l'objectif de taux de rentabilité. L'investissement dont le TRI est le plus élevé sera considéré comme le plus rentable.

Pour déterminer le TRI, il faut trouver deux taux d'actualisation t_1 et t_2 qui donnent, l'un, une VAN positive et l'autre une VAN négative. Le TRI est donc compris entre ces deux taux.

$$t_1 < t_2$$

$$\text{VAN}(t_1) > 0$$

$$\text{VAN}(t_2) < 0$$

$$t_1 < \text{TRI} < t_2$$

On détermine le TRI par interpolation linéaire :

$$\text{TRI} = t_1 + (t_2 - t_1) \times \frac{0 - \text{VAN}(t_1)}{\text{VAN}(t_2) - \text{VAN}(t_1)}$$

Exemple 4 : Un investissement suppose une dépense initiale de 225 000 DH, il permettrait pendant six ans des flux de trésorerie, respectivement de 60 000 DH, 60 000 DH, 55 000 DH, 55 000 DH, 45 000 DH, et 75 000 DH.

A un taux d'actualisation de 14 %, la valeur actuelle nette est :

$$\text{VAN} = -225000 + 60000 \times 1{,}14^{-1} + 60000 \times 1{,}14^{-2} + 55000 \times 1{,}14^{-3} + 55000 \times 1{,}14^{-4} + 45000 \times 1{,}14^{-5} + 75000 \times 1{,}14^{-6}$$

VAN(14%) = 1028 DH.

A un taux d'actualisation de 14,5 %, la valeur actuelle nette est :

$$VAN = -225000 + 60000 \times 1{,}145^{-1} + 60000 \times 1{,}145^{-2} + 55000 \times 1{,}145^{-3} + 55000 \times 1{,}145^{-4} + 45000 \times 1{,}145^{-5} + 75000 \times 1{,}145^{-6}$$

VAN(14,5%) = -2545 DH.

Le TRI est donc compris entre 14 % et 14,5 %. On l'obtient par interpolation linéaire :

$$TRI = 14 + (14{,}5 - 14) \times \frac{0 - 1028}{-2545 - 1028} = 14{,}14\%$$

7.3.1.5. Critère du taux de rentabilité relative.

Lorsqu'on étudie deux projets nécessitant des montants d'investissement différents, on peut étudier la rentabilité d'un projet par rapport à l'autre.

Le taux de rentabilité relative est le taux d'actualisation qui annule le supplément de revenu actualisé obtenu par le supplément d'investissement permettant de passer d'un projet à un autre.

Si un projet P_1 nécessite un montant d'investissement plus élevé qu'un projet P_2, le taux de rentabilité relative est le taux d'actualisation t, solution de l'équation :

$$VAN_1 - VAN_2 = 0$$

Le taux de rentabilité relative est calculé de la même manière que le taux de rentabilité interne en utilisant les flux de trésorerie différentiels.

Exemple 5 : Soient les caractéristiques des deux projets suivants :

Projet A :

- Coût de l'investissement : 1 100 000 DH ;
- Durée de l'investissement : 10 ans ;
- Recettes annuelles : 350 000 DH par an ;
- Dépenses annuelles : 145 000 DH par an.

Projet B :

- Coût de l'investissement : 1 550 000 DH ;
- Durée de l'investissement : 10 ans ;
- Recettes annuelles : 490 000 DH par an ;
- Dépenses annuelles : 210 000 DH par an.

Flux de trésorerie du projet A :

$$F_{kA} = 350000 - 145000 = 205000 \text{ DH par an}$$

Flux de trésorerie du projet B :

$$F_{kB} = 490000 - 210000 = 280000 \text{ DH par an}$$

Flux différentiels :

$$\Delta F_k = F_{kB} - F_{kA} = 280\,000 - 205\,000 = 75\,000 \text{ DH par an.}$$

Le montant de l'investissement supplémentaire est : 1550 000 – 1 100 000 = 450 000 DH

Le taux de rentabilité relative est le taux $t_{B/A}$ qui annule la valeur actuelle nette différentielle $VAN_{B/A}$.

A un taux d'actualisation de 10 %, la valeur actuelle nette différentielle est :

$$VAN_{B/A}(10\%) = -450\,000 + 75\,000 \times \sum_{k=1}^{10} 1{,}10^{-k} = 10\,842{,}53 \text{ DH}$$

A un taux d'actualisation de 11 %, la valeur actuelle nette différentielle est :

$$VAN_{B/A}(11\%) = -450\,000 + 75\,000 \times \sum_{k=1}^{10} 1{,}11^{-k} = -8\,307{,}60 \text{ DH}$$

Le taux de rentabilité relative $t_{B/A}$ est donc compris entre 10 % et 11 %. On l'obtient par interpolation linéaire :

$$t_{B/A} = 10\% + (11\% - 10\%) \times \frac{0 - 10\,842{,}53}{-8\,307{,}60 - 10\,842{,}53} = 10{,}57\%$$

Cela veut dire que :

- au taux d'actualisation 10,57%, les deux projets sont équivalents du point de vue du critère de la VAN ;
- à un taux d'actualisation inférieur à 10,57%, le projet B est plus rentable que le projet A, du point de vue du critère de la VAN ;
- à un taux d'actualisation supérieur à 10,57%, le projet A est plus rentable que le projet B, du point de vue du critère de la VAN.

Mais avant de faire de tels calculs, il est conseillé de calculer d'abord la VAN de chaque projet à ces taux ; en effet, on peut montrer cela dans le tableau synthétique suivant :

Pour le projet A :

Périodes	**t = 13%**		**t = 14%**	
0		-1100000,00		-1100000,00
1	0,884956	181415,93	0,877193	179824,56
2	0,783147	160545,07	0,769468	157740,84
3	0,693050	142075,28	0,674972	138369,16
4	0,613319	125730,34	0,592080	121376,46
5	0,542760	111265,79	0,519369	106470,58
6	0,480319	98465,30	0,455587	93395,24
7	0,425061	87137,43	0,399637	81925,65
8	0,376160	77112,77	0,350559	71864,61
9	0,332885	68241,39	0,307508	63039,13
10	0,294588	60390,61	0,269744	55297,48
VAN_A		12379,91		-30696,29

Pour le projet B :

Périodes	**t = 12%**		**t = 13%**	
0		-1550000,00		-1550000,00
1	0,892857	250000,00	0,884956	247787,61
2	0,797194	223214,29	0,783147	219281,07
3	0,711780	199298,47	0,693050	194054,05
4	0,635518	177945,06	0,613319	171729,24
5	0,567427	158879,52	0,542760	151972,78
6	0,506631	141856,71	0,480319	134489,19
7	0,452349	126657,78	0,425061	119016,98
8	0,403883	113087,30	0,376160	105324,76
9	0,360610	100970,81	0,332885	93207,75
10	0,321973	90152,51	0,294588	82484,74
VAN_B		32062,45		-30651,83

Pour les 2 projets :

	t = 10%	**t = 11%**
VAN_B - VAN_A	10 842,53	- 8 307,60

En fait, pour connaître le projet le plus rentable, il aurait fallu calculer le TRI de chaque projet, on aurait trouvé que :

- Pour le projet A : 13% < TRI_A < 14% soit TRI_A = 13,29% par interpolation ;
- Pour le projet B : 12% < TRI_B < 13% soit TRI_B = 12,51% par interpolation.

Ce qui confirme bien que le projet B est plus rentable que le projet A.

Prenons un autre exemple :

Exemple 6 : Soient les caractéristiques des deux projets suivants :

Projet A :

- Coût de l'investissement : 1 000 000 DH ;
- Durée de l'investissement : 10 ans ;
- Recettes annuelles : 300 000 DH par an ;
- Dépenses annuelles : 96 000 DH par an.

Projet B :

- Coût de l'investissement : 1 470 000 DH ;
- Durée de l'investissement : 10 ans ;
- Recettes annuelles : 510 000 DH par an ;
- Dépenses annuelles : 130 000 DH par an.

Si nous plongeons, sans aucune précaution, pour calculer le taux de rentabilité relative, nous aurions eu la suite des calculs suivants :

Flux de trésorerie du projet A :

$$F_{kA} = 300\,000 - 96\,000 = 204\,000 \text{ DH par an}$$

Flux de trésorerie du projet B :

$$F_{kB} = 510\,000 - 130\,000 = 380\,000 \text{ DH par an}$$

Flux différentiels :

$$\Delta F_k = F_{kB} - F_{kA} = 380\,000 - 204\,000 = 176\,000 \text{ DH par an.}$$

Le montant de l'investissement supplémentaire est : 1470 000 – 1 000 000 = 470 000 DH

Le taux de rentabilité relative est le taux $t_{B/A}$ qui annule la valeur actuelle nette différentielle $VAN_{B/A}$.

A un taux d'actualisation de 35%, la valeur actuelle nette différentielle est :

$$VAN_{B/A}(35\%) = -470\,000 + 176\,000 \times \sum_{k=1}^{10} 1{,}35^{-k} = 7\,847{,}53 \text{ DH}$$

A un taux d'actualisation de 36 %, la valeur actuelle nette différentielle est :

$$VAN_{B/A}(36\%) = -470\,000 + 176\,000 \times \sum_{k=1}^{10} 1{,}36^{-k} = -3\,696{,}16 \text{ DH}$$

Le taux de rentabilité relative $t_{B/A}$ est donc compris entre 35 % et 36 %. On l'obtient par interpolation linéaire :

$$t_{B/A} = 35\% + (36\% - 35\%) \times \frac{0 - 10\,842{,}53}{-8\,307{,}60 - 10\,842{,}53} = 35{,}57\%$$

Cela nous aurait amené à dire que :

- au taux d'actualisation 10,57%, les deux projets sont équivalents du point de vue du critère de la VAN ;
- à un taux d'actualisation inférieur à 10,57%, le projet B est plus rentable que le projet A, du point de vue du critère de la VAN ;
- à un taux d'actualisation supérieur à 10,57%, le projet A est plus rentable que le projet B, du point de vue du critère de la VAN.

Or si l'on calcule, comme nous l'avions conseillé, les calculs de la VAN de chaque projet au taux de 35,57%, on trouve :

$VAN_{(A \text{ à } 35{,}57\%)} = -453\,830{,}03$ et $VAN_{(B \text{ à } 35{,}57\%)} = 452\,640{,}57$

On voit bien que les deux VAN sont presque égales au taux de 35,57% mais on ne peut parler de projet rentable à ce niveau. Voilà pourquoi il faut utiliser avec beaucoup de précaution le taux de rentabilité relative. Il faut d'abord et avant tout calculer les VAN.

7.3.1.6. Critère du délai de récupération du capital investi en valeurs actualisées.

Il s'agit de la date à partir de laquelle la somme des flux de trésorerie actualisés devient positive ; on parle aussi de la durée d'exploitation au bout de la quelle les revenus du projet ont permis de rembourser le montant de l'investissement initial et de rémunérer les capitaux correspondant à un taux égal au taux d'actualisation.

Exemple 6 : Un investissement suppose une dépense initiale de 225 000 DH, il permettrait pendant six ans des flux de trésorerie, respectivement de 60 000 DH, 60 000 DH, 55 000 DH, 55 000 DH, 45 000 DH, et 75 000 DH. Le taux d'actualisation est de 10 %.

Année	0	1	2	3	4	5	6
Flux de trésorerie	-225 000	60 000	60 000	55 000	55 000	45 000	75 000
Flux actualisés	-225 000	54 545	49 587	41 322	37 566	27 941	42 336
Flux actualisés cumulés	-225 000	-170 455	-120 868	-79 546	-41 980	-14 039	28 297

La somme des flux actualisés devient positive à la sixième année d'exploitation. Le délai de récupération se situe donc entre cinq ans et six ans. Par une interpolation linéaire, on peut calculer le délai de récupération.

Durant toute la sixième année, c'est à dire 12 mois, on récupère 42 336 DH. Or, pour récupérer l'investissement initial, il reste à récupérer durant la sixième année 14 039 DH ; par une règle de trois, le délai de récupération est :

$$5 \text{ ans et } \frac{14\,039 \times 12}{42\,336} \text{ mois } = 5 \text{ ans et } 4 \text{ mois}$$

7.3.1.7. Comparaison entre critère de la VAN et du TRI.

Lorsqu'on a à choisir entre deux projets A et B, nous pouvons, comme nous venons de le faire calculer pour chaque projet sa VAN, son TRI et sa durée de récupération du capital investi, après quoi, nous déciderons comme suit :

- On choisira le projet qui a la plus forte VAN ;
- On choisira le projet qui a le plus fort TRI ;
- On choisira le projet qui a la plus courte durée de récupération du capital investi.

Mais que se passe-t-il si c'est trois critères ne sont pas cohérents ?

Prenons un exemple, pour illustrer notre propos :

Exemple 7 : Soient deux projets A et B tels que :

Projet A :	Investissement initial	:	2 000 000 DH
	Flux annuels	:	390 000 DH
Projet B :	Investissement initial	:	950 000 DH
	Flux annuels	:	210 000 DH

On considère un taux d'actualisation de t = 10%

On désire connaître quel est le projet le plus rentable :

Pour ce faire, on dresse les tableaux synthétiques suivants :

Projet A :

Périodes	**10%**	**Flux actualisés**	**Flux cumulés**
0		- 2 000 000,00	- 2 000 000,00
1	0,909091	354 545,45	- 1645 454,55
2	0,826446	322 314,05	- 1323 140,50
3	0,751315	293 012,77	- 1030 127,72
4	0,683013	266 375,25	- 763 752,48
5	0,620921	242 159,32	- 521593,16
6	0,564474	220144,83	- 301 448,33
7	0,513158	200 131,67	- 101 316,66
8	0,466507	181 937,88	80 621,22
9	0,424098	165 398,07	246 019,29
10	0,385543	150 361,88	396 381,17
VAN_A		396 381,17	

Au taux d'actualisation de 10% :

- la VAN_A = 396 381,17 DH
- la durée de récupération du capital investi est située entre la 7ème et la 8ème année.

Pour le projet B :

Périodes	**10%**	**Flux actualisés**	**Flux cumulés**
0		- 950 000,00	- 950 000,00
1	0,909091	190 909,09	- 759 090,91
2	0,826446	173 553,72	- 585 537,19
3	0,751315	157 776,11	- 427 761,08
4	0,683013	143 432,83	- 284 328,26
5	0,620921	130 393,48	- 153 934,78
6	0,564474	118 539,53	- 35 395,25
7	0,513158	107 763,20	72 367,95
8	0,466507	97 966,55	170 334,50
9	0,424098	89 060,50	259 395,00
10	0,385543	80 964,09	340 359,09
VAN_A		340 359,09	

Au taux d'actualisation de 10% :

- la VAN_B = 340 359,09 DH
- la durée de récupération du capital investi est située entre la $6^{ème}$ et la $7^{ème}$ année.

Nous pouvons ainsi conclure qu'au vue du critère de la VAN, le projet A est plus intéressant que le projet B, par contre, au vue du critère de la durée de récupération du capital investi, le projet B est plus intéressant que le projet A.

Que décider alors ? En fait, si la société a un problème de trésorerie, elle va privilégier le critère de la durée de récupération du capital investi et choisira le projet B, sinon elle préférera baser son choix sur le critère de la VAN et choisira le projet A.

En tout état de cause, nous conseillons de calculer toujours le TRI de chaque projet pour faire le choix le plus judicieux. Ces calculs donnent :

Pour le projet A :

- t = 14% VAN = + 34 285,10 DH
- t = 15% VAN = - 42 680,24 DH

Ce qui donne un TRI pour le projet A compris entre 14% et 15%.

Pour le projet B :

- t = 17% VAN = + 28 306,76 DH
- t = 18% VAN = - 6 241,88 DH

Ce qui donne un TRI pour le projet B compris entre 17% et 18%.
Conclusions : Le projet B est plus rentable que le projet A.

7.3.2. Calculs en avenir incertain.

Ces calculs consistent en une analyse du risque ; on peut citer trois méthodes d'analyse du risque :

- Analyse de sensibilité ;
- Espérance mathématique ;
- Prime de risque.

7.3.2.1 Analyse de sensibilité.

Une étude de sensibilité consiste à analyser comment varie la rentabilité d'un projet lorsqu'on fait varier les hypothèses relatives à chacune des composantes de l'échéancier des flux de trésorerie.

L'étude de sensibilité est réalisée par rapport à un cas de référence.

Exemple 7 : Soient les caractéristiques du projet suivant :

- Coût de l'investissement : 1 000 000 DH ;
- Durée de l'investissement : 10 ans ;
- Recettes annuelles : 330 000 DH par an ;
-Dépenses annuelles : 126 000 DH par an ;
- Taux d'actualisation : 7 %.

Flux de trésorerie du projet : F_k = 330 000 – 126 000 = 204 000 DH par an.

Nous calculons, pour ce cas, la VAN et le TRI :

$$\text{VAN} = -\ 1\ 000\ 000 + \sum_{k=0}^{10} 204\ 000 \times (1+0{,}07)^{-k} = 529\ 729{,}57 \text{ DH}$$

La VAN étant positive, le projet d'investissement est rentable, au taux d'actualisation de 7%.

Calculons, maintenant le TRI de ce projet :

A un taux d'actualisation de 16,5 %, la valeur actuelle nette est égale à :

$$\text{VAN} = -1\ 000\ 000 + 204\ 000 \times \sum_{k=1}^{10} 1{,}165^{-k} = 5\ 921{,}95 \text{ DH}$$

A un taux d'actualisation de 17 %, la valeur actuelle nette est égale à :

$$\text{VAN} = -1\ 000\ 000 + 204\ 000 \times \sum_{k=1}^{10} 1{,}17^{-k} = -13\ 371{,}68 \text{ DH}$$

Le taux de rentabilité interne TRI est donc compris entre 16,5 % et 17 %. On l'obtient par interpolation linéaire :

$$\text{TRI} = 16{,}5 + (17 - 16{,}5) \times \frac{0 - 18\ 000}{-3000 - 18\ 000} = 16{,}65\%$$

Nous allons étudier la sensibilité de la VAN et du TRI par rapport aux variations de différentes données :

1er cas : Sensibilité à une variation des recettes

Une diminution des recettes de 10 %, soit 33 000 DH par an, conduit à une diminution des flux de trésorerie de 33 000 DH par an, soit 171 000 DH au lieu de 204 000 DH.

Nous calculons, pour ce cas, la VAN et le TRI :

VAN = - 1 000 000 + $\sum_{k=0}^{10} 171\,000 \times (1+0{,}07)^{-k}$ = 282 273,31 DH

La VAN étant positive, le projet d'investissement reste rentable, au taux d'actualisation de 7%.

Une variation de - 10% des recettes induit une grande diminution de la VAN de - 46,71%, ceci fait que la VAN est très sensible à une variation des recettes, elle varie fortement et dans le même sens que les recettes.

Calculons, maintenant le TRI de ce projet :

A un taux d'actualisation de 12 %, la valeur actuelle nette est égale à :

$$\text{VAN} = -1\,000\,000 + 171\,000 \times \sum_{k=1}^{10} 1{,}12^{-k} = 15\,346{,}55 \text{ DH}$$

A un taux d'actualisation de 13 %, la valeur actuelle nette est égale à :

$$\text{VAN} = -1\,000\,000 + 171\,000 \times \sum_{k=1}^{10} 1{,}13^{-k} = -\ 27\,533{,}07 \text{ DH}$$

Le taux de rentabilité interne TRI est donc compris entre 12 % et 13 %. On l'obtient par interpolation linéaire :

$$\text{TRI} = 12 + (13-12) \times \frac{0 - 15\,346{,}55}{15\,346{,}55 + 27\,533{,}07} = 12{,}36\%$$

Une variation de - 10% des recettes induit une variation du TRI de – 25,78% ceci fait que le TRI est très sensible à une variation des recettes, il varie fortement et dans le même sens que les recettes.

2ème cas : Sensibilité à une variation du coût d'investissement

Une augmentation du coût d'investissement de 10 %, soit 100 000 DH conduit à une majoration du flux de trésorerie de l'année d'investissement de 100 000 DH.

Nous calculons, pour ce cas, la VAN et le TRI :

VAN = - 1 100 000 + $\sum_{k=0}^{10} 204\,000 \times (1+0{,}07)^{-k}$ = 429 729,57 DH

La VAN étant positive, le projet d'investissement reste rentable, au taux d'actualisation de 7%.

Une variation de + 10% de l'investissement initial induit une assez forte diminution de la VAN de – 18,89%, ceci fait que la VAN est assez sensible à une variation des recettes, elle varie fortement et dans le sens contraire à la variation de l'investissement initial.

Calculons, maintenant le TRI de ce projet :

A un taux d'actualisation de 14 %, la valeur actuelle nette est égale à :

$$\text{VAN} = -1100\,000 + 204\,000 \times \sum_{k=1}^{10} 1{,}14^{-k} = 12\,357{,}54 \text{ DH}$$

A un taux d'actualisation de 15 %, la valeur actuelle nette est égale à :

$$\text{VAN} = -1100\,000 + 204\,000 \times \sum_{k=1}^{10} 1{,}15^{-k} = -\,32\,322{,}78 \text{ DH}$$

Le taux de rentabilité interne TRI est donc compris entre 12 % et 13 %. On l'obtient par interpolation linéaire :

$$\text{TRI} = 14 + (15 - 14) \times \frac{12\,357{,}54 - 0}{12\,357{,}54 + 32322{,}78} = 14{,}28\%$$

Une variation de + 10% de l'investissement initial induit une variation du TRI de – 14,27% ceci fait que le TRI est sensible à une variation des recettes, il varie fortement et dans le sens opposé aux variations de l'investissement initial.

3$^{\text{ème}}$ cas : Sensibilité à une variation des recettes et du coût d'investissement

Une diminution des recettes de 10 %, soit 33 000 DH par an et une augmentation du coût d'investissement de 10 %, soit 100 000 DH, conduisent à une variation du revenu actualisé de :

Nous calculons, pour ce cas, la VAN :

$$\text{VAN} = -\ 1\ 100\ 000 + \sum_{k=0}^{10} 171\,000 \times (1 + 0{,}07)^{-k} = 182\ 273{,}31 \text{ DH}$$

La VAN étant positive, le projet d'investissement reste rentable, au taux d'actualisation de 7%.

7.3.2.2. Critère de l'espérance mathématique.

Un revenu actualisé est fonction d'un certain nombre de paramètres. Ces paramètres peuvent varier, on peut leur associer une loi de probabilité, pour cela il faut se référer à des cas passés.

Exemple 8 : Le coût d'un investissement est estimé à 250 000 DH. On prévoit des ventes annuelles de 3 000 unités.

- La première année, le prix de vente peut être de 150 DH ou 200 DH ou 250 DH avec des probabilités respectives de 1/6, 3/6, et 2/6.
- La deuxième année, le prix de vente peut être de 200 DH ou 250 DH avec des probabilités respectives de 2/3 et 1/3.
- Les charges d'exploitations sont estimées à 300 000 DH par an.
- Le taux d'actualisation est de 10%.

Calcul des flux de trésorerie pour les différents prix possibles.

Prix	150	200	250
Recettes	450 000	600 000	750 000
Dépenses	300 000	300 000	300 000
Flux nets	150 000	300 000	450 000

La probabilité que le prix soit de 150 DH la première année et 200 DH la deuxième année est :

$$P(150 \text{ et } 200) = \frac{1}{6} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{18}$$

De la même manière :

$$P(150 \text{ et } 250) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{18} \quad ; \quad P(200 \text{ et } 200) = \frac{3}{6} \times \frac{2}{3} = \frac{6}{18} \quad ; \quad P(200 \text{ et } 250) = \frac{3}{6} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{18}$$

$$P(250 \text{ et } 200) = \frac{2}{6} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{24} \quad \text{et} \quad P(250 \text{ et } 250) = \frac{2}{6} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{18}$$

On obtient ensuite une loi de probabilité de la valeur actuelle nette.

VAN	**Probabilité**
$-250\,000 + 150\,000 \times 1{,}1^{-1} + 300\,000 \times 1{,}1^{-2} = 134\,298$ DH	2/18
$-250\,000 + 150\,000 \times 1{,}1^{-1} + 450\,000 \times 1{,}1^{-2} = 258\,264$ DH	1/18
$-250\,000 + 300\,000 \times 1{,}1^{-1} + 300\,000 \times 1{,}1^{-2} = 270\,661$ DH	6/18
$-250\,000 + 300\,000 \times 1{,}1^{-1} + 450\,000 \times 1{,}1^{-2} = 394\,628$ DH	3/18
$-250\,000 + 450\,000 \times 1{,}1^{-1} + 300\,000 \times 1{,}1^{-2} = 407\,025$ DH	4/24
$-250\,000 + 450\,000 \times 1{,}1^{-1} + 450\,000 \times 1{,}1^{-2} = 530\,992$ DH	2/18

La valeur actuelle nette espérée est :

$$134298\times\frac{2}{18}+258264\times\frac{1}{18}+270661\times\frac{6}{18}+394628\times\frac{3}{18}+407025\times\frac{4}{24}+530992\times\frac{2}{18}=312098\,dh$$

7.3.2.3. Taux d'actualisation et prime de risque.

La prime de risque est l'excèdent du taux exigé par rapport au taux des opérations certaines. Majorer le taux d'actualisation d'une prime de risque revient à diminuer le poids des flux de trésorerie futurs.

En désignant par t, le taux d'actualisation sans risque et par p, la prime de risque, la valeur actualisée d'un flux de trésorerie F_k d'une année k s'écrit :

$$F_k\times(1+t)^{-k}\times(1+p)^{-k}$$

Exemple 9 : Un investissement de 3500000 DH permettrait des flux nets, respectivement sur quatre ans, de 1000000 DH, 1100000 DH, 1300000 DH, et 2200000 DH.
Le taux d'actualisation est fixé à 18 % majoré d'une prime de risque de 10%.

Année	0	1	2	3	4
Flux nets	-3 500 000	1 000 000	1 100 000	1 300 000	2 200 000
Flux actualisés sans risque	-3 500 000	847 748	790 003	791 220	1 134 735
Flux actualisés avec risque	-3 500 000	770 416	652 895	594 455	775 040

La valeur actuelle nette sans risque est :

VAN(sans risque) = -3 500 000 + 847 748 + 790 003 + 791 220 + 1 134 735 = 63 416 DH

La valeur actuelle nette avec risque est :

VAN(avec risque) = -3 500 000 + 770 416 + 652 895 + 594 455 + 775 040 = -707 194 DH

Le projet est donc rentable mais risqué.

7.4. EXERCICES D'APPLICATION.

7.4.1. Exercice.

Un investissement suppose une dépense qui serait réglée en trois versements de 500 000 DH chacun, respectivement à la fin de la 2è, 4è, et 6è. Année. La mise en œuvre des moyens d'actions acquis grâce à cet investissement, permettraient des recettes annuelles nettes estimées dans l'ordre, pour 6 ans d'activité, à 220 000 DH, 300 000 DH, 200 000 DH, 250 000 DH, 180 000 DH, et 150 000 DH.

a) Sans actualisation, l'investissement est-il rentable ?
b) Au taux d'actualisation de 11 %, l'investissement est-il rentable ?

Réponses :
a) Le revenu net total étant négatif, l'investissement n'est pas rentable.
b) VAN = 2999,29 DH. La VAN étant positive, l'investissement est rentable au taux d'actualisation de 11 %.

7.4.2. Exercice.

Un projet d'investissement présente les caractéristiques suivantes :
- capital investi : 1 000 de matériels amortissables linéairement en 5ans ;
- durée de vie 5ans ;
- valeur résiduelle, nette d'impôt, au terme des 5ans : 30.

Les prévisions d'exploitation sont données ci-dessous :

Années	**1**	**2à5**
Chiffre d'affaires HT	1 000	1 100
Charges variables	300	450
Charges fixes (hors amortissements)	310	340

a) Calculez les cash-flows nets attendus du projet (taux de l'IS : 35%)
b) Calculez la VAN au taux de 9%
c) Calculez le TRI
d) Calculez le délai de récupération, sachant que le taux de rentabilité minimum exigé est 9%

Réponses :

a)

	0	1	2	3	4	5
Cash-flows nets	- 1 000	323,5	271,5	271,5	271,5	301,5

b) VAN = 124
c) TRI = 13,75%
d) 4 ans 4,4 mois

7.4.3. Exercice.

Soit un investissement financé à raison de 100 à la date 0 ; 200 six mois plus tard, et 100 douze mois plus tard.
Durée de vie 5 ans. Valeur résiduelle nulle. Cash-flows : 80,120, 130, 100, 90 (aux dates 2, 3, 4, 5 et 6).
Coût du capital : 10%
Calculer La VAN.
Remarque : Il faut déjà évaluer, à l'époque 0, le capital investi.

Réponses : VAN = -24

7.4.4. Exercice.

De l'analyse d'un projet d'investissement P, on retient les informations suivantes :

- Capital investi : 900 de matériels amortissables linéairement en 5 ans ;
- Durée de vie : 5 ans ;
- Valeur résiduelle, nette d'impôts, au terme des 5 ans : 10.

Les prévisions d'exploitation sont données par le tableau ci-dessous :

Années	2006	De 2007 à 2010
Chiffre d'affaire HT	900	1200
Charges d'exploitation variables	360	480
Charges d'exploitation fixes (hors amortissements)	300	300

a) Calculer les flux nets de liquidités attendus du projet (taux de l'IS : 33,33 %)
b) Calculer la VAN, le TRI et le délai de récupération, sachant que le taux de rentabilité minimum exigé est de 8%. Conclure.

Réponses :
a)

Années	2006	De 2007 à 2010
Flux nets de liquidités	40 + 180 = 220	160 + 180 = 340

b) 353,22 ; 20,98 % ; 3 ans, 6 mois et 14 jours.

7.4.5. Exercice.

Un investissement est prévu pour le 01/06/1998. Le coût total de cet investissement est égal à 300 000 DH. On prévoit des recettes nettes de 200 000 DH le 01/06/2001, et 200 000 DH le 01/06/2002.

a) En calculant la valeur actuelle nette, l'investissement est-il rentable au taux d'actualisation de 9 %.
b) Calculer le taux de rentabilité interne.

Réponses :
a) VAN = -3878,26 DH. La VAN étant négative, l'investissement n'est pas rentable au taux d'actualisation de 9 %.
b) 8,59 %

7.4.6. Exercice.

La valeur actuelle nette d'un projet d'investissement, calculée au taux de 12%, est de 88 970. Le taux de rentabilité interne de ce projet est de 14%.
Sachant que la durée de vie est de 5ans et que les cash-flows sont égaux,
Calculez le montant du capital investi et celui des cash-flows.

Réponses :

Cash-flows 518 185,61 DH; capital investi 1 778 973,17

7.4.7. Exercice.

Vous hésitez entre deux investissements possibles :

> - Le premier suppose une dépense initiale de 500 000 DH, et permettrait des recettes nettes, constantes, annuelles, sur cinq ans, de 200 000 DH par an.
>
> - Le second suppose une dépense initiale de 900 000 DH, et permettrait des recettes annuelles nettes de 250 000 DH par an les trois premières années, et 200 000 DH par an les deux dernières années.

Déterminer l'investissement le plus rentable :

a) En utilisant la méthode de la valeur actuelle nette au taux d'actualisation de 11,5 %.
b) En comparant les taux de rentabilité interne.

Réponses :
a) Au taux d'actualisation de 11,5 %, le 1er investissement est rentable,(VAN = 229975,57 DH) par contre le 2ème investissement n'est pas rentable (VAN = 48893,46 DH).
b) Le 1er investissement a le TRI le plus élevé (28,65 % contre 9,20 %), il est donc le plus rentable.

7.4.8. Exercice.

Un investisseur envisage la construction d'une usine de production d'un produit X. Le coût du projet est estimé à 500 000 DH, cet investissement permettrait de réaliser des recettes d'un montant de 250 000DH, la 1ère année, ensuite, elles augmentent de 10 % par an pendant 4 autres années.
Les dépenses d'exploitations sont estimées à 100 000 DH par an.

a - L'investissement est-il rentable au taux d'actualisation de 14% ?
b - Déterminer le délai de récupération
c - Calculer le taux de rentabilité interne.

Réponses :
a) VAN = 40724,18 DH. La valeur actuelle nette est positive, le projet est donc rentable au taux d'actualisation de14 %.
b) 3 ans et 8 mois et 14 jours.
c) 17,63 %

7.4.9. Exercice.

Un investisseur a le choix entre les deux projets suivants :

Projet 1 : construction d'une unité de production de chaussures.

- Coût de l'investissement	: 2 000 000 DH ;
- Durée du projet	: 5 ans ;
- ventes	: 20 000 paires de chaussures la première année, puis une augmentation de 10 % par an ;
- Prix de vente	: 110 DH la première année, puis une augmentation de 10 % par an ;
- Coût de production	: 42 DH par paire de chaussure ;

Projet 2 : construction d'une unité d'élevage de poulets.

- Coût de l'investissement	: 2500000 DH ;
- Durée de projet	: 5 ans ;
- ventes	: 50 000 poulets par an ;
- Poids moyen par poulet	: 1,9 Kg ;
- Prix moyen de vente	: 15 DH par Kg :
- Coût de production	: 8 DH par Kg

Autres données :

- Taux d'actualisation	: 10 %
- Prime de risque	: 4 %
- Taux d'impôt	: 35 %

1. Etudier la rentabilité des deux projets en utilisant :
   a) la valeur actuelle nette
   b) le taux de rentabilité relatif
2. Etudier la sensibilité de la VAN des deux projets à une variation de 10 % du prix de vente.

Réponses :

1.a) Le projet 1 est largement rentable (VAN = 3280287,04 DH), par contre le projet 2 n'est pas rentable VAN = -435147,88 DH).

1.b) Le projet 2 n'étant pas rentable, on n'a pas besoin de calculer le taux de rentabilité relatif.

2.) $\Delta \mathrm{VAN} = 3280287{,}04 - 2578949{,}39 = 701337{,}65\,\mathrm{dh}$

La variation de la VAN étant positive, le projet est donc rentable est moins risqué.

7.4.10. Exercice.

On considère deux projets d’investissement dont les caractéristiques sont données ci-dessous :

Projet A

Année	0	1		2		3	
Flux probables	-100	F1	P(F1)	F2	P(F2)	F3	P(F3)
		40	0,1	60	0,2	70	0,5
		50	0,6	70	0,7	80	0,3
		60	0,3	80	0,1	90	0,2

Projet B

Année	0	1		2		3	
Flux probables	-100	F1	P(F1)	F2	P(F2)	F3	P(F3)
		20	0,2	40	0,3	70	0,4
		40	0,5	60	0,5	90	0,4
		60	0,3	80	0,2	110	0,2

Avec un taux d’actualisation de 10 % calculer l’espérance mathématique et l’écart type des valeurs actuelles nettes. Quel est le meilleur projet ?

Réponses :

Projet A : 62,15 et 9,16

Projet B : 50,73 et 20,55

Le projet A est plus rentable et moins risqué.

7.4.11. Exercice.

Un investissement de 100 000 DH engendre, sur 7 ans, des recettes de 30 000 DH / an et des dépenses de 5 000 DH / an.
Montrer, par la méthode du revenu globel net, si cet investissement est rentable, sachant que le taux d'intérêt est égal à 10 %.

Réponse :
Revenu net global = 8 881,75 DH, le signe est positif, le projet d'investissement est donc rentable.

7.4.12. Exercice.

Reprendre l'exemple 7.4.11. et montrer, par la méthode du TIR, la rentabilité du projet.

Réponse :
Le TIR est compris entre 13 et 13,01 % et qu'il est très proche de 13 %, ce qui est une très bonne approximation.

Ainsi si le taux d'intérêt est inférieur à 13 %, le projet est rentable, dans le cas contraire, il faut l'abandonner.

7.4.13. Exercice.

Reprendre l'exemple 7.4.11. et déterminer par la méthode du Délai de Récupération, DR si le projet est rentable.

Réponse :
DR est compris entre 5 ans et 2 mois et 5 ans et 3 mois. La société devra décider de l'opportunité de l'investissement, en fonction de sa future trésorerie.

7.4.14. Exercice.

On considère deux investissements qui engendrent les recettes et les dépenses annuelles suivantes :

1er investissement de 240 000 DH sur 4 ans :

Epoques i	**1**	**2**	**3**	**4**
Recettes	100 000	120 000	100 000	110 000
Dépenses	25 000	27 000	30 000	47 000

$2^{ème}$ investissement de 265 000 DH sur 5 ans :

Epoques i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Recettes	100 000	100 000	110 000	110 000	100 000
Dépense	20 000	30 000	35 000	40 000	50 000

Quel investissement choisir et quel critère appliquer pour ce faire, sachant que le taux d'intérêt est 9 % ?

Réponse :
Au vue du revenu net global, on a R_1 = 5 767,21 DH et R_2 = 7 312,19 DH. Ainsi les deux projets sont rentables, mais le $2^{ème}$ projet est plus rentable que le 1^{er}.

Au vu du TIR, on a TIR_1 = 10,67 % et TIR_2 = 10, 02%. Ainsi le projet 1 est plus rentable que le projet 2, au vue du TIR.

Au vu délais de récupération DR des deux projets, on a pour le projet 1 : 3 ans < DR_1 < 4 ans et pour le projet 2 : 4 ans < DR_2 < 5 ans. Ainsi le projet 1 a un délai de récupération plus court que le projet 2, il est donc plus intéressant.

Nous pouvons donc choisir, sans hésitation, le 1^{er} projet.

7.4.15. Exercice.

Une entreprise décide d'augmenter sa production par l'acquisition de nouvelles machines.
Deux types de machines sont disponibles sur le marché, aux prix et conditions suivantes.
1^{er} type de machines : Prix payable en 15 mensualités de 92 000 DH chacune. Ce type de machines permet des recettes annuelles de 570 000 DH moyennant des dépenses annuelles de 200 000 DH.
$2^{ème}$ type de machines : Prix payable en 10 mensualités de 115 000 DH chacune. Ce type de machines permet des recettes annuelles de 410 000 DH moyennant des dépenses annuelles de 100 000 DH.
Quel type de machines doit choisir l'entreprise si le taux d'actualisation est de 11 % ?

Réponse :
Au vue du revenu net global, on a R_1 = 79 274,48 DH et R_2 = 49 070,54 DH
Au vue du TIR, on a TIR_1 = 13,42% et TIR_2 = 12,75%

Le projet 1 est plus rentable que le projet 2 et ceci tant du point de vue du revenu net global que de celui du TIR.

TABLES FINANCIERES

Table T. 1 Valeur acquise par un capital d'un DH : $C_n = (1 + t)^n$

n t	0,05%	0,10%	0,20%	0,30%	0,40%	0,50%	0,60%	0,70%	0,80%	0,90%
1	1,000500	1,001000	1,002000	1,003000	1,004000	1,005000	1,006000	1,007000	1,008000	1,009000
2	1,001000	1,002001	1,004004	1,006009	1,008016	1,010025	1,012036	1,014049	1,016064	1,018081
3	1,001501	1,003003	1,006012	1,009027	1,012048	1,015075	1,018108	1,021147	1,024193	1,027244
4	1,002002	1,004006	1,008024	1,012054	1,016096	1,020151	1,024217	1,028295	1,032386	1,036489
5	1,002503	1,005010	1,010040	1,015090	1,020161	1,025251	1,030362	1,035493	1,040645	1,045817
6	1,003004	1,006015	1,012060	1,018136	1,024241	1,030378	1,036544	1,042742	1,048970	1,055230
7	1,003505	1,007021	1,014084	1,021190	1,028338	1,035529	1,042764	1,050041	1,057362	1,064727
8	1,004007	1,008028	1,016112	1,024254	1,032452	1,040707	1,049020	1,057391	1,065821	1,074309
9	1,004509	1,009036	1,018145	1,027326	1,036581	1,045911	1,055314	1,064793	1,074348	1,083978
10	1,005011	1,010045	1,020181	1,030408	1,040728	1,051140	1,061646	1,072247	1,082942	1,093734
11	1,005514	1,011055	1,022221	1,033499	1,044891	1,056396	1,068016	1,079752	1,091606	1,103577
12	1,006017	1,012066	1,024266	1,036600	1,049070	1,061678	1,074424	1,087311	1,100339	1,113510
13	1,006520	1,013078	1,026314	1,039710	1,053266	1,066986	1,080871	1,094922	1,109141	1,123531
14	1,007023	1,014091	1,028367	1,042829	1,057480	1,072321	1,087356	1,102586	1,118015	1,133643
15	1,007526	1,015105	1,030424	1,045957	1,061709	1,077683	1,093880	1,110304	1,126959	1,143846
16	1,008030	1,016121	1,032485	1,049095	1,065956	1,083071	1,100443	1,118077	1,135974	1,154140
17	1,008534	1,017137	1,034549	1,052243	1,070220	1,088487	1,107046	1,125903	1,145062	1,164528
18	1,009038	1,018154	1,036619	1,055399	1,074501	1,093929	1,113688	1,133784	1,154223	1,175008
19	1,009543	1,019172	1,038692	1,058565	1,078799	1,099399	1,120370	1,141721	1,163456	1,185584
20	1,010048	1,020191	1,040769	1,061741	1,083114	1,104896	1,127093	1,149713	1,172764	1,196254
21	1,010553	1,021211	1,042851	1,064926	1,087447	1,110420	1,133855	1,157761	1,182146	1,207020
22	1,011058	1,022233	1,044936	1,068121	1,091796	1,115972	1,140658	1,165865	1,191603	1,217883
23	1,011563	1,023255	1,047026	1,071326	1,096164	1,121552	1,147502	1,174026	1,201136	1,228844
24	1,012069	1,024278	1,049120	1,074540	1,100548	1,127160	1,154387	1,182244	1,210745	1,239904
25	1,012575	1,025302	1,051219	1,077763	1,104950	1,132796	1,161314	1,190520	1,220431	1,251063
26	1,013082	1,026328	1,053321	1,080996	1,109370	1,138460	1,168281	1,198854	1,230195	1,262322
27	1,013588	1,027354	1,055428	1,084239	1,113808	1,144152	1,175291	1,207246	1,240036	1,273683
28	1,014095	1,028381	1,057539	1,087492	1,118263	1,149873	1,182343	1,215697	1,249956	1,285147
29	1,014602	1,029410	1,059654	1,090755	1,122736	1,155622	1,189437	1,224206	1,259956	1,296713
30	1,015109	1,030439	1,061773	1,094027	1,127227	1,161400	1,196574	1,232776	1,270036	1,308383
31	1,015617	1,031470	1,063896	1,097309	1,131736	1,167207	1,203753	1,241405	1,280196	1,320159
32	1,016125	1,032501	1,066024	1,100601	1,136263	1,173043	1,210976	1,250095	1,290438	1,332040
33	1,016633	1,033533	1,068156	1,103903	1,140808	1,178908	1,218241	1,258846	1,300761	1,344029
34	1,017141	1,034567	1,070293	1,107214	1,145371	1,184803	1,225551	1,267658	1,311167	1,356125
35	1,017650	1,035602	1,072433	1,110536	1,149953	1,190727	1,232904	1,276531	1,321657	1,368330
36	1,018158	1,036637	1,074578	1,113868	1,154552	1,196681	1,240302	1,285467	1,332230	1,380645
37	1,018667	1,037674	1,076727	1,117209	1,159171	1,202664	1,247743	1,294465	1,342888	1,393071
38	1,019177	1,038712	1,078881	1,120561	1,163807	1,208677	1,255230	1,303527	1,353631	1,405608
39	1,019686	1,039750	1,081038	1,123923	1,168463	1,214721	1,262761	1,312651	1,364460	1,418259
40	1,020196	1,040790	1,083201	1,127294	1,173136	1,220794	1,270338	1,321840	1,375376	1,431023
41	1,020706	1,041831	1,085367	1,130676	1,177829	1,226898	1,277960	1,331093	1,386379	1,443902
42	1,021217	1,042873	1,087538	1,134068	1,182540	1,233033	1,285628	1,340410	1,397470	1,456897
43	1,021727	1,043915	1,089713	1,137470	1,187270	1,239198	1,293341	1,349793	1,408649	1,470010
44	1,022238	1,044959	1,091892	1,140883	1,192020	1,245394	1,301101	1,359242	1,419918	1,483240
45	1,022749	1,046004	1,094076	1,144306	1,196788	1,251621	1,308908	1,368756	1,431278	1,496589
46	1,023261	1,047050	1,096264	1,147738	1,201575	1,257879	1,316761	1,378338	1,442728	1,510058
47	1,023772	1,048097	1,098457	1,151182	1,206381	1,264168	1,324662	1,387986	1,454270	1,523649
48	1,024284	1,049145	1,100654	1,154635	1,211207	1,270489	1,332610	1,397702	1,465904	1,537361
49	1,024796	1,050195	1,102855	1,158099	1,216051	1,276842	1,340606	1,407486	1,477631	1,551198
50	1,025309	1,051245	1,105061	1,161573	1,220916	1,283226	1,348649	1,417338	1,489452	1,565158

Table T. 1 **Valeur acquise par un capital d'un DH : $C_n = (1 + t)^n$**

n t	1,00%	1,25%	1,50%	1,75%	2,00%	2,25%	2,50%	2,75%	3,00%	3,25%
1	1,010000	1,012500	1,015000	1,017500	1,020000	1,022500	1,025000	1,027500	1,030000	1,032500
2	1,020100	1,025156	1,030225	1,035306	1,040400	1,045506	1,050625	1,055756	1,060900	1,066056
3	1,030301	1,037971	1,045678	1,053424	1,061208	1,069030	1,076891	1,084790	1,092727	1,100703
4	1,040604	1,050945	1,061364	1,071859	1,082432	1,093083	1,103813	1,114621	1,125509	1,136476
5	1,051010	1,064082	1,077284	1,090617	1,104081	1,117678	1,131408	1,145273	1,159274	1,173411
6	1,061520	1,077383	1,093443	1,109702	1,126162	1,142825	1,159693	1,176768	1,194052	1,211547
7	1,072135	1,090850	1,109845	1,129122	1,148686	1,168539	1,188686	1,209129	1,229874	1,250923
8	1,082857	1,104486	1,126493	1,148882	1,171659	1,194831	1,218403	1,242381	1,266770	1,291578
9	1,093685	1,118292	1,143390	1,168987	1,195093	1,221715	1,248863	1,276546	1,304773	1,333554
10	1,104622	1,132271	1,160541	1,189444	1,218994	1,249203	1,280085	1,311651	1,343916	1,376894
11	1,115668	1,146424	1,177949	1,210260	1,243374	1,277311	1,312087	1,347721	1,384234	1,421643
12	1,126825	1,160755	1,195618	1,231439	1,268242	1,306050	1,344889	1,384784	1,425761	1,467847
13	1,138093	1,175264	1,213552	1,252990	1,293607	1,335436	1,378511	1,422865	1,468534	1,515552
14	1,149474	1,189955	1,231756	1,274917	1,319479	1,365483	1,412974	1,461994	1,512590	1,564807
15	1,160969	1,204829	1,250232	1,297228	1,345868	1,396207	1,448298	1,502199	1,557967	1,615663
16	1,172579	1,219890	1,268986	1,319929	1,372786	1,427621	1,484506	1,543509	1,604706	1,668173
17	1,184304	1,235138	1,288020	1,343028	1,400241	1,459743	1,521618	1,585956	1,652848	1,722388
18	1,196147	1,250577	1,307341	1,366531	1,428246	1,492587	1,559659	1,629570	1,702433	1,778366
19	1,208109	1,266210	1,326951	1,390445	1,456811	1,526170	1,598650	1,674383	1,753506	1,836163
20	1,220190	1,282037	1,346855	1,414778	1,485947	1,560509	1,638616	1,720428	1,806111	1,895838
21	1,232392	1,298063	1,367058	1,439537	1,515666	1,595621	1,679582	1,767740	1,860295	1,957453
22	1,244716	1,314288	1,387564	1,464729	1,545980	1,631522	1,721571	1,816353	1,916103	2,021070
23	1,257163	1,330717	1,408377	1,490361	1,576899	1,668231	1,764611	1,866303	1,973587	2,086755
24	1,269735	1,347351	1,429503	1,516443	1,608437	1,705767	1,808726	1,917626	2,032794	2,154574
25	1,282432	1,364193	1,450945	1,542981	1,640606	1,744146	1,853944	1,970361	2,093778	2,224598
26	1,295256	1,381245	1,472710	1,569983	1,673418	1,783390	1,900293	2,024546	2,156591	2,296897
27	1,308209	1,398511	1,494800	1,597457	1,706886	1,823516	1,947800	2,080221	2,221289	2,371546
28	1,321291	1,415992	1,517222	1,625413	1,741024	1,864545	1,996495	2,137427	2,287928	2,448622
29	1,334504	1,433692	1,539981	1,653858	1,775845	1,906497	2,046407	2,196206	2,356566	2,528202
30	1,347849	1,451613	1,563080	1,682800	1,811362	1,949393	2,097568	2,256602	2,427262	2,610368
31	1,361327	1,469759	1,586526	1,712249	1,847589	1,993255	2,150007	2,318658	2,500080	2,695205
32	1,374941	1,488131	1,610324	1,742213	1,884541	2,038103	2,203757	2,382421	2,575083	2,782800
33	1,388690	1,506732	1,634479	1,772702	1,922231	2,083960	2,258851	2,447938	2,652335	2,873241
34	1,402577	1,525566	1,658996	1,803725	1,960676	2,130849	2,315322	2,515256	2,731905	2,966621
35	1,416603	1,544636	1,683881	1,835290	1,999890	2,178794	2,373205	2,584426	2,813862	3,063036
36	1,430769	1,563944	1,709140	1,867407	2,039887	2,227816	2,432535	2,655498	2,898278	3,162585
37	1,445076	1,583493	1,734777	1,900087	2,080685	2,277942	2,493349	2,728524	2,985227	3,265369
38	1,459527	1,603287	1,760798	1,933338	2,122299	2,329196	2,555682	2,803558	3,074783	3,371493
39	1,474123	1,623328	1,787210	1,967172	2,164745	2,381603	2,619574	2,880656	3,167027	3,481067
40	1,488864	1,643619	1,814018	2,001597	2,208040	2,435189	2,685064	2,959874	3,262038	3,594201
41	1,503752	1,664165	1,841229	2,036625	2,252200	2,489981	2,752190	3,041271	3,359899	3,711013
42	1,518790	1,684967	1,868847	2,072266	2,297244	2,546005	2,820995	3,124905	3,460696	3,831621
43	1,533978	1,706029	1,896880	2,108531	2,343189	2,603290	2,891520	3,210840	3,564517	3,956149
44	1,549318	1,727354	1,925333	2,145430	2,390053	2,661864	2,963808	3,299138	3,671452	4,084723
45	1,564811	1,748946	1,954213	2,182975	2,437854	2,721756	3,037903	3,389865	3,781596	4,217477
46	1,580459	1,770808	1,983526	2,221177	2,486611	2,782996	3,113851	3,483086	3,895044	4,354545
47	1,596263	1,792943	2,013279	2,260048	2,536344	2,845613	3,191697	3,578871	4,011895	4,496068
48	1,612226	1,815355	2,043478	2,299599	2,587070	2,909640	3,271490	3,677290	4,132252	4,642190
49	1,628348	1,838047	2,074130	2,339842	2,638812	2,975107	3,353277	3,778415	4,256219	4,793061
50	1,644632	1,861022	2,105242	2,380789	2,691588	3,042046	3,437109	3,882322	4,383906	4,948835

Table T. 1 **Valeur acquise par un capital d'un DH : $C_n = (1 + t)^n$**

n t	3,50%	3,75%	4,00%	4,25%	4,50%	4,75%	5,00%	5,25%	5,50%	5,75%
1	1,035000	1,037500	1,040000	1,042500	1,045000	1,047500	1,050000	1,052500	1,055000	1,057500
2	1,071225	1,076406	1,081600	1,086806	1,092025	1,097256	1,102500	1,107756	1,113025	1,118306
3	1,108718	1,116771	1,124864	1,132996	1,141166	1,149376	1,157625	1,165913	1,174241	1,182609
4	1,147523	1,158650	1,169859	1,181148	1,192519	1,203971	1,215506	1,227124	1,238825	1,250609
5	1,187686	1,202100	1,216653	1,231347	1,246182	1,261160	1,276282	1,291548	1,306960	1,322519
6	1,229255	1,247179	1,265319	1,283679	1,302260	1,321065	1,340096	1,359354	1,378843	1,398564
7	1,272279	1,293948	1,315932	1,338235	1,360862	1,383816	1,407100	1,430720	1,454679	1,478981
8	1,316809	1,342471	1,368569	1,395110	1,422101	1,449547	1,477455	1,505833	1,534687	1,564023
9	1,362897	1,392813	1,423312	1,454402	1,486095	1,518400	1,551328	1,584889	1,619094	1,653954
10	1,410599	1,445044	1,480244	1,516214	1,552969	1,590524	1,628895	1,668096	1,708144	1,749056
11	1,459970	1,499233	1,539454	1,580654	1,622853	1,666074	1,710339	1,755671	1,802092	1,849627
12	1,511069	1,555454	1,601032	1,647831	1,695881	1,745213	1,795856	1,847844	1,901207	1,955980
13	1,563956	1,613784	1,665074	1,717864	1,772196	1,828110	1,885649	1,944856	2,005774	2,068449
14	1,618695	1,674301	1,731676	1,790873	1,851945	1,914946	1,979932	2,046961	2,116091	2,187385
15	1,675349	1,737087	1,800944	1,866986	1,935282	2,005906	2,078928	2,154426	2,232476	2,313160
16	1,733986	1,802228	1,872981	1,946332	2,022370	2,101186	2,182875	2,267533	2,355263	2,446167
17	1,794676	1,869811	1,947900	2,029052	2,113377	2,200992	2,292018	2,386579	2,484802	2,586821
18	1,857489	1,939929	2,025817	2,115286	2,208479	2,305540	2,406619	2,511874	2,621466	2,735563
19	1,922501	2,012677	2,106849	2,205186	2,307860	2,415053	2,526950	2,643748	2,765647	2,892858
20	1,989789	2,088152	2,191123	2,298906	2,411714	2,529768	2,653298	2,782544	2,917757	3,059198
21	2,059431	2,166458	2,278768	2,396610	2,520241	2,649932	2,785963	2,928628	3,078234	3,235101
22	2,131512	2,247700	2,369919	2,498466	2,633652	2,775803	2,925261	3,082381	3,247537	3,421120
23	2,206114	2,331989	2,464716	2,604651	2,752166	2,907654	3,071524	3,244206	3,426152	3,617834
24	2,283328	2,419438	2,563304	2,715348	2,876014	3,045768	3,225100	3,414527	3,614590	3,825860
25	2,363245	2,510167	2,665836	2,830750	3,005434	3,190442	3,386355	3,593789	3,813392	4,045846
26	2,445959	2,604298	2,772470	2,951057	3,140679	3,341988	3,555673	3,782463	4,023129	4,278483
27	2,531567	2,701960	2,883369	3,076477	3,282010	3,500732	3,733456	3,981043	4,244401	4,524495
28	2,620172	2,803283	2,998703	3,207228	3,429700	3,667017	3,920129	4,190047	4,477843	4,784654
29	2,711878	2,908406	3,118651	3,343535	3,584036	3,841200	4,116136	4,410025	4,724124	5,059772
30	2,806794	3,017471	3,243398	3,485635	3,745318	4,023657	4,321942	4,641551	4,983951	5,350708
31	2,905031	3,130627	3,373133	3,633775	3,913857	4,214781	4,538039	4,885233	5,258069	5,658374
32	3,006708	3,248025	3,508059	3,788210	4,089981	4,414983	4,764941	5,141707	5,547262	5,983731
33	3,111942	3,369826	3,648381	3,949209	4,274030	4,624694	5,003189	5,411647	5,852362	6,327795
34	3,220860	3,496194	3,794316	4,117050	4,466362	4,844367	5,253348	5,695758	6,174242	6,691643
35	3,333590	3,627302	3,946089	4,292025	4,667348	5,074475	5,516015	5,994786	6,513825	7,076413
36	3,450266	3,763326	4,103933	4,474436	4,877378	5,315512	5,791816	6,309512	6,872085	7,483307
37	3,571025	3,904450	4,268090	4,664599	5,096860	5,567999	6,081407	6,640761	7,250050	7,913597
38	3,696011	4,050867	4,438813	4,862845	5,326219	5,832479	6,385477	6,989401	7,648803	8,368629
39	3,825372	4,202775	4,616366	5,069516	5,565899	6,109522	6,704751	7,356345	8,069487	8,849825
40	3,959260	4,360379	4,801021	5,284970	5,816365	6,399724	7,039989	7,742553	8,513309	9,358690
41	4,097834	4,523893	4,993061	5,509581	6,078101	6,703711	7,391988	8,149037	8,981541	9,896814
42	4,241258	4,693539	5,192784	5,743739	6,351615	7,022137	7,761588	8,576861	9,475525	10,465881
43	4,389702	4,869547	5,400495	5,987848	6,637438	7,355689	8,149667	9,027147	9,996679	11,067669
44	4,543342	5,052155	5,616515	6,242331	6,936123	7,705084	8,557150	9,501072	10,546497	11,704060
45	4,702359	5,241610	5,841176	6,507630	7,248248	8,071076	8,985008	9,999878	11,126554	12,377044
46	4,866941	5,438171	6,074823	6,784204	7,574420	8,454452	9,434258	10,524872	11,738515	13,088724
47	5,037284	5,642102	6,317816	7,072533	7,915268	8,856038	9,905971	11,077427	12,384133	13,841325
48	5,213589	5,853681	6,570528	7,373116	8,271456	9,276700	10,401270	11,658992	13,065260	14,637201
49	5,396065	6,073194	6,833349	7,686473	8,643671	9,717343	10,921333	12,271089	13,783849	15,478841
50	5,584927	6,300939	7,106683	8,013148	9,032636	10,178917	11,467400	12,915322	14,541961	16,368874

Table T. 1 **Valeur acquise par un capital d'un DH : $C_n = (1 + t)^n$**

n t	6,00%	6,25%	6,50%	6,75%	7,00%	7,25%	7,50%	7,75%	8,00%	8,25%
1	1,060000	1,062500	1,065000	1,067500	1,070000	1,072500	1,075000	1,077500	1,080000	1,082500
2	1,123600	1,128906	1,134225	1,139556	1,144900	1,150256	1,155625	1,161006	1,166400	1,171806
3	1,191016	1,199463	1,207950	1,216476	1,225043	1,233650	1,242297	1,250984	1,259712	1,268480
4	1,262477	1,274429	1,286466	1,298588	1,310796	1,323089	1,335469	1,347936	1,360489	1,373130
5	1,338226	1,354081	1,370087	1,386243	1,402552	1,419013	1,435629	1,452401	1,469328	1,486413
6	1,418519	1,438711	1,459142	1,479815	1,500730	1,521892	1,543302	1,564962	1,586874	1,609042
7	1,503630	1,528631	1,553987	1,579702	1,605781	1,632229	1,659049	1,686246	1,713824	1,741788
8	1,593848	1,624170	1,654996	1,686332	1,718186	1,750566	1,783478	1,816930	1,850930	1,885486
9	1,689479	1,725681	1,762570	1,800159	1,838459	1,877482	1,917239	1,957742	1,999005	2,041038
10	1,790848	1,833536	1,877137	1,921670	1,967151	2,013599	2,061032	2,109467	2,158925	2,209424
11	1,898299	1,948132	1,999151	2,051383	2,104852	2,159585	2,215609	2,272951	2,331639	2,391701
12	2,012196	2,069890	2,129096	2,189851	2,252192	2,316155	2,381780	2,449105	2,518170	2,589017
13	2,132928	2,199258	2,267487	2,337666	2,409845	2,484076	2,560413	2,638910	2,719624	2,802611
14	2,260904	2,336712	2,414874	2,495459	2,578534	2,664172	2,752444	2,843426	2,937194	3,033826
15	2,396558	2,482756	2,571841	2,663902	2,759032	2,857324	2,958877	3,063791	3,172169	3,284117
16	2,540352	2,637928	2,739011	2,843715	2,952164	3,064480	3,180793	3,301235	3,425943	3,555056
17	2,692773	2,802799	2,917046	3,035666	3,158815	3,286655	3,419353	3,557081	3,700018	3,848348
18	2,854339	2,977974	3,106654	3,240574	3,379932	3,524937	3,675804	3,832755	3,996019	4,165837
19	3,025600	3,164097	3,308587	3,459312	3,616528	3,780495	3,951489	4,129793	4,315701	4,509519
20	3,207135	3,361853	3,523645	3,692816	3,869684	4,054581	4,247851	4,449852	4,660957	4,881554
21	3,399564	3,571969	3,752682	3,942081	4,140562	4,348538	4,566440	4,794716	5,033834	5,284282
22	3,603537	3,795217	3,996606	4,208172	4,430402	4,663808	4,908923	5,166306	5,436540	5,720236
23	3,819750	4,032418	4,256386	4,492223	4,740530	5,001934	5,277092	5,566695	5,871464	6,192155
24	4,048935	4,284445	4,533051	4,795448	5,072367	5,364574	5,672874	5,998114	6,341181	6,703008
25	4,291871	4,552222	4,827699	5,119141	5,427433	5,753505	6,098340	6,462967	6,848475	7,256006
26	4,549383	4,836736	5,141500	5,464683	5,807353	6,170634	6,555715	6,963847	7,396353	7,854626
27	4,822346	5,139032	5,475697	5,833549	6,213868	6,618005	7,047394	7,503546	7,988061	8,502633
28	5,111687	5,460222	5,831617	6,227314	6,648838	7,097811	7,575948	8,085070	8,627106	9,204100
29	5,418388	5,801486	6,210672	6,647657	7,114257	7,612402	8,144144	8,711663	9,317275	9,963439
30	5,743491	6,164079	6,614366	7,096374	7,612255	8,164301	8,754955	9,386817	10,062657	10,785422
31	6,088101	6,549333	7,044300	7,575380	8,145113	8,756213	9,411577	10,114296	10,867669	11,675220
32	6,453387	6,958667	7,502179	8,086718	8,715271	9,391039	10,117445	10,898154	11,737083	12,638425
33	6,840590	7,393583	7,989821	8,632571	9,325340	10,071889	10,876253	11,742760	12,676050	13,681095
34	7,251025	7,855682	8,509159	9,215270	9,978114	10,802101	11,691972	12,652824	13,690134	14,809786
35	7,686087	8,346663	9,062255	9,837300	10,676581	11,585253	12,568870	13,633418	14,785344	16,031593
36	8,147252	8,868329	9,651301	10,501318	11,423942	12,425184	13,511536	14,690008	15,968172	17,354199
37	8,636087	9,422600	10,278636	11,210157	12,223618	13,326010	14,524901	15,828484	17,245626	18,785921
38	9,154252	10,011512	10,946747	11,966843	13,079271	14,292146	15,614268	17,055191	18,625276	20,335759
39	9,703507	10,637231	11,658286	12,774605	13,994820	15,328326	16,785339	18,376969	20,115298	22,013459
40	10,285718	11,302058	12,416075	13,636890	14,974458	16,439630	18,044239	19,801184	21,724521	23,829570
41	10,902861	12,008437	13,223119	14,557380	16,022670	17,631503	19,397557	21,335775	23,462483	25,795509
42	11,557033	12,758964	14,082622	15,540004	17,144257	18,909787	20,852374	22,989298	25,339482	27,923639
43	12,250455	13,556400	14,997993	16,588954	18,344355	20,280747	22,416302	24,770969	27,366640	30,227339
44	12,985482	14,403675	15,972862	17,708708	19,628460	21,751101	24,097524	26,690719	29,555972	32,721094
45	13,764611	15,303904	17,011098	18,904046	21,002452	23,328055	25,904839	28,759249	31,920449	35,420585
46	14,590487	16,260398	18,116820	20,180069	22,472623	25,019339	27,847702	30,988091	34,474085	38,342783
47	15,465917	17,276673	19,294413	21,542224	24,045707	26,833242	29,936279	33,389668	37,232012	41,506063
48	16,393872	18,356465	20,548550	22,996324	25,728907	28,778652	32,181500	35,977368	40,210573	44,930313
49	17,377504	19,503744	21,884205	24,548576	27,529930	30,865104	34,595113	38,765614	43,427419	48,637064
50	18,420154	20,722728	23,306679	26,205605	29,457025	33,102824	37,189746	41,769949	46,901613	52,649621

Table T. 1 Valeur acquise par un capital d'un DH : $C_n = (1 + t)^n$

n t	8,50%	8,75%	9,00%	9,25%	9,50%	9,75%	10,00%	10,25%	10,50%	10,75%
1	1,085000	1,087500	1,090000	1,092500	1,095000	1,097500	1,100000	1,102500	1,105000	1,107500
2	1,177225	1,182656	1,188100	1,193556	1,199025	1,204506	1,210000	1,215506	1,221025	1,226556
3	1,277289	1,286139	1,295029	1,303960	1,312932	1,321946	1,331000	1,340096	1,349233	1,358411
4	1,385859	1,398676	1,411582	1,424577	1,437661	1,450835	1,464100	1,477455	1,490902	1,504440
5	1,503657	1,521060	1,538624	1,556350	1,574239	1,592292	1,610510	1,628895	1,647447	1,666168
6	1,631468	1,654153	1,677100	1,700312	1,723791	1,747540	1,771561	1,795856	1,820429	1,845281
7	1,770142	1,798891	1,828039	1,857591	1,887552	1,917925	1,948717	1,979932	2,011574	2,043648
8	1,920604	1,956294	1,992563	2,029418	2,066869	2,104923	2,143589	2,182875	2,222789	2,263340
9	2,083856	2,127470	2,171893	2,217139	2,263222	2,310153	2,357948	2,406619	2,456182	2,506650
10	2,260983	2,313623	2,367364	2,422225	2,478228	2,535393	2,593742	2,653298	2,714081	2,776114
11	2,453167	2,516065	2,580426	2,646281	2,713659	2,782594	2,853117	2,925261	2,999059	3,074547
12	2,661686	2,736221	2,812665	2,891062	2,971457	3,053897	3,138428	3,225100	3,313961	3,405060
13	2,887930	2,975640	3,065805	3,158485	3,253745	3,351652	3,452271	3,555673	3,661926	3,771104
14	3,133404	3,236009	3,341727	3,450645	3,562851	3,678438	3,797498	3,920129	4,046429	4,176498
15	3,399743	3,519160	3,642482	3,769829	3,901322	4,037085	4,177248	4,321942	4,471304	4,625472
16	3,688721	3,827086	3,970306	4,118539	4,271948	4,430701	4,594973	4,764941	4,940791	5,122710
17	4,002262	4,161956	4,327633	4,499503	4,677783	4,862695	5,054470	5,253348	5,459574	5,673401
18	4,342455	4,526127	4,717120	4,915707	5,122172	5,336807	5,559917	5,791816	6,032829	6,283292
19	4,711563	4,922164	5,141661	5,370410	5,608778	5,857146	6,115909	6,385477	6,666276	6,958746
20	5,112046	5,352853	5,604411	5,867173	6,141612	6,428218	6,727500	7,039989	7,366235	7,706811
21	5,546570	5,821228	6,108808	6,409887	6,725065	7,054969	7,400250	7,761588	8,139690	8,535293
22	6,018028	6,330585	6,658600	7,002801	7,363946	7,742828	8,140275	8,557150	8,994357	9,452837
23	6,529561	6,884511	7,257874	7,650560	8,063521	8,497754	8,954302	9,434258	9,938764	10,469017
24	7,084574	7,486906	7,911083	8,358237	8,829556	9,326285	9,849733	10,401270	10,982335	11,594436
25	7,686762	8,142010	8,623081	9,131374	9,668364	10,235598	10,834706	11,467400	12,135480	12,840838
26	8,340137	8,854436	9,399158	9,976026	10,586858	11,233569	11,918177	12,642808	13,409705	14,221228
27	9,049049	9,629199	10,245082	10,898809	11,592610	12,328842	13,109994	13,938696	14,817724	15,750010
28	9,818218	10,471754	11,167140	11,906949	12,693908	13,530904	14,420994	15,367412	16,373585	17,443136
29	10,652766	11,388033	12,172182	13,008341	13,899829	14,850167	15,863093	16,942572	18,092812	19,318274
30	11,558252	12,384485	13,267678	14,211613	15,220313	16,298058	17,449402	18,679186	19,992557	21,394988
31	12,540703	13,468128	14,461770	15,526187	16,666242	17,887119	19,194342	20,593802	22,091775	23,694949
32	13,606663	14,646589	15,763329	16,962359	18,249535	19,631113	21,113777	22,704667	24,411412	26,242156
33	14,763229	15,928166	17,182028	18,531378	19,983241	21,545147	23,225154	25,031896	26,974610	29,063188
34	16,018104	17,321880	18,728411	20,245530	21,881649	23,645798	25,547670	27,597665	29,806944	32,187481
35	17,379642	18,837545	20,413968	22,118242	23,960406	25,951264	28,102437	30,426426	32,936673	35,647635
36	18,856912	20,485830	22,251225	24,164179	26,236644	28,481512	30,912681	33,545134	36,395024	39,479756
37	20,459750	22,278340	24,253835	26,399365	28,729126	31,258459	34,003949	36,983510	40,216501	43,723829
38	22,198828	24,227695	26,436680	28,841307	31,458393	34,306159	37,404343	40,774320	44,439234	48,424141
39	24,085729	26,347618	28,815982	31,509128	34,446940	37,651010	41,144778	44,953688	49,105354	53,629736
40	26,133016	28,653035	31,409420	34,423722	37,719399	41,321983	45,259256	49,561441	54,261416	59,394933
41	28,354322	31,160175	34,236268	37,607916	41,302742	45,350877	49,785181	54,641489	59,958864	65,779888
42	30,764439	33,886691	37,317532	41,086649	45,226503	49,772587	54,763699	60,242241	66,254545	72,851226
43	33,379417	36,851776	40,676110	44,887164	49,523020	54,625414	60,240069	66,417071	73,211272	80,682733
44	36,216667	40,076306	44,336960	49,039226	54,227707	59,951392	66,264076	73,224821	80,898456	89,356127
45	39,295084	43,582983	48,327286	53,575355	59,379340	65,796653	72,890484	80,730365	89,392794	98,961910
46	42,635166	47,396494	52,676742	58,531075	65,020377	72,211827	80,179532	89,005227	98,779037	109,600316
47	46,259155	51,543687	57,417649	63,945199	71,197313	79,252480	88,197485	98,128263	109,150836	121,382350
48	50,191183	56,053760	62,585237	69,860130	77,961057	86,979596	97,017234	108,186410	120,611674	134,430952
49	54,457434	60,958464	68,217908	76,322192	85,367358	95,460107	106,718957	119,275517	133,275900	148,882280
50	59,086316	66,292330	74,357520	83,381995	93,477257	104,767467	117,390853	131,501258	147,269869	164,887125

Table T. 1 Valeur acquise par un capital d'un DH : $C_n = (1 + t)^n$

n t	11,00%	11,25%	11,50%	11,75%	12,00%	12,25%	12,50%	12,75%	13,00%	13,25%
1	1,110000	1,112500	1,115000	1,117500	1,120000	1,122500	1,125000	1,127500	1,130000	1,132500
2	1,232100	1,237656	1,243225	1,248806	1,254400	1,260006	1,265625	1,271256	1,276900	1,282556
3	1,367631	1,376893	1,386196	1,395541	1,404928	1,414357	1,423828	1,433341	1,442897	1,452495
4	1,518070	1,531793	1,545608	1,559517	1,573519	1,587616	1,601807	1,616092	1,630474	1,644951
5	1,685058	1,704120	1,723353	1,742760	1,762342	1,782099	1,802032	1,822144	1,842435	1,862906
6	1,870415	1,895833	1,921539	1,947535	1,973823	2,000406	2,027287	2,054468	2,081952	2,109742
7	2,076160	2,109114	2,142516	2,176370	2,210681	2,245455	2,280697	2,316412	2,352605	2,389282
8	2,304538	2,346390	2,388905	2,432093	2,475963	2,520524	2,565785	2,611755	2,658444	2,705862
9	2,558037	2,610359	2,663629	2,717864	2,773079	2,829288	2,886508	2,944754	3,004042	3,064389
10	2,839421	2,904024	2,969947	3,037213	3,105848	3,175876	3,247321	3,320210	3,394567	3,470421
11	3,151757	3,230727	3,311491	3,394086	3,478550	3,564920	3,653236	3,743536	3,835861	3,930251
12	3,498451	3,594183	3,692312	3,792891	3,895976	4,001623	4,109891	4,220837	4,334523	4,451010
13	3,883280	3,998529	4,116928	4,238556	4,363493	4,491822	4,623627	4,758994	4,898011	5,040768
14	4,310441	4,448364	4,590375	4,736586	4,887112	5,042070	5,201580	5,365766	5,534753	5,708670
15	4,784589	4,948804	5,118268	5,293135	5,473566	5,659724	5,851778	6,049901	6,254270	6,465069
16	5,310894	5,505545	5,706869	5,915078	6,130394	6,353040	6,583250	6,821263	7,067326	7,321691
17	5,895093	6,124919	6,363159	6,610100	6,866041	7,131287	7,406156	7,690974	7,986078	8,291815
18	6,543553	6,813972	7,094922	7,386787	7,689966	8,004870	8,331926	8,671574	9,024268	9,390480
19	7,263344	7,580544	7,910838	8,254734	8,612762	8,985467	9,373417	9,777199	10,197423	10,634719
20	8,062312	8,433355	8,820584	9,224666	9,646293	10,086186	10,545094	11,023792	11,523088	12,043819
21	8,949166	9,382108	9,834951	10,308564	10,803848	11,321744	11,863231	12,429326	13,021089	13,639625
22	9,933574	10,437595	10,965971	11,519820	12,100310	12,708658	13,346134	14,014065	14,713831	15,446875
23	11,026267	11,611824	12,227057	12,873399	13,552347	14,265469	15,014401	15,800858	16,626629	17,493586
24	12,239157	12,918154	13,633169	14,386023	15,178629	16,012989	16,891201	17,815467	18,788091	19,811486

n t	13,50%	13,75%	14,00%	14,25%	14,50%	14,75%	15,00%	15,25%	15,50%	15,75%
1	1,135000	1,137500	1,140000	1,142500	1,145000	1,147500	1,150000	1,152500	1,155000	1,157500
2	1,288225	1,293906	1,299600	1,305306	1,311025	1,316756	1,322500	1,328256	1,334025	1,339806
3	1,462135	1,471818	1,481544	1,491312	1,501124	1,510978	1,520875	1,530815	1,540799	1,550826
4	1,659524	1,674193	1,688960	1,703824	1,718787	1,733847	1,749006	1,764265	1,779623	1,795081
5	1,883559	1,904395	1,925415	1,946619	1,968011	1,989589	2,011357	2,033315	2,055464	2,077806
6	2,137840	2,166249	2,194973	2,224013	2,253372	2,283054	2,313061	2,343396	2,374061	2,405060
7	2,426448	2,464109	2,502269	2,540934	2,580111	2,619804	2,660020	2,700763	2,742041	2,783857
8	2,754019	2,802923	2,852586	2,903018	2,954227	3,006225	3,059023	3,112630	3,167057	3,222315
9	3,125811	3,188325	3,251949	3,316698	3,382590	3,449644	3,517876	3,587306	3,657951	3,729830
10	3,547796	3,626720	3,707221	3,789327	3,873066	3,958466	4,045558	4,134370	4,224933	4,317278
11	4,026748	4,125394	4,226232	4,329306	4,434660	4,542340	4,652391	4,764861	4,879798	4,997249
12	4,570359	4,692636	4,817905	4,946232	5,077686	5,212335	5,350250	5,491503	5,636166	5,784316
13	5,187358	5,337873	5,492411	5,651070	5,813950	5,981155	6,152788	6,328957	6,509772	6,695346
14	5,887651	6,071831	6,261349	6,456348	6,656973	6,863375	7,075706	7,294123	7,518787	7,749862
15	6,682484	6,906708	7,137938	7,376377	7,622234	7,875723	8,137062	8,406477	8,684199	8,970466
16	7,584619	7,856380	8,137249	8,427511	8,727458	9,037392	9,357621	9,688464	10,030250	10,383314
17	8,608543	8,936632	9,276464	9,628432	9,992940	10,370407	10,761264	11,165955	11,584938	12,018686
18	9,770696	10,165419	10,575169	11,000483	11,441916	11,900042	12,375454	12,868763	13,380604	13,911629
19	11,089740	11,563164	12,055693	12,568052	13,100994	13,655298	14,231772	14,831250	15,454598	16,102711
20	12,586855	13,153100	13,743490	14,358999	15,000638	15,669455	16,366537	17,093015	17,850060	18,638888
21	14,286080	14,961651	15,667578	16,405157	17,175731	17,980699	18,821518	19,699700	20,616820	21,574513
22	16,214701	17,018878	17,861039	18,742892	19,666212	20,632852	21,644746	22,703904	23,812427	24,972498
23	18,403686	19,358973	20,361585	21,413754	22,517812	23,676198	24,891458	26,166250	27,503353	28,905667
24	20,888184	22,020832	23,212207	24,465213	25,782895	27,168437	28,625176	30,156603	31,766372	33,458309

Table T. 1 Valeur acquise par un capital d'un DH : $C_n = (1 + t)^n$

n t	16,00%	16,25%	16,50%	16,75%	17,00%	17,25%	17,50%	17,75%	18,00%	18,25%
1	1,160000	1,162500	1,165000	1,167500	1,170000	1,172500	1,175000	1,177500	1,180000	1,182500
2	1,345600	1,351406	1,357225	1,363056	1,368900	1,374756	1,380625	1,386506	1,392400	1,398306
3	1,560896	1,571010	1,581167	1,591368	1,601613	1,611902	1,622234	1,632611	1,643032	1,653497
4	1,810639	1,826299	1,842060	1,857922	1,873887	1,889955	1,906125	1,922400	1,938778	1,955260
5	2,100342	2,123072	2,146000	2,169124	2,192448	2,215972	2,239697	2,263626	2,287758	2,312095
6	2,436396	2,468072	2,500089	2,532453	2,565164	2,598227	2,631644	2,665419	2,699554	2,734053
7	2,826220	2,869133	2,912604	2,956638	3,001242	3,046421	3,092182	3,138531	3,185474	3,233017
8	3,278415	3,335367	3,393184	3,451875	3,511453	3,571929	3,633314	3,695620	3,758859	3,823043
9	3,802961	3,877365	3,953059	4,030065	4,108400	4,188087	4,269144	4,351593	4,435454	4,520748
10	4,411435	4,507436	4,605314	4,705100	4,806828	4,910532	5,016244	5,124000	5,233836	5,345785
11	5,117265	5,239895	5,365191	5,493205	5,623989	5,757598	5,894087	6,033511	6,175926	6,321391
12	5,936027	6,091378	6,250447	6,413316	6,580067	6,750784	6,925552	7,104459	7,287593	7,475045

n t	18,50%	18,75%	19,00%	19,25%	19,50%	19,75%	20,00%	20,25%	20,50%	20,75%
1	1,185000	1,187500	1,190000	1,192500	1,195000	1,197500	1,200000	1,202500	1,205000	1,207500
2	1,404225	1,410156	1,416100	1,422056	1,428025	1,434006	1,440000	1,446006	1,452025	1,458056
3	1,664007	1,674561	1,685159	1,695802	1,706490	1,717222	1,728000	1,738823	1,749690	1,760603
4	1,971848	1,988541	2,005339	2,022244	2,039255	2,056374	2,073600	2,090934	2,108377	2,125928
5	2,336640	2,361392	2,386354	2,411526	2,436910	2,462508	2,488320	2,514348	2,540594	2,567058
6	2,768918	2,804153	2,839761	2,875745	2,912108	2,948853	2,985984	3,023504	3,061416	3,099723
7	3,281168	3,329932	3,379315	3,429326	3,479969	3,531252	3,583181	3,635763	3,689006	3,742915
8	3,888184	3,954294	4,021385	4,089471	4,158563	4,228674	4,299817	4,372005	4,445252	4,519570
9	4,607498	4,695724	4,785449	4,876694	4,969482	5,063837	5,159780	5,257336	5,356529	5,457381
10	5,459885	5,576172	5,694684	5,815457	5,938531	6,063945	6,191736	6,321947	6,454617	6,589787
11	6,469964	6,621705	6,776674	6,934933	7,096545	7,261574	7,430084	7,602141	7,777813	7,957168
12	7,666907	7,863274	8,064242	8,269908	8,480371	8,695734	8,916100	9,141575	9,372265	9,608280

n t	21,00%	21,25%	21,50%	21,75%	22,00%	22,25%	22,50%	22,75%	23,00%	23,25%
1	1,210000	1,212500	1,215000	1,217500	1,220000	1,222500	1,225000	1,227500	1,230000	1,232500
2	1,464100	1,470156	1,476225	1,482306	1,488400	1,494506	1,500625	1,506756	1,512900	1,519056
3	1,771561	1,782564	1,793613	1,804708	1,815848	1,827034	1,838266	1,849543	1,860867	1,872237
4	2,143589	2,161359	2,179240	2,197232	2,215335	2,233549	2,251875	2,270314	2,288866	2,307532
5	2,593742	2,620648	2,647777	2,675130	2,702708	2,730514	2,758547	2,786811	2,815306	2,844033
6	3,138428	3,177536	3,217049	3,256970	3,297304	3,338053	3,379221	3,420810	3,462826	3,505271
7	3,797498	3,852762	3,908714	3,965362	4,022711	4,080770	4,139545	4,199045	4,259276	4,320246
8	4,594973	4,671474	4,749088	4,827828	4,907707	4,988741	5,070943	5,154327	5,238909	5,324703
9	5,559917	5,664163	5,770142	5,877880	5,987403	6,098736	6,211905	6,326937	6,443859	6,562697
10	6,727500	6,867797	7,010723	7,156319	7,304631	7,455704	7,609584	7,766315	7,925946	8,088524
11	8,140275	8,327204	8,518028	8,712819	8,911650	9,114599	9,321740	9,533152	9,748914	9,969106
12	9,849733	10,096735	10,349404	10,607857	10,872213	11,142597	11,419131	11,701944	11,991164	12,286923

Table T. 2 Valeur actuelle d'un capital d'un DH : $C_n = (1 + t)^{-n}$

n t	0,05%	0,10%	0,20%	0,30%	0,40%	0,50%	0,60%	0,70%	0,80%	0,90%
1	0,999500	0,999001	0,998004	0,997009	0,996016	0,995025	0,994036	0,993049	0,992063	0,991080
2	0,999001	0,998003	0,996012	0,994027	0,992048	0,990075	0,988107	0,986146	0,984190	0,982240
3	0,998501	0,997006	0,994024	0,991054	0,988095	0,985149	0,982214	0,979291	0,976379	0,973479
4	0,998002	0,996010	0,992040	0,988089	0,984159	0,980248	0,976356	0,972483	0,968630	0,964796
5	0,997504	0,995015	0,990060	0,985134	0,980238	0,975371	0,970533	0,965723	0,960942	0,956190
6	0,997005	0,994021	0,988084	0,982187	0,976332	0,970518	0,964744	0,959010	0,953316	0,947661
7	0,996507	0,993028	0,986111	0,979250	0,972443	0,965690	0,958990	0,952344	0,945750	0,939208
8	0,996009	0,992036	0,984143	0,976321	0,968568	0,960885	0,953271	0,945724	0,938244	0,930831
9	0,995511	0,991045	0,982179	0,973401	0,964710	0,956105	0,947585	0,939150	0,930798	0,922528
10	0,995014	0,990055	0,980218	0,970489	0,960866	0,951348	0,941933	0,932621	0,923410	0,914299
11	0,994516	0,989066	0,978262	0,967586	0,957038	0,946615	0,936315	0,926138	0,916082	0,906144
12	0,994019	0,988078	0,976309	0,964692	0,953225	0,941905	0,930731	0,919700	0,908811	0,898061
13	0,993523	0,987091	0,974360	0,961807	0,949427	0,937219	0,925180	0,913307	0,901598	0,890051
14	0,993026	0,986104	0,972416	0,958930	0,945645	0,932556	0,919662	0,906958	0,894443	0,882112
15	0,992530	0,985119	0,970475	0,956062	0,941877	0,927917	0,914177	0,900654	0,887344	0,874244
16	0,992034	0,984135	0,968538	0,953202	0,938125	0,923300	0,908725	0,894393	0,880302	0,866446
17	0,991538	0,983152	0,966604	0,950351	0,934387	0,918707	0,903305	0,888176	0,873315	0,858717
18	0,991043	0,982170	0,964675	0,947509	0,930665	0,914136	0,897917	0,882002	0,866384	0,851058
19	0,990547	0,981189	0,962749	0,944675	0,926957	0,909588	0,892562	0,875871	0,859508	0,843467
20	0,990052	0,980208	0,960828	0,941849	0,923264	0,905063	0,887239	0,869782	0,852686	0,835943
21	0,989558	0,979229	0,958910	0,939032	0,919585	0,900560	0,881947	0,863736	0,845919	0,828487
22	0,989063	0,978251	0,956996	0,936223	0,915922	0,896080	0,876687	0,857732	0,839205	0,821097
23	0,988569	0,977274	0,955086	0,933423	0,912273	0,891622	0,871458	0,851770	0,832545	0,813773
24	0,988075	0,976297	0,953179	0,930631	0,908638	0,887186	0,866260	0,845849	0,825938	0,806514
25	0,987581	0,975322	0,951277	0,927848	0,905018	0,882772	0,861094	0,839969	0,819383	0,799320
26	0,987087	0,974348	0,949378	0,925072	0,901412	0,878380	0,855958	0,834130	0,812879	0,792191
27	0,986594	0,973374	0,947483	0,922306	0,897821	0,874010	0,850853	0,828332	0,806428	0,785124
28	0,986101	0,972402	0,945592	0,919547	0,894244	0,869662	0,845778	0,822574	0,800028	0,778121
29	0,985608	0,971431	0,943705	0,916796	0,890681	0,865335	0,840734	0,816856	0,793678	0,771181
30	0,985116	0,970460	0,941821	0,914054	0,887133	0,861030	0,835720	0,811177	0,787379	0,764302
31	0,984623	0,969491	0,939941	0,911320	0,883598	0,856746	0,830735	0,805539	0,781130	0,757485
32	0,984131	0,968522	0,938065	0,908595	0,880078	0,852484	0,825780	0,799939	0,774931	0,750728
33	0,983639	0,967555	0,936193	0,905877	0,876572	0,848242	0,820855	0,794378	0,768781	0,744032
34	0,983148	0,966588	0,934324	0,903167	0,873079	0,844022	0,815960	0,788856	0,762679	0,737395
35	0,982657	0,965622	0,932459	0,900466	0,869601	0,839823	0,811093	0,783373	0,756626	0,730818
36	0,982165	0,964658	0,930598	0,897773	0,866136	0,835645	0,806256	0,777927	0,750621	0,724299
37	0,981675	0,963694	0,928740	0,895087	0,862686	0,831487	0,801447	0,772520	0,744664	0,717839
38	0,981184	0,962731	0,926887	0,892410	0,859249	0,827351	0,796667	0,767150	0,738754	0,711436
39	0,980694	0,961769	0,925036	0,889741	0,855825	0,823235	0,791915	0,761817	0,732891	0,705090
40	0,980204	0,960809	0,923190	0,887080	0,852416	0,819139	0,787192	0,756521	0,727074	0,698801
41	0,979714	0,959849	0,921347	0,884426	0,849020	0,815064	0,782497	0,751262	0,721304	0,692568
42	0,979224	0,958890	0,919508	0,881781	0,845637	0,811009	0,777830	0,746040	0,715579	0,686390
43	0,978735	0,957932	0,917673	0,879144	0,842268	0,806974	0,773191	0,740854	0,709900	0,680268
44	0,978246	0,956975	0,915841	0,876514	0,838912	0,802959	0,768580	0,735704	0,704266	0,674200
45	0,977757	0,956019	0,914013	0,873893	0,835570	0,798964	0,763996	0,730590	0,698676	0,668186
46	0,977268	0,955064	0,912189	0,871279	0,832241	0,794989	0,759439	0,725512	0,693131	0,662226
47	0,976780	0,954110	0,910368	0,868673	0,828925	0,791034	0,754910	0,720468	0,687630	0,656319
48	0,976292	0,953157	0,908551	0,866074	0,825623	0,787098	0,750407	0,715460	0,682173	0,650465
49	0,975804	0,952204	0,906738	0,863484	0,822334	0,783182	0,745931	0,710487	0,676759	0,644663
50	0,975316	0,951253	0,904928	0,860901	0,819057	0,779286	0,741483	0,705548	0,671388	0,638913

Table T. 2 Valeur actuelle d'un capital d'un DH : $C_n = (1 + t)^{-n}$

n t	1,00%	1,25%	1,50%	1,75%	2,00%	2,25%	2,50%	2,75%	3,00%	3,25%
1	0,990099	0,987654	0,985222	0,982801	0,980392	0,977995	0,975610	0,973236	0,970874	0,968523
2	0,980296	0,975461	0,970662	0,965898	0,961169	0,956474	0,951814	0,947188	0,942596	0,938037
3	0,970590	0,963418	0,956317	0,949285	0,942322	0,935427	0,928599	0,921838	0,915142	0,908510
4	0,960980	0,951524	0,942184	0,932959	0,923845	0,914843	0,905951	0,897166	0,888487	0,879913
5	0,951466	0,939777	0,928260	0,916913	0,905731	0,894712	0,883854	0,873154	0,862609	0,852216
6	0,942045	0,928175	0,914542	0,901143	0,887971	0,875024	0,862297	0,849785	0,837484	0,825391
7	0,932718	0,916716	0,901027	0,885644	0,870560	0,855769	0,841265	0,827041	0,813092	0,799410
8	0,923483	0,905398	0,887711	0,870412	0,853490	0,836938	0,820747	0,804906	0,789409	0,774247
9	0,914340	0,894221	0,874592	0,855441	0,836755	0,818522	0,800728	0,783364	0,766417	0,749876
10	0,905287	0,883181	0,861667	0,840729	0,820348	0,800510	0,781198	0,762398	0,744094	0,726272
11	0,896324	0,872277	0,848933	0,826269	0,804263	0,782895	0,762145	0,741993	0,722421	0,703411
12	0,887449	0,861509	0,836387	0,812058	0,788493	0,765667	0,743556	0,722134	0,701380	0,681270
13	0,878663	0,850873	0,824027	0,798091	0,773033	0,748819	0,725420	0,702807	0,680951	0,659826
14	0,869963	0,840368	0,811849	0,784365	0,757875	0,732341	0,707727	0,683997	0,661118	0,639056
15	0,861349	0,829993	0,799852	0,770875	0,743015	0,716226	0,690466	0,665691	0,641862	0,618941
16	0,852821	0,819746	0,788031	0,757616	0,728446	0,700466	0,673625	0,647874	0,623167	0,599458
17	0,844377	0,809626	0,776385	0,744586	0,714163	0,685052	0,657195	0,630535	0,605016	0,580589
18	0,836017	0,799631	0,764912	0,731780	0,700159	0,669978	0,641166	0,613659	0,587395	0,562314
19	0,827740	0,789759	0,753607	0,719194	0,686431	0,655235	0,625528	0,597235	0,570286	0,544614
20	0,819544	0,780009	0,742470	0,706825	0,672971	0,640816	0,610271	0,581251	0,553676	0,527471
21	0,811430	0,770379	0,731498	0,694668	0,659776	0,626715	0,595386	0,565694	0,537549	0,510868
22	0,803396	0,760868	0,720688	0,682720	0,646839	0,612925	0,580865	0,550554	0,521893	0,494787
23	0,795442	0,751475	0,710037	0,670978	0,634156	0,599437	0,566697	0,535819	0,506692	0,479213
24	0,787566	0,742197	0,699544	0,659438	0,621721	0,586247	0,552875	0,521478	0,491934	0,464129
25	0,779768	0,733034	0,689206	0,648096	0,609531	0,573346	0,539391	0,507521	0,477606	0,449519
26	0,772048	0,723984	0,679021	0,636950	0,597579	0,560730	0,526235	0,493938	0,463695	0,435370
27	0,764404	0,715046	0,668986	0,625995	0,585862	0,548391	0,513400	0,480718	0,450189	0,421666
28	0,756836	0,706219	0,659099	0,615228	0,574375	0,536324	0,500878	0,467852	0,437077	0,408393
29	0,749342	0,697500	0,649359	0,604647	0,563112	0,524522	0,488661	0,455331	0,424346	0,395538
30	0,741923	0,688889	0,639762	0,594248	0,552071	0,512980	0,476743	0,443144	0,411987	0,383088
31	0,734577	0,680384	0,630308	0,584027	0,541246	0,501692	0,465115	0,431284	0,399987	0,371029
32	0,727304	0,671984	0,620993	0,573982	0,530633	0,490652	0,453771	0,419741	0,388337	0,359350
33	0,720103	0,663688	0,611816	0,564111	0,520229	0,479856	0,442703	0,408507	0,377026	0,348039
34	0,712973	0,655494	0,602774	0,554408	0,510028	0,469296	0,431905	0,397574	0,366045	0,337084
35	0,705914	0,647402	0,593866	0,544873	0,500028	0,458970	0,421371	0,386933	0,355383	0,326473
36	0,698925	0,639409	0,585090	0,535502	0,490223	0,448870	0,411094	0,376577	0,345032	0,316197
37	0,692005	0,631515	0,576443	0,526292	0,480611	0,438993	0,401067	0,366499	0,334983	0,306244
38	0,685153	0,623719	0,567924	0,517240	0,471187	0,429333	0,391285	0,356690	0,325226	0,296604
39	0,678370	0,616019	0,559531	0,508344	0,461948	0,419885	0,381741	0,347143	0,315754	0,287268
40	0,671653	0,608413	0,551262	0,499601	0,452890	0,410646	0,372431	0,337852	0,306557	0,278226
41	0,665003	0,600902	0,543116	0,491008	0,444010	0,401610	0,363347	0,328810	0,297628	0,269468
42	0,658419	0,593484	0,535089	0,482563	0,435304	0,392772	0,354485	0,320010	0,288959	0,260986
43	0,651900	0,586157	0,527182	0,474264	0,426769	0,384129	0,345839	0,311445	0,280543	0,252771
44	0,645445	0,578920	0,519391	0,466107	0,418401	0,375677	0,337404	0,303109	0,272372	0,244815
45	0,639055	0,571773	0,511715	0,458090	0,410197	0,367410	0,329174	0,294997	0,264439	0,237109
46	0,632728	0,564714	0,504153	0,450212	0,402154	0,359325	0,321146	0,287102	0,256737	0,229645
47	0,626463	0,557742	0,496702	0,442469	0,394268	0,351418	0,313313	0,279418	0,249259	0,222417
48	0,620260	0,550856	0,489362	0,434858	0,386538	0,343685	0,305671	0,271939	0,241999	0,215416
49	0,614119	0,544056	0,482130	0,427379	0,378958	0,336122	0,298216	0,264661	0,234950	0,208635
50	0,608039	0,537339	0,475005	0,420029	0,371528	0,328726	0,290942	0,257578	0,228107	0,202068

Table T. 2 **Valeur actuelle d'un capital d'un DH : $C_n = (1 + t)^{-n}$**

n t	3,50%	3,75%	4,00%	4,25%	4,50%	4,75%	5,00%	5,25%	5,50%	5,75%
1	0,966184	0,963855	0,961538	0,959233	0,956938	0,954654	0,952381	0,950119	0,947867	0,945626
2	0,933511	0,929017	0,924556	0,920127	0,915730	0,911364	0,907029	0,902726	0,898452	0,894209
3	0,901943	0,895438	0,888996	0,882616	0,876297	0,870037	0,863838	0,857697	0,851614	0,845588
4	0,871442	0,863073	0,854804	0,846634	0,838561	0,830585	0,822702	0,814914	0,807217	0,799611
5	0,841973	0,831878	0,821927	0,812119	0,802451	0,792921	0,783526	0,774265	0,765134	0,756133
6	0,813501	0,801810	0,790315	0,779011	0,767896	0,756965	0,746215	0,735643	0,725246	0,715019
7	0,785991	0,772829	0,759918	0,747253	0,734828	0,722640	0,710681	0,698949	0,687437	0,676141
8	0,759412	0,744895	0,730690	0,716789	0,703185	0,689871	0,676839	0,664084	0,651599	0,639377
9	0,733731	0,717971	0,702587	0,687568	0,672904	0,658588	0,644609	0,630959	0,617629	0,604612
10	0,708919	0,692020	0,675564	0,659537	0,643928	0,628723	0,613913	0,599486	0,585431	0,571737
11	0,684946	0,667008	0,649581	0,632650	0,616199	0,600213	0,584679	0,569583	0,554911	0,540650
12	0,661783	0,642899	0,624597	0,606858	0,589664	0,572996	0,556837	0,541171	0,525982	0,511253
13	0,639404	0,619662	0,600574	0,582118	0,564272	0,547013	0,530321	0,514177	0,498561	0,483454
14	0,617782	0,597264	0,577475	0,558387	0,539973	0,522208	0,505068	0,488529	0,472569	0,457167
15	0,596891	0,575676	0,555265	0,535623	0,516720	0,498528	0,481017	0,464161	0,447933	0,432309
16	0,576706	0,554869	0,533908	0,513787	0,494469	0,475922	0,458112	0,441008	0,424581	0,408803
17	0,557204	0,534813	0,513373	0,492841	0,473176	0,454341	0,436297	0,419010	0,402447	0,386575
18	0,538361	0,515483	0,493628	0,472749	0,452800	0,433738	0,415521	0,398109	0,381466	0,365555
19	0,520156	0,496851	0,474642	0,453477	0,433302	0,414070	0,395734	0,378251	0,361579	0,345679
20	0,502566	0,478892	0,456387	0,434989	0,414643	0,395293	0,376889	0,359383	0,342729	0,326883
21	0,485571	0,461583	0,438834	0,417256	0,396787	0,377368	0,358942	0,341457	0,324862	0,309109
22	0,469151	0,444899	0,421955	0,400246	0,379701	0,360256	0,341850	0,324425	0,307926	0,292302
23	0,453286	0,428819	0,405726	0,383929	0,363350	0,343920	0,325571	0,308242	0,291873	0,276408
24	0,437957	0,413319	0,390121	0,368277	0,347703	0,328324	0,310068	0,292866	0,276657	0,261379
25	0,423147	0,398380	0,375117	0,353263	0,332731	0,313436	0,295303	0,278258	0,262234	0,247167
26	0,408838	0,383981	0,360689	0,338862	0,318402	0,299223	0,281241	0,264378	0,248563	0,233728
27	0,395012	0,370102	0,346817	0,325047	0,304691	0,285655	0,267848	0,251190	0,235605	0,221019
28	0,381654	0,356725	0,333477	0,311796	0,291571	0,272701	0,255094	0,238661	0,223322	0,209002
29	0,368748	0,343831	0,320651	0,299085	0,279015	0,260335	0,242946	0,226756	0,211679	0,197637
30	0,356278	0,331403	0,308319	0,286892	0,267000	0,248530	0,231377	0,215445	0,200644	0,186891
31	0,344230	0,319425	0,296460	0,275196	0,255502	0,237260	0,220359	0,204699	0,190184	0,176729
32	0,332590	0,307879	0,285058	0,263977	0,244500	0,226501	0,209866	0,194488	0,180269	0,167120
33	0,321343	0,296751	0,274094	0,253215	0,233971	0,216231	0,199873	0,184787	0,170871	0,158033
34	0,310476	0,286025	0,263552	0,242892	0,223896	0,206425	0,190355	0,175569	0,161963	0,149440
35	0,299977	0,275687	0,253415	0,232990	0,214254	0,197065	0,181290	0,166812	0,153520	0,141315
36	0,289833	0,265722	0,243669	0,223492	0,205028	0,188129	0,172657	0,158491	0,145516	0,133631
37	0,280032	0,256118	0,234297	0,214381	0,196199	0,179598	0,164436	0,150585	0,137930	0,126365
38	0,270562	0,246861	0,225285	0,205641	0,187750	0,171454	0,156605	0,143074	0,130739	0,119494
39	0,261413	0,237938	0,216621	0,197257	0,179665	0,163679	0,149148	0,135937	0,123924	0,112997
40	0,252572	0,229338	0,208289	0,189216	0,171929	0,156257	0,142046	0,129156	0,117463	0,106853
41	0,244031	0,221049	0,200278	0,181502	0,164525	0,149171	0,135282	0,122714	0,111339	0,101043
42	0,235779	0,213059	0,192575	0,174103	0,157440	0,142407	0,128840	0,116593	0,105535	0,095549
43	0,227806	0,205358	0,185168	0,167005	0,150661	0,135949	0,122704	0,110777	0,100033	0,090353
44	0,220102	0,197935	0,178046	0,160197	0,144173	0,129784	0,116861	0,105251	0,094818	0,085440
45	0,212659	0,190781	0,171198	0,153666	0,137964	0,123899	0,111297	0,100001	0,089875	0,080795
46	0,205468	0,183885	0,164614	0,147401	0,132023	0,118281	0,105997	0,095013	0,085190	0,076402
47	0,198520	0,177239	0,158283	0,141392	0,126338	0,112917	0,100949	0,090274	0,080748	0,072247
48	0,191806	0,170833	0,152195	0,135628	0,120898	0,107797	0,096142	0,085771	0,076539	0,068319
49	0,185320	0,164658	0,146341	0,130099	0,115692	0,102909	0,091564	0,081492	0,072549	0,064604
50	0,179053	0,158707	0,140713	0,124795	0,110710	0,098242	0,087204	0,077427	0,068767	0,061092

Table T. 2 Valeur actuelle d'un capital d'un DH : $C_n = (1 + t)^{-n}$

n t	6,00%	6,25%	6,50%	6,75%	7,00%	7,25%	7,50%	7,75%	8,00%	8,25%
1	0,943396	0,941176	0,938967	0,936768	0,934579	0,932401	0,930233	0,928074	0,925926	0,923788
2	0,889996	0,885813	0,881659	0,877535	0,873439	0,869371	0,865333	0,861322	0,857339	0,853383
3	0,839619	0,833706	0,827849	0,822046	0,816298	0,810603	0,804961	0,799371	0,793832	0,788345
4	0,792094	0,784665	0,777323	0,770067	0,762895	0,755807	0,748801	0,741875	0,735030	0,728263
5	0,747258	0,738508	0,729881	0,721374	0,712986	0,704715	0,696559	0,688515	0,680583	0,672760
6	0,704961	0,695067	0,685334	0,675760	0,666342	0,657077	0,647962	0,638993	0,630170	0,621488
7	0,665057	0,654180	0,643506	0,633031	0,622750	0,612659	0,602755	0,593033	0,583490	0,574123
8	0,627412	0,615699	0,604231	0,593003	0,582009	0,571244	0,560702	0,550379	0,540269	0,530367
9	0,591898	0,579481	0,567353	0,555506	0,543934	0,532628	0,521583	0,510792	0,500249	0,489947
10	0,558395	0,545394	0,532726	0,520381	0,508349	0,496623	0,485194	0,474053	0,463193	0,452607
11	0,526788	0,513312	0,500212	0,487476	0,475093	0,463052	0,451343	0,439957	0,428883	0,418112
12	0,496969	0,483117	0,469683	0,456652	0,444012	0,431750	0,419854	0,408312	0,397114	0,386247
13	0,468839	0,454699	0,441017	0,427777	0,414964	0,402564	0,390562	0,378944	0,367698	0,356810
14	0,442301	0,427952	0,414100	0,400728	0,387817	0,375351	0,363313	0,351688	0,340461	0,329617
15	0,417265	0,402778	0,388827	0,375389	0,362446	0,349978	0,337966	0,326393	0,315242	0,304496
16	0,393646	0,379085	0,365095	0,351653	0,338735	0,326320	0,314387	0,302917	0,291890	0,281289
17	0,371364	0,356786	0,342813	0,329417	0,316574	0,304261	0,292453	0,281129	0,270269	0,259852
18	0,350344	0,335799	0,321890	0,308587	0,295864	0,283693	0,272049	0,260909	0,250249	0,240048
19	0,330513	0,316046	0,302244	0,289075	0,276508	0,264516	0,253069	0,242143	0,231712	0,221753
20	0,311805	0,297455	0,283797	0,270796	0,258419	0,246635	0,235413	0,224727	0,214548	0,204853
21	0,294155	0,279958	0,266476	0,253673	0,241513	0,229962	0,218989	0,208563	0,198656	0,189240
22	0,277505	0,263490	0,250212	0,237633	0,225713	0,214417	0,203711	0,193562	0,183941	0,174818
23	0,261797	0,247990	0,234941	0,222607	0,210947	0,199923	0,189498	0,179640	0,170315	0,161495
24	0,246979	0,233402	0,220602	0,208531	0,197147	0,186408	0,176277	0,166719	0,157699	0,149187
25	0,232999	0,219673	0,207138	0,195345	0,184249	0,173807	0,163979	0,154728	0,146018	0,137817
26	0,219810	0,206751	0,194496	0,182993	0,172195	0,162058	0,152539	0,143599	0,135202	0,127314
27	0,207368	0,194589	0,182625	0,171422	0,160930	0,151103	0,141896	0,133270	0,125187	0,117611
28	0,195630	0,183143	0,171479	0,160583	0,150402	0,140889	0,131997	0,123685	0,115914	0,108647
29	0,184557	0,172370	0,161013	0,150429	0,140563	0,131365	0,122788	0,114789	0,107328	0,100367
30	0,174110	0,162230	0,151186	0,140917	0,131367	0,122484	0,114221	0,106532	0,099377	0,092718
31	0,164255	0,152687	0,141959	0,132007	0,122773	0,114205	0,106252	0,098870	0,092016	0,085651
32	0,154957	0,143706	0,133295	0,123660	0,114741	0,106484	0,098839	0,091759	0,085200	0,079124
33	0,146186	0,135252	0,125159	0,115840	0,107235	0,099286	0,091943	0,085159	0,078889	0,073094
34	0,137912	0,127296	0,117520	0,108516	0,100219	0,092575	0,085529	0,079034	0,073045	0,067523
35	0,130105	0,119808	0,110348	0,101654	0,093663	0,086317	0,079562	0,073349	0,067635	0,062377
36	0,122741	0,112761	0,103613	0,095226	0,087535	0,080482	0,074011	0,068073	0,062625	0,057623
37	0,115793	0,106128	0,097289	0,089205	0,081809	0,075041	0,068847	0,063177	0,057986	0,053231
38	0,109239	0,099885	0,091351	0,083564	0,076457	0,069969	0,064044	0,058633	0,053690	0,049174
39	0,103056	0,094009	0,085776	0,078280	0,071455	0,065239	0,059576	0,054416	0,049713	0,045427
40	0,097222	0,088479	0,080541	0,073331	0,066780	0,060829	0,055419	0,050502	0,046031	0,041965
41	0,091719	0,083275	0,075625	0,068694	0,062412	0,056717	0,051553	0,046870	0,042621	0,038766
42	0,086527	0,078376	0,071010	0,064350	0,058329	0,052883	0,047956	0,043499	0,039464	0,035812
43	0,081630	0,073766	0,066676	0,060281	0,054513	0,049308	0,044610	0,040370	0,036541	0,033083
44	0,077009	0,069427	0,062606	0,056469	0,050946	0,045975	0,041498	0,037466	0,033834	0,030561
45	0,072650	0,065343	0,058785	0,052899	0,047613	0,042867	0,038603	0,034771	0,031328	0,028232
46	0,068538	0,061499	0,055197	0,049554	0,044499	0,039969	0,035910	0,032270	0,029007	0,026081
47	0,064658	0,057882	0,051828	0,046420	0,041587	0,037267	0,033404	0,029949	0,026859	0,024093
48	0,060998	0,054477	0,048665	0,043485	0,038867	0,034748	0,031074	0,027795	0,024869	0,022257
49	0,057546	0,051272	0,045695	0,040736	0,036324	0,032399	0,028906	0,025796	0,023027	0,020560
50	0,054288	0,048256	0,042906	0,038160	0,033948	0,030209	0,026889	0,023941	0,021321	0,018993

Table T. 2 Valeur actuelle d'un capital d'un DH : $C_n = (1 + t)^{-n}$

n t	8,50%	8,75%	9,00%	9,25%	9,50%	9,75%	10,00%	10,25%	10,50%	10,75%
1	0,921659	0,919540	0,917431	0,915332	0,913242	0,911162	0,909091	0,907029	0,904977	0,902935
2	0,849455	0,845554	0,841680	0,837832	0,834011	0,830216	0,826446	0,822702	0,818984	0,815291
3	0,782908	0,777521	0,772183	0,766895	0,761654	0,756461	0,751315	0,746215	0,741162	0,736154
4	0,721574	0,714962	0,708425	0,701963	0,695574	0,689258	0,683013	0,676839	0,670735	0,664699
5	0,665045	0,657436	0,649931	0,642529	0,635228	0,628026	0,620921	0,613913	0,607000	0,600180
6	0,612945	0,604539	0,596267	0,588127	0,580117	0,572233	0,564474	0,556837	0,549321	0,541923
7	0,564926	0,555898	0,547034	0,538332	0,529787	0,521397	0,513158	0,505068	0,497123	0,489321
8	0,520669	0,511171	0,501866	0,492752	0,483824	0,475077	0,466507	0,458112	0,449885	0,441825
9	0,479880	0,470042	0,460428	0,451032	0,441848	0,432872	0,424098	0,415521	0,407136	0,398939
10	0,442285	0,432222	0,422411	0,412844	0,403514	0,394416	0,385543	0,376889	0,368449	0,360216
11	0,407636	0,397446	0,387533	0,377889	0,368506	0,359377	0,350494	0,341850	0,333438	0,325251
12	0,375702	0,365468	0,355535	0,345894	0,336535	0,327450	0,318631	0,310068	0,301754	0,293681
13	0,346269	0,336062	0,326179	0,316608	0,307338	0,298360	0,289664	0,281241	0,273080	0,265174
14	0,319142	0,309023	0,299246	0,289801	0,280674	0,271855	0,263331	0,255094	0,247132	0,239435
15	0,294140	0,284159	0,274538	0,265264	0,256323	0,247703	0,239392	0,231377	0,223648	0,216194
16	0,271097	0,261295	0,251870	0,242805	0,234085	0,225698	0,217629	0,209866	0,202397	0,195209
17	0,249859	0,240272	0,231073	0,222247	0,213777	0,205647	0,197845	0,190355	0,183164	0,176261
18	0,230285	0,220939	0,211994	0,203430	0,195230	0,187378	0,179859	0,172657	0,165760	0,159152
19	0,212244	0,203163	0,194490	0,186206	0,178292	0,170732	0,163508	0,156605	0,150009	0,143704
20	0,195616	0,186816	0,178431	0,170440	0,162824	0,155564	0,148644	0,142046	0,135755	0,129755
21	0,180292	0,171785	0,163698	0,156009	0,148697	0,141744	0,135131	0,128840	0,122855	0,117161
22	0,166167	0,157963	0,150182	0,142800	0,135797	0,129152	0,122846	0,116861	0,111181	0,105788
23	0,153150	0,145254	0,137781	0,130709	0,124015	0,117678	0,111678	0,105997	0,100616	0,095520
24	0,141152	0,133567	0,126405	0,119642	0,113256	0,107224	0,101526	0,096142	0,091055	0,086248
25	0,130094	0,122820	0,115968	0,109513	0,103430	0,097698	0,092296	0,087204	0,082403	0,077877
26	0,119902	0,112938	0,106393	0,100240	0,094457	0,089019	0,083905	0,079096	0,074573	0,070317
27	0,110509	0,103851	0,097608	0,091753	0,086262	0,081111	0,076278	0,071743	0,067487	0,063492
28	0,101851	0,095495	0,089548	0,083985	0,078778	0,073905	0,069343	0,065073	0,061074	0,057329
29	0,093872	0,087811	0,082155	0,076874	0,071943	0,067339	0,063039	0,059023	0,055271	0,051764
30	0,086518	0,080746	0,075371	0,070365	0,065702	0,061357	0,057309	0,053536	0,050019	0,046740
31	0,079740	0,074249	0,069148	0,064407	0,060002	0,055906	0,052099	0,048558	0,045266	0,042203
32	0,073493	0,068275	0,063438	0,058954	0,054796	0,050940	0,047362	0,044044	0,040964	0,038107
33	0,067736	0,062782	0,058200	0,053963	0,050042	0,046414	0,043057	0,039949	0,037072	0,034408
34	0,062429	0,057730	0,053395	0,049394	0,045700	0,042291	0,039143	0,036235	0,033549	0,031068
35	0,057539	0,053085	0,048986	0,045212	0,041736	0,038534	0,035584	0,032866	0,030361	0,028052
36	0,053031	0,048814	0,044941	0,041384	0,038115	0,035110	0,032349	0,029811	0,027476	0,025329
37	0,048876	0,044887	0,041231	0,037880	0,034808	0,031991	0,029408	0,027039	0,024865	0,022871
38	0,045047	0,041275	0,037826	0,034672	0,031788	0,029149	0,026735	0,024525	0,022503	0,020651
39	0,041518	0,037954	0,034703	0,031737	0,029030	0,026560	0,024304	0,022245	0,020364	0,018646
40	0,038266	0,034900	0,031838	0,029050	0,026512	0,024200	0,022095	0,020177	0,018429	0,016836
41	0,035268	0,032092	0,029209	0,026590	0,024211	0,022050	0,020086	0,018301	0,016678	0,015202
42	0,032505	0,029510	0,026797	0,024339	0,022111	0,020091	0,018260	0,016600	0,015093	0,013727
43	0,029959	0,027136	0,024584	0,022278	0,020193	0,018306	0,016600	0,015056	0,013659	0,012394
44	0,027612	0,024952	0,022555	0,020392	0,018441	0,016680	0,015091	0,013657	0,012361	0,011191
45	0,025448	0,022945	0,020692	0,018665	0,016841	0,015198	0,013719	0,012387	0,011187	0,010105
46	0,023455	0,021099	0,018984	0,017085	0,015380	0,013848	0,012472	0,011235	0,010124	0,009124
47	0,021617	0,019401	0,017416	0,015638	0,014045	0,012618	0,011338	0,010191	0,009162	0,008238
48	0,019924	0,017840	0,015978	0,014314	0,012827	0,011497	0,010307	0,009243	0,008291	0,007439
49	0,018363	0,016405	0,014659	0,013102	0,011714	0,010476	0,009370	0,008384	0,007503	0,006717
50	0,016924	0,015085	0,013449	0,011993	0,010698	0,009545	0,008519	0,007604	0,006790	0,006065

Table T. 2 Valeur actuelle d'un capital d'un DH : $C_n = (1 + t)^{-n}$

n t	11,00%	11,25%	11,50%	11,75%	12,00%	12,25%	12,50%	12,75%	13,00%	13,25%
1	0,900901	0,898876	0,896861	0,894855	0,892857	0,890869	0,888889	0,886918	0,884956	0,883002
2	0,811622	0,807979	0,804360	0,800765	0,797194	0,793647	0,790123	0,786623	0,783147	0,779693
3	0,731191	0,726273	0,721399	0,716568	0,711780	0,707035	0,702332	0,697670	0,693050	0,688471
4	0,658731	0,652830	0,646994	0,641224	0,635518	0,629875	0,624295	0,618776	0,613319	0,607921
5	0,593451	0,586813	0,580264	0,573802	0,567427	0,561136	0,554929	0,548804	0,542760	0,536796
6	0,534641	0,527473	0,520416	0,513470	0,506631	0,499899	0,493270	0,486744	0,480319	0,473992
7	0,481658	0,474133	0,466741	0,459481	0,452349	0,445344	0,438462	0,431702	0,425061	0,418536
8	0,433926	0,426187	0,418602	0,411168	0,403883	0,396743	0,389744	0,382884	0,376160	0,369568
9	0,390925	0,383089	0,375428	0,367936	0,360610	0,353446	0,346439	0,339587	0,332885	0,326329
10	0,352184	0,344350	0,336706	0,329249	0,321973	0,314874	0,307946	0,301186	0,294588	0,288150
11	0,317283	0,309528	0,301979	0,294630	0,287476	0,280511	0,273730	0,267127	0,260698	0,254437
12	0,285841	0,278227	0,270833	0,263651	0,256675	0,249899	0,243315	0,236920	0,230706	0,224668
13	0,257514	0,250092	0,242900	0,235929	0,229174	0,222627	0,216280	0,210128	0,204165	0,198382
14	0,231995	0,224802	0,217847	0,211123	0,204620	0,198331	0,192249	0,186367	0,180677	0,175172
15	0,209004	0,202069	0,195379	0,188924	0,182696	0,176687	0,170888	0,165292	0,159891	0,154677
16	0,188292	0,181635	0,175227	0,169059	0,163122	0,157405	0,151901	0,146600	0,141496	0,136580
17	0,169633	0,163267	0,157155	0,151284	0,145644	0,140227	0,135023	0,130023	0,125218	0,120601
18	0,152822	0,146757	0,140946	0,135377	0,130040	0,124924	0,120020	0,115319	0,110812	0,106491
19	0,137678	0,131917	0,126409	0,121143	0,116107	0,111291	0,106685	0,102279	0,098064	0,094032
20	0,124034	0,118577	0,113371	0,108405	0,103667	0,099145	0,094831	0,090713	0,086782	0,083030
21	0,111742	0,106586	0,101678	0,097007	0,092560	0,088326	0,084294	0,080455	0,076798	0,073316
22	0,100669	0,095808	0,091191	0,086807	0,082643	0,078687	0,074928	0,071357	0,067963	0,064738
23	0,090693	0,086119	0,081786	0,077680	0,073788	0,070099	0,066603	0,063288	0,060144	0,057164
24	0,081705	0,077410	0,073351	0,069512	0,065882	0,062449	0,059202	0,056131	0,053225	0,050476

n t	13,50%	13,75%	14,00%	14,25%	14,50%	14,75%	15,00%	15,25%	15,50%	15,75%
1	0,881057	0,879121	0,877193	0,875274	0,873362	0,871460	0,869565	0,867679	0,865801	0,863931
2	0,776262	0,772854	0,769468	0,766104	0,762762	0,759442	0,756144	0,752867	0,749611	0,746377
3	0,683931	0,679432	0,674972	0,670550	0,666168	0,661823	0,657516	0,653247	0,649014	0,644818
4	0,602583	0,597303	0,592080	0,586915	0,581806	0,576752	0,571753	0,566808	0,561917	0,557078
5	0,530910	0,525101	0,519369	0,513711	0,508127	0,502616	0,497177	0,491808	0,486508	0,481277
6	0,467762	0,461627	0,455587	0,449638	0,443779	0,438010	0,432328	0,426731	0,421219	0,415790
7	0,412125	0,405826	0,399637	0,393556	0,387580	0,381708	0,375937	0,370266	0,364692	0,359214
8	0,363106	0,356770	0,350559	0,344469	0,338498	0,332643	0,326902	0,321272	0,315751	0,310336
9	0,319917	0,313644	0,307508	0,301505	0,295631	0,289885	0,284262	0,278761	0,273377	0,268109
10	0,281865	0,275731	0,269744	0,263899	0,258193	0,252623	0,247185	0,241875	0,236690	0,231627
11	0,248339	0,242401	0,236617	0,230984	0,225496	0,220151	0,214943	0,209870	0,204927	0,200110
12	0,218801	0,213100	0,207559	0,202174	0,196940	0,191853	0,186907	0,182100	0,177426	0,172881
13	0,192776	0,187341	0,182069	0,176958	0,172000	0,167192	0,162528	0,158004	0,153615	0,149357
14	0,169847	0,164695	0,159710	0,154886	0,150218	0,145701	0,141329	0,137097	0,133000	0,129035
15	0,149645	0,144787	0,140096	0,135568	0,131195	0,126972	0,122894	0,118956	0,115152	0,111477
16	0,131846	0,127285	0,122892	0,118659	0,114581	0,110651	0,106865	0,103216	0,099698	0,096308
17	0,116164	0,111899	0,107800	0,103859	0,100071	0,096428	0,092926	0,089558	0,086319	0,083204
18	0,102347	0,098373	0,094561	0,090905	0,087398	0,084033	0,080805	0,077708	0,074735	0,071882
19	0,090173	0,086482	0,082948	0,079567	0,076330	0,073232	0,070265	0,067425	0,064706	0,062101
20	0,079448	0,076028	0,072762	0,069643	0,066664	0,063818	0,061100	0,058503	0,056022	0,053651
21	0,069998	0,066838	0,063826	0,060956	0,058222	0,055615	0,053131	0,050762	0,048504	0,046351
22	0,061672	0,058758	0,055988	0,053354	0,050849	0,048466	0,046201	0,044045	0,041995	0,040044
23	0,054337	0,051656	0,049112	0,046699	0,044409	0,042237	0,040174	0,038217	0,036359	0,034595
24	0,047874	0,045412	0,043081	0,040874	0,038785	0,036807	0,034934	0,033160	0,031480	0,029888

Table T. 2 **Valeur actuelle d'un capital d'un DH : $C_n = (1 + t)^{-n}$**

n t	16,00%	16,25%	16,50%	16,75%	17,00%	17,25%	17,50%	17,75%	18,00%	18,25%
1	0,862069	0,860215	0,858369	0,856531	0,854701	0,852878	0,851064	0,849257	0,847458	0,845666
2	0,743163	0,739970	0,736798	0,733645	0,730514	0,727402	0,724310	0,721237	0,718184	0,715151
3	0,640658	0,636533	0,632444	0,628390	0,624371	0,620385	0,616434	0,612516	0,608631	0,604779
4	0,552291	0,547556	0,542871	0,538236	0,533650	0,529113	0,524624	0,520183	0,515789	0,511441
5	0,476113	0,471015	0,465983	0,461016	0,456111	0,451269	0,446489	0,441769	0,437109	0,432508
6	0,410442	0,405175	0,399986	0,394874	0,389839	0,384878	0,379991	0,375176	0,370432	0,365757
7	0,353830	0,348537	0,343335	0,338222	0,333195	0,328254	0,323396	0,318620	0,313925	0,309309
8	0,305025	0,299817	0,294708	0,289698	0,284782	0,279961	0,275231	0,270591	0,266038	0,261572
9	0,262953	0,257907	0,252969	0,248135	0,243404	0,238773	0,234239	0,229801	0,225456	0,221202
10	0,226684	0,221856	0,217140	0,212535	0,208037	0,203644	0,199352	0,195160	0,191064	0,187063
11	0,195417	0,190844	0,186387	0,182043	0,177810	0,173684	0,169662	0,165741	0,161919	0,158193
12	0,168463	0,164166	0,159989	0,155926	0,151974	0,148131	0,144393	0,140757	0,137220	0,133778

n t	18,50%	18,75%	19,00%	19,25%	19,50%	19,75%	20,00%	20,25%	20,50%	20,75%
1	0,843882	0,842105	0,840336	0,838574	0,836820	0,835073	0,833333	0,831601	0,829876	0,828157
2	0,712137	0,709141	0,706165	0,703207	0,700268	0,697347	0,694444	0,691560	0,688693	0,685845
3	0,600959	0,597172	0,593416	0,589691	0,585998	0,582336	0,578704	0,575102	0,571530	0,567987
4	0,507139	0,502881	0,498669	0,494500	0,490375	0,486293	0,482253	0,478255	0,474299	0,470383
5	0,427965	0,423479	0,419049	0,414675	0,410356	0,406090	0,401878	0,397717	0,393609	0,389551
6	0,361152	0,356614	0,352142	0,347736	0,343394	0,339115	0,334898	0,330742	0,326646	0,322610
7	0,304770	0,300306	0,295918	0,291603	0,287359	0,283186	0,279082	0,275045	0,271076	0,267171
8	0,257189	0,252890	0,248671	0,244530	0,240468	0,236481	0,232568	0,228728	0,224959	0,221260
9	0,217038	0,212960	0,208967	0,205057	0,201228	0,197479	0,193807	0,190210	0,186688	0,183238
10	0,183154	0,179334	0,175602	0,171956	0,168392	0,164909	0,161506	0,158179	0,154928	0,151750
11	0,154560	0,151019	0,147565	0,144198	0,140914	0,137711	0,134588	0,131542	0,128571	0,125673
12	0,130431	0,127173	0,124004	0,120920	0,117919	0,114999	0,112157	0,109390	0,106698	0,104077

n t	21,00%	21,25%	21,50%	21,75%	22,00%	22,25%	22,50%	22,75%	23,00%	23,25%
1	0,826446	0,824742	0,823045	0,821355	0,819672	0,817996	0,816327	0,814664	0,813008	0,811359
2	0,683013	0,680200	0,677404	0,674624	0,671862	0,669117	0,666389	0,663677	0,660982	0,658303
3	0,564474	0,560990	0,557534	0,554106	0,550707	0,547335	0,543991	0,540674	0,537384	0,534120
4	0,466507	0,462672	0,458876	0,455118	0,451399	0,447718	0,444074	0,440468	0,436897	0,433363
5	0,385543	0,381585	0,377675	0,373814	0,369999	0,366231	0,362510	0,358833	0,355201	0,351613
6	0,318631	0,314709	0,310844	0,307034	0,303278	0,299576	0,295926	0,292328	0,288781	0,285285
7	0,263331	0,259554	0,255839	0,252184	0,248589	0,245052	0,241572	0,238149	0,234782	0,231468
8	0,217629	0,214065	0,210567	0,207132	0,203761	0,200451	0,197202	0,194012	0,190879	0,187804
9	0,179859	0,176549	0,173306	0,170129	0,167017	0,163968	0,160981	0,158054	0,155187	0,152376
10	0,148644	0,145607	0,142639	0,139737	0,136899	0,134125	0,131413	0,128761	0,126168	0,123632
11	0,122846	0,120088	0,117398	0,114773	0,112213	0,109714	0,107276	0,104897	0,102576	0,100310
12	0,101526	0,099042	0,096624	0,094270	0,091978	0,089746	0,087572	0,085456	0,083395	0,081387

Table T. 3 **Valeur acquise par n annuités constantes de 1 DH : $C_n = \dfrac{(1+t)^n - 1}{t}$**

n t	0,05%	0,10%	0,20%	0,30%	0,40%	0,50%	0,60%	0,70%	0,80%	0,90%
1	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000
2	2,000500	2,001000	2,002000	2,003000	2,004000	2,005000	2,006000	2,007000	2,008000	2,009000
3	3,001500	3,003001	3,006004	3,009009	3,012016	3,015025	3,018036	3,021049	3,024064	3,027081
4	4,003001	4,006004	4,012016	4,018036	4,024064	4,030100	4,036144	4,042196	4,048257	4,054325
5	5,005003	5,010010	5,020040	5,030090	5,040160	5,050251	5,060361	5,070492	5,080643	5,090814
6	6,007505	6,015020	6,030080	6,045180	6,060321	6,075502	6,090723	6,105985	6,121288	6,136631
7	7,010509	7,021035	7,042140	7,063316	7,084562	7,105879	7,127268	7,148727	7,170258	7,191861
8	8,014014	8,028056	8,056225	8,084506	8,112900	8,141409	8,170031	8,198768	8,227620	8,256587
9	9,018021	9,036084	9,072337	9,108759	9,145352	9,182116	9,219051	9,256160	9,293441	9,330897
10	10,022530	10,045120	10,090482	10,136086	10,181934	10,228026	10,274366	10,320953	10,367789	10,414875
11	11,027541	11,055165	11,110663	11,166494	11,222661	11,279167	11,336012	11,393199	11,450731	11,508609
12	12,033055	12,066220	12,132884	12,199993	12,267552	12,335562	12,404028	12,472952	12,542337	12,612186
13	13,039072	13,078287	13,157150	13,236593	13,316622	13,397240	13,478452	13,560262	13,642675	13,725696
14	14,045591	14,091365	14,183464	14,276303	14,369889	14,464226	14,559323	14,655184	14,751817	14,849227
15	15,052614	15,105456	15,211831	15,319132	15,427368	15,536548	15,646679	15,757770	15,869831	15,982870
16	16,060140	16,120562	16,242255	16,365089	16,489078	16,614230	16,740559	16,868075	16,996790	17,126716
17	17,068170	17,136682	17,274739	17,414185	17,555034	17,697301	17,841002	17,986151	18,132764	18,280856
18	18,076704	18,153819	18,309289	18,466427	18,625254	18,785788	18,948048	19,112054	19,277826	19,445384
19	19,085743	19,171973	19,345907	19,521827	19,699755	19,879717	20,061736	20,245839	20,432049	20,620393
20	20,095286	20,191145	20,384599	20,580392	20,778554	20,979115	21,182107	21,387560	21,595505	21,805976
21	21,105333	21,211336	21,425368	21,642133	21,861668	22,084011	22,309200	22,537273	22,768269	23,002230
22	22,115886	22,232547	22,468219	22,707060	22,949115	23,194431	23,443055	23,695034	23,950416	24,209250
23	23,126944	23,254780	23,513155	23,775181	24,040911	24,310403	24,583713	24,860899	25,142019	25,427133
24	24,138507	24,278035	24,560182	24,846506	25,137075	25,431955	25,731215	26,034925	26,343155	26,655977
25	25,150577	25,302313	25,609302	25,921046	26,237623	26,559115	26,885603	27,217170	27,553900	27,895881
26	26,163152	26,327615	26,660521	26,998809	27,342574	27,691911	28,046916	28,407690	28,774332	29,146944
27	27,176233	27,353943	27,713842	28,079805	28,451944	28,830370	29,215198	29,606544	30,004526	30,409267
28	28,189822	28,381297	28,769269	29,164045	29,565752	29,974522	30,390489	30,813789	31,244562	31,682950
29	29,203916	29,409678	29,826808	30,251537	30,684015	31,124395	31,572832	32,029486	32,494519	32,968097
30	30,218518	30,439088	30,886462	31,342292	31,806751	32,280017	32,762269	33,253692	33,754475	34,264809
31	31,233628	31,469527	31,948234	32,436318	32,933978	33,441417	33,958842	34,486468	35,024511	35,573193
32	32,249245	32,500996	33,012131	33,533627	34,065714	34,608624	35,162596	35,727873	36,304707	36,893351
33	33,265369	33,533497	34,078155	34,634228	35,201977	35,781667	36,373571	36,977969	37,595145	38,225392
34	34,282002	34,567031	35,146312	35,738131	36,342785	36,960575	37,591813	38,236814	38,895906	39,569420
35	35,299143	35,601598	36,216604	36,845345	37,488156	38,145378	38,817363	39,504472	40,207073	40,925545
36	36,316792	36,637199	37,289037	37,955881	38,638108	39,336105	40,050268	40,781003	41,528730	42,293875
37	37,334951	37,673836	38,363615	39,069749	39,792661	40,532785	41,290569	42,066470	42,860959	43,674520
38	38,353618	38,711510	39,440343	40,186958	40,951832	41,735449	42,538313	43,360936	44,203847	45,067590
39	39,372795	39,750222	40,519223	41,307519	42,115639	42,944127	43,793543	44,664462	45,557478	46,473199
40	40,392481	40,789972	41,600262	42,431442	43,284101	44,158847	45,056304	45,977113	46,921938	47,891457
41	41,412678	41,830762	42,683462	43,558736	44,457238	45,379642	46,326642	47,298953	48,297313	49,322481
42	42,433384	42,872593	43,768829	44,689412	45,635067	46,606540	47,604601	48,630046	49,683692	50,766383
43	43,454601	43,915465	44,856367	45,823481	46,817607	47,839572	48,890229	49,970456	51,081161	52,223280
44	44,476328	44,959381	45,946080	46,960951	48,004877	49,078770	50,183570	51,320249	52,489811	53,693290
45	45,498566	46,004340	47,037972	48,101834	49,196897	50,324164	51,484672	52,679491	53,909729	55,176529
46	46,521315	47,050345	48,132048	49,246139	50,393685	51,575785	52,793580	54,048248	55,341007	56,673118
47	47,544576	48,097395	49,228312	50,393878	51,595259	52,833664	54,110341	55,426585	56,783735	58,183176
48	48,568348	49,145492	50,326768	51,545059	52,801640	54,097832	55,435003	56,814571	58,238005	59,706825
49	49,592633	50,194638	51,427422	52,699695	54,012847	55,368321	56,767613	58,212273	59,703909	61,244186
50	50,617429	51,244832	52,530277	53,857794	55,228898	56,645163	58,108219	59,619759	61,181540	62,795384

Table T. 3 **Valeur acquise par n annuités constantes de 1 DH : $C_n = \frac{(1+t)^n - 1}{t}$**

n t	1,00%	1,25%	1,50%	1,75%	2,00%	2,25%	2,50%	2,75%	3,00%	3,25%
1	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000
2	2,010000	2,012500	2,015000	2,017500	2,020000	2,022500	2,025000	2,027500	2,030000	2,032500
3	3,030100	3,037656	3,045225	3,052806	3,060400	3,068006	3,075625	3,083256	3,090900	3,098556
4	4,060401	4,075627	4,090903	4,106230	4,121608	4,137036	4,152516	4,168046	4,183627	4,199259
5	5,101005	5,126572	5,152267	5,178089	5,204040	5,230120	5,256329	5,282667	5,309136	5,335735
6	6,152015	6,190654	6,229551	6,268706	6,308121	6,347797	6,387737	6,427940	6,468410	6,509147
7	7,213535	7,268038	7,322994	7,378408	7,434283	7,490623	7,547430	7,604709	7,662462	7,720694
8	8,285671	8,358888	8,432839	8,507530	8,582969	8,659162	8,736116	8,813838	8,892336	8,971616
9	9,368527	9,463374	9,559332	9,656412	9,754628	9,853993	9,954519	10,056219	10,159106	10,263194
10	10,462213	10,581666	10,702722	10,825399	10,949721	11,075708	11,203382	11,332765	11,463879	11,596748
11	11,566835	11,713937	11,863262	12,014844	12,168715	12,324911	12,483466	12,644416	12,807796	12,973642
12	12,682503	12,860361	13,041211	13,225104	13,412090	13,602222	13,795553	13,992137	14,192030	14,395285
13	13,809328	14,021116	14,236830	14,456543	14,680332	14,908272	15,140442	15,376921	15,617790	15,863132
14	14,947421	15,196380	15,450382	15,709533	15,973938	16,243708	16,518953	16,799786	17,086324	17,378684
15	16,096896	16,386335	16,682138	16,984449	17,293417	17,609191	17,931927	18,261781	18,598914	18,943491
16	17,257864	17,591164	17,932370	18,281677	18,639285	19,005398	19,380225	19,763979	20,156881	20,559155
17	18,430443	18,811053	19,201355	19,601607	20,012071	20,433020	20,864730	21,307489	21,761588	22,227327
18	19,614748	20,046192	20,489376	20,944635	21,412312	21,892763	22,386349	22,893445	23,414435	23,949715
19	20,810895	21,296769	21,796716	22,311166	22,840559	23,385350	23,946007	24,523015	25,116868	25,728081
20	22,019004	22,562979	23,123667	23,701611	24,297370	24,911520	25,544658	26,197398	26,870374	27,564244
21	23,239194	23,845016	24,470522	25,116389	25,783317	26,472029	27,183274	27,917826	28,676486	29,460082
22	24,471586	25,143078	25,837580	26,555926	27,298984	28,067650	28,862856	29,685566	30,536780	31,417534
23	25,716302	26,457367	27,225144	28,020655	28,844963	29,699172	30,584427	31,501919	32,452884	33,438604
24	26,973465	27,788084	28,633521	29,511016	30,421862	31,367403	32,349038	33,368222	34,426470	35,525359
25	28,243200	29,135435	30,063024	31,027459	32,030300	33,073170	34,157764	35,285848	36,459264	37,679933
26	29,525631	30,499628	31,513969	32,570440	33,670906	34,817316	36,011708	37,256209	38,553042	39,904531
27	30,820888	31,880873	32,986678	34,140422	35,344324	36,600706	37,912001	39,280755	40,709634	42,201428
28	32,129097	33,279384	34,481479	35,737880	37,051210	38,424222	39,859801	41,360975	42,930923	44,572975
29	33,450388	34,695377	35,998701	37,363293	38,792235	40,288767	41,856296	43,498402	45,218850	47,021596
30	34,784892	36,129069	37,538681	39,017150	40,568079	42,195264	43,902703	45,694608	47,575416	49,549798
31	36,132740	37,580682	39,101762	40,699950	42,379441	44,144657	46,000271	47,951210	50,002678	52,160167
32	37,494068	39,050441	40,688288	42,412200	44,227030	46,137912	48,150278	50,269868	52,502759	54,855372
33	38,869009	40,538571	42,298612	44,154413	46,111570	48,176015	50,354034	52,652290	55,077841	57,638172
34	40,257699	42,045303	43,933092	45,927115	48,033802	50,259976	52,612885	55,100228	57,730177	60,511412
35	41,660276	43,570870	45,592088	47,730840	49,994478	52,390825	54,928207	57,615484	60,462082	63,478033
36	43,076878	45,115505	47,275969	49,566129	51,994367	54,569619	57,301413	60,199910	63,275944	66,541069
37	44,507647	46,679449	48,985109	51,433537	54,034255	56,797435	59,733948	62,855407	66,174223	69,703654
38	45,952724	48,262942	50,719885	53,333624	56,114940	59,075377	62,227297	65,583931	69,159449	72,969023
39	47,412251	49,866229	52,480684	55,266962	58,237238	61,404573	64,782979	68,387489	72,234233	76,340516
40	48,886373	51,489557	54,267894	57,234134	60,401983	63,786176	67,402554	71,268145	75,401260	79,821583
41	50,375237	53,133177	56,081912	59,235731	62,610023	66,221365	70,087617	74,228019	78,663298	83,415784
42	51,878989	54,797341	57,923141	61,272357	64,862223	68,711346	72,839808	77,269289	82,023196	87,126797
43	53,397779	56,482308	59,791988	63,344623	67,159468	71,257351	75,660803	80,394195	85,483892	90,958418
44	54,931757	58,188337	61,688868	65,453154	69,502657	73,860642	78,552323	83,605035	89,048409	94,914566
45	56,481075	59,915691	63,614201	67,598584	71,892710	76,522506	81,516131	86,904174	92,719861	98,999290
46	58,045885	61,664637	65,568414	69,781559	74,330564	79,244262	84,554034	90,294039	96,501457	103,216767
47	59,626344	63,435445	67,551940	72,002736	76,817176	82,027258	87,667885	93,777125	100,396501	107,571312
48	61,222608	65,228388	69,565219	74,262784	79,353519	84,872872	90,859582	97,355996	104,408396	112,067379
49	62,834834	67,043743	71,608698	76,562383	81,940590	87,782511	94,131072	101,033285	108,540648	116,709569
50	64,463182	68,881790	73,682828	78,902225	84,579401	90,757618	97,484349	104,811701	112,796867	121,502630

Table T. 3 **Valeur acquise par n annuités constantes de 1 DH : $C_n = \dfrac{(1+t)^n - 1}{t}$**

n t	3,50%	3,75%	4,00%	4,25%	4,50%	4,75%	5,00%	5,25%	5,50%	5,75%
1	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000
2	2,035000	2,037500	2,040000	2,042500	2,045000	2,047500	2,050000	2,052500	2,055000	2,057500
3	3,106225	3,113906	3,121600	3,129306	3,137025	3,144756	3,152500	3,160256	3,168025	3,175806
4	4,214943	4,230678	4,246464	4,262302	4,278191	4,294132	4,310125	4,326170	4,342266	4,358415
5	5,362466	5,389328	5,416323	5,443450	5,470710	5,498103	5,525631	5,553294	5,581091	5,609024
6	6,550152	6,591428	6,632975	6,674796	6,716892	6,759263	6,801913	6,844842	6,888051	6,931543
7	7,779408	7,838607	7,898294	7,958475	8,019152	8,080328	8,142008	8,204196	8,266894	8,330107
8	9,051687	9,132554	9,214226	9,296710	9,380014	9,464144	9,549109	9,634916	9,721573	9,809088
9	10,368496	10,475025	10,582795	10,691820	10,802114	10,913691	11,026564	11,140749	11,256260	11,373110
10	11,731393	11,867838	12,006107	12,146223	12,288209	12,432091	12,577893	12,725638	12,875354	13,027064
11	13,141992	13,312882	13,486351	13,662437	13,841179	14,022615	14,206787	14,393734	14,583498	14,776120
12	14,601962	14,812116	15,025805	15,243091	15,464032	15,688690	15,917127	16,149405	16,385591	16,625747
13	16,113030	16,367570	16,626838	16,890922	17,159913	17,433902	17,712983	17,997249	18,286798	18,581728
14	17,676986	17,981354	18,291911	18,608786	18,932109	19,262013	19,598632	19,942105	20,292572	20,650177
15	19,295681	19,655654	20,023588	20,399660	20,784054	21,176958	21,578564	21,989065	22,408663	22,837562
16	20,971030	21,392742	21,824531	22,266645	22,719337	23,182864	23,657492	24,143491	24,641140	25,150722
17	22,705016	23,194969	23,697512	24,212978	24,741707	25,284050	25,840366	26,411025	26,996403	27,596888
18	24,499691	25,064781	25,645413	26,242029	26,855084	27,485042	28,132385	28,797603	29,481205	30,183710
19	26,357180	27,004710	27,671229	28,357316	29,063562	29,790582	30,539004	31,309478	32,102671	32,919273
20	28,279682	29,017387	29,778079	30,562501	31,371423	32,205635	33,065954	33,953225	34,868318	35,812131
21	30,269471	31,105539	31,969202	32,861408	33,783137	34,735402	35,719252	36,735769	37,786076	38,871329
22	32,328902	33,271996	34,247970	35,258018	36,303378	37,385334	38,505214	39,664397	40,864310	42,106430
23	34,460414	35,519696	36,617889	37,756483	38,937030	40,161137	41,430475	42,746778	44,111847	45,527550
24	36,666528	37,851685	39,082604	40,361134	41,689196	43,068791	44,501999	45,990984	47,537998	49,145384
25	38,949857	40,271123	41,645908	43,076482	44,565210	46,114559	47,727099	49,405511	51,152588	52,971243
26	41,313102	42,781290	44,311745	45,907233	47,570645	49,305000	51,113454	52,999300	54,965981	57,017090
27	43,759060	45,385588	47,084214	48,858290	50,711324	52,646988	54,669126	56,781763	58,989109	61,295573
28	46,290627	48,087548	49,967583	51,934767	53,993333	56,147720	58,402583	60,762806	63,233510	65,820068
29	48,910799	50,890831	52,966286	55,141995	57,423033	59,814736	62,322712	64,952853	67,711354	70,604722
30	51,622677	53,799237	56,084938	58,485530	61,007070	63,655936	66,438848	69,362878	72,435478	75,664493
31	54,429471	56,816709	59,328335	61,971165	64,752388	67,679593	70,760790	74,004429	77,419429	81,015202
32	57,334502	59,947335	62,701469	65,604939	68,666245	71,894374	75,298829	78,889662	82,677498	86,673576
33	60,341210	63,195360	66,209527	69,393149	72,756226	76,309357	80,063771	84,031369	88,224760	92,657307
34	63,453152	66,565186	69,857909	73,342358	77,030256	80,934051	85,066959	89,443016	94,077122	98,985102
35	66,674013	70,061381	73,652225	77,459408	81,496618	85,778419	90,320307	95,138774	100,251364	105,676745
36	70,007603	73,688682	77,598314	81,751433	86,163966	90,852894	95,836323	101,133560	106,765189	112,753158
37	73,457869	77,452008	81,702246	86,225869	91,041344	96,168406	101,628139	107,443071	113,637274	120,236464
38	77,028895	81,356458	85,970336	90,890468	96,138205	101,736405	107,709546	114,083833	120,887324	128,150061
39	80,724906	85,407326	90,409150	95,753313	101,464424	107,568884	114,095023	121,073234	128,536127	136,518690
40	84,550278	89,610100	95,025516	100,822829	107,030323	113,678406	120,799774	128,429579	136,605614	145,368514
41	88,509537	93,970479	99,826536	106,107799	112,846688	120,078131	127,839763	136,172132	145,118923	154,727204
42	92,607371	98,494372	104,819598	111,617381	118,924789	126,781842	135,231751	144,321169	154,100464	164,624018
43	96,848629	103,187911	110,012382	117,361119	125,276404	133,803980	142,993339	152,898030	163,575989	175,089899
44	101,238331	108,057458	115,412877	123,348967	131,913842	141,159669	151,143006	161,925176	173,572669	186,157568
45	105,781673	113,109612	121,029392	129,591298	138,849965	148,864753	159,700156	171,426248	184,119165	197,861628
46	110,484031	118,351223	126,870568	136,098928	146,098214	156,935829	168,685164	181,426126	195,245719	210,238672
47	115,350973	123,789394	132,945390	142,883133	153,672633	165,390280	178,119422	191,950998	206,984234	223,327396
48	120,388257	129,431496	139,263206	149,955666	161,587902	174,246319	188,025393	203,028425	219,368367	237,168721
49	125,601846	135,285177	145,833734	157,328782	169,859357	183,523019	198,426663	214,687418	232,433627	251,805922
50	130,997910	141,358371	152,667084	165,015255	178,503028	193,240362	209,347996	226,958507	246,217476	267,284763

Table T. 3 **Valeur acquise par n annuités constantes de 1 DH : $C_n = \dfrac{(1+t)^n - 1}{t}$**

n t	6,00%	6,25%	6,50%	6,75%	7,00%	7,25%	7,50%	7,75%	8,00%	8,25%
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2,06	2,0625	2,065	2,0675	2,07	2,0725	2,075	2,0775	2,08	2,0825
3	3,1836	3,19140625	3,199225	3,20705625	3,2149	3,22275625	3,230625	3,23850625	3,2464	3,25430625
4	4,374616	4,390869141	4,407174625	4,423532547	4,439943	4,456406078	4,472921875	4,489490484	4,506112	4,522786516
5	5,63709296	5,665298462	5,693640976	5,722120994	5,75073901	5,779495519	5,808391016	5,837425997	5,86660096	5,895916403
6	6,975318538	7,019379616	7,063727639	7,108364161	7,153290741	7,198508944	7,244020342	7,289826512	7,335929037	7,382329506
7	8,39383765	8,458090842	8,522869936	8,588178742	8,654021093	8,720400842	8,787321867	8,854788066	8,92280336	8,991371691
8	9,897467909	9,986721519	10,07685648	10,16788081	10,25980257	10,3526299	10,44637101	10,54103414	10,63662763	10,73315986
9	11,49131598	11,61089161	11,73185215	11,85421276	11,97798875	12,10319557	12,22984883	12,35796429	12,48755784	12,61864554
10	13,18079494	13,33657234	13,49442254	13,65437212	13,81644796	13,98067725	14,1470875	14,31570652	14,48656247	14,6596838
11	14,97164264	15,17010811	15,37156001	15,57604224	15,78359932	15,99427635	16,20811906	16,42517377	16,64548746	16,86910771
12	16,8699412	17,11823987	17,37071141	17,62742509	17,88845127	18,15386139	18,42372799	18,69812474	18,97712646	19,2608091
13	18,88213767	19,18812986	19,49980765	19,81727629	20,14064286	20,47001634	20,80550759	21,14722941	21,49529658	21,84982585
14	21,01506593	21,38738798	21,76729515	22,15494244	22,55048786	22,95409252	23,36592066	23,78613969	24,2149203	24,65243648
15	23,27596988	23,72409973	24,18216933	24,65040105	25,12902201	25,61826423	26,1183647	26,62956552	27,15211393	27,68626249
16	25,67252808	26,20685596	26,75401034	27,31430312	27,88805355	28,47558839	29,07724206	29,69335684	30,32428304	30,97037915
17	28,21287976	28,84478446	29,49302101	30,15801858	30,8402173	31,54006854	32,25803521	32,994592	33,75022569	34,52543543
18	30,90565255	31,64758348	32,41006738	33,19368484	33,99903251	34,82672351	35,67738785	36,55167288	37,45024374	38,37378385
19	33,7599917	34,62555745	35,51672176	36,43425856	37,37896479	38,35166097	39,35319194	40,38442753	41,44626324	42,53962102
20	36,7855912	37,78965479	38,82530867	39,89357101	40,99549232	42,13215639	43,30468134	44,51422066	45,7619643	47,04913975
21	39,99272668	41,15150822	42,34895373	43,58638706	44,86517678	46,18673773	47,55253244	48,96407276	50,42292144	51,93069378
22	43,39229028	44,72347748	46,10163573	47,52846818	49,00573916	50,53527621	52,11897237	53,7587884	55,45675516	57,21497602
23	46,99582769	48,51869482	50,09824205	51,73663979	53,4361409	55,19908374	57,0278953	58,9250945	60,89329557	62,93521154
24	50,81557735	52,55111325	54,35462778	56,22886297	58,17667076	60,20101731	62,30498744	64,49178932	66,76475922	69,1273665
25	54,864512	56,83555783	58,88767859	61,02431122	63,24903772	65,56559106	67,9778615	70,489903	73,10593995	75,83037423
26	59,15638272	61,38778019	63,71537769	66,14345223	68,67647036	71,31909641	74,07620112	76,95287048	79,95441515	83,08638011
27	63,70576568	66,22451645	68,85687725	71,60813526	74,48382328	77,4897309	80,6319162	83,91671794	87,35076836	90,94100646
28	68,52811162	71,36354873	74,33257427	77,44168439	80,69769091	84,10773639	87,67930991	91,42026358	95,33882983	99,4436395
29	73,63979832	76,82377053	80,16419159	83,66899808	87,34652927	91,20554728	95,25525816	99,50533401	103,9659362	108,6477398
30	79,05818622	82,62525619	86,37486405	90,31665545	94,46078632	98,81794946	103,3994025	108,2169974	113,2832111	118,6111783
31	84,80167739	88,7893347	92,98923021	97,4130297	102,0730414	106,9822508	112,1543577	117,6038147	123,345868	129,3966005
32	90,88977803	95,33866812	100,0335302	104,9884092	110,2181543	115,738464	121,5659345	127,7181103	134,2135374	141,07182
33	97,34316471	102,2973349	107,5357096	113,0751268	118,9334251	125,1295026	131,6833796	138,6162639	145,9506204	153,7102452
34	104,1837546	109,6909183	115,5255308	121,7076979	128,2587648	135,2013916	142,5596331	150,3590243	158,6266701	167,3913404
35	111,4347799	117,5466007	124,0346903	130,9229675	138,2368784	146,0034924	154,2516056	163,0118487	172,3168037	182,201126
36	119,1208667	125,8932632	133,0969451	140,7602678	148,9134598	157,5887456	166,820476	176,645267	187,102148	198,2327189
37	127,2681187	134,7615922	142,7482466	151,2615859	160,337402	170,0139297	180,3320117	191,3352752	203,0703198	215,5869182
38	135,9042058	144,1841917	153,0268826	162,4717429	172,5610202	183,3399396	194,8569126	207,163759	220,3159454	234,372839
39	145,0584581	154,1957037	163,97363	174,4385856	185,6402916	197,6320852	210,471181	224,2189503	238,941221	254,7085982
40	154,7619656	164,8329352	175,6319159	187,2131901	199,635112	212,9604114	227,2565196	242,595919	259,0565187	276,7220575
41	165,0476836	176,1349936	188,0479904	200,8500804	214,6095698	229,4000412	245,3007586	262,3971027	280,7810402	300,5516273
42	175,9505446	188,1434307	201,2711098	215,4074608	230,6322397	247,0315442	264,6983155	283,7328782	304,2435234	326,3471365
43	187,5075772	200,9023951	215,353732	230,9474645	247,7764965	265,9413312	285,5506891	306,7221762	329,5830053	354,2707753
44	199,7580319	214,4587948	230,3517245	247,5364183	266,1208513	286,2220777	307,9669908	331,4931449	356,9496457	384,4981142
45	212,7435138	228,8624695	246,3245866	265,2451265	285,7493108	307,9731783	332,0645151	358,1838636	386,5056174	417,2192087
46	226,5081246	244,1663739	263,3356848	284,1491726	306,7517626	331,3012338	357,9693537	386,943113	418,4260668	452,6397934
47	241,0986121	260,4267722	281,4525043	304,3292417	329,224386	356,3205732	385,8170553	417,9312043	452,9001521	490,9825763
48	256,5645288	277,7034455	300,746917	325,8714655	353,270093	383,1538148	415,7533344	451,3208726	490,1321643	532,4886389
49	272,9584006	296,0599108	321,2954666	348,8677895	378,9989995	411,9324663	447,9348345	487,2982403	530,3427374	577,4189516
50	290,3359046	315,5636552	343,179672	373,4163653	406,5289295	442,7975701	482,5299471	526,0638539	573,7701564	626,0560151

Table T. 3 **Valeur acquise par n annuités constantes de 1 DH : $C_n = \frac{(1+t)^n - 1}{t}$**

n t	8,50%	8,75%	9,00%	9,25%	9,50%	9,75%	10,00%	10,25%	10,50%	10,75%
1	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000
2	2,085000	2,087500	2,090000	2,092500	2,095000	2,097500	2,100000	2,102500	2,105000	2,107500
3	3,262225	3,270156	3,278100	3,286056	3,294025	3,302006	3,310000	3,318006	3,326025	3,334056
4	4,539514	4,556295	4,573129	4,590016	4,606957	4,623952	4,641000	4,658102	4,675258	4,692467
5	5,925373	5,954971	5,984711	6,014593	6,044618	6,074787	6,105100	6,135557	6,166160	6,196908
6	7,429030	7,476031	7,523335	7,570943	7,618857	7,667079	7,715610	7,764452	7,813606	7,863075
7	9,060497	9,130183	9,200435	9,271255	9,342648	9,414619	9,487171	9,560308	9,634035	9,708356
8	10,830639	10,929074	11,028474	11,128846	11,230200	11,332544	11,435888	11,540240	11,645609	11,752004
9	12,751244	12,885368	13,021036	13,158264	13,297069	13,437468	13,579477	13,723114	13,868398	14,015344
10	14,835099	15,012838	15,192930	15,375404	15,560291	15,747621	15,937425	16,129734	16,324579	16,521994
11	17,096083	17,326461	17,560293	17,797629	18,038518	18,283014	18,531167	18,783031	19,038660	19,298108
12	19,549250	19,842527	20,140720	20,443909	20,752178	21,065607	21,384284	21,708292	22,037720	22,372655
13	22,210936	22,578748	22,953385	23,334971	23,723634	24,119504	24,522712	24,933392	25,351680	25,777715
14	25,098866	25,554388	26,019189	26,493456	26,977380	27,471156	27,974983	28,489065	29,013607	29,548820
15	28,232269	28,790397	29,360916	29,944100	30,540231	31,149594	31,772482	32,409194	33,060035	33,725318
16	31,632012	32,309557	33,003399	33,713930	34,441553	35,186679	35,949730	36,731136	37,531339	38,350789
17	35,320733	36,136643	36,973705	37,832468	38,713500	39,617380	40,544703	41,496078	42,472130	43,473499
18	39,322995	40,298600	41,301338	42,331972	43,391283	44,480075	45,599173	46,749426	47,931703	49,146900
19	43,665450	44,824727	46,018458	47,247679	48,513454	49,816882	51,159090	52,541242	53,964532	55,430192
20	48,377013	49,746891	51,160120	52,618089	54,122233	55,674028	57,274999	58,926719	60,630808	62,388938
21	53,489059	55,099744	56,764530	58,485262	60,263845	62,102246	64,002499	65,966708	67,997043	70,095749
22	59,035629	60,920971	62,873338	64,895149	66,988910	69,157215	71,402749	73,728295	76,136732	78,631042
23	65,053658	67,251556	69,531939	71,897951	74,352856	76,900043	79,543024	82,285446	85,131089	88,083879
24	71,583219	74,136067	76,789813	79,548511	82,416378	85,397797	88,497327	91,719704	95,069854	98,552895
25	78,667792	81,622973	84,700896	87,906748	91,245934	94,724083	98,347059	102,120974	106,052188	110,147332
26	86,354555	89,764984	93,323977	97,038122	100,914297	104,959681	109,181765	113,588373	118,187668	122,988170
27	94,694692	98,619420	102,723135	107,014149	111,501156	116,193249	121,099942	126,231182	131,597373	137,209398
28	103,743741	108,248619	112,968217	117,912958	123,093766	128,522091	134,209936	140,169878	146,415097	152,959408
29	113,561959	118,720373	124,135356	129,819906	135,787673	142,052995	148,630930	155,537290	162,788683	170,402545
30	124,214725	130,108406	136,307539	142,828247	149,687502	156,903162	164,494023	172,479862	180,881494	189,720818
31	135,772977	142,492891	149,575217	157,039860	164,907815	173,201221	181,943425	191,159048	200,874051	211,115806
32	148,313680	155,961019	164,036987	172,566047	181,574057	191,088340	201,137767	211,752851	222,965827	234,810756
33	161,920343	170,607608	179,800315	189,528407	199,823593	210,719453	222,251544	234,457518	247,377238	261,052912
34	176,683572	186,535774	196,982344	208,059784	219,806834	232,264599	245,476699	259,489414	274,351848	290,116100
35	192,701675	203,857654	215,710755	228,305315	241,688483	255,910398	271,024368	287,087078	304,158792	322,303581
36	210,081318	222,695199	236,124723	250,423556	265,648889	281,861661	299,126805	317,513504	337,095466	357,951215
37	228,938230	243,181029	258,375948	274,587735	291,885534	310,343173	330,039486	351,058638	373,490489	397,430971
38	249,397979	265,459369	282,629783	300,987101	320,614659	341,601633	364,043434	388,042148	413,706991	441,154801
39	271,596808	289,687064	309,066463	329,828407	352,073052	375,907792	401,447778	428,816469	458,146225	489,578942
40	295,682536	316,034682	337,882445	361,337535	386,519992	413,558802	442,592556	473,770157	507,251579	543,208678
41	321,815552	344,687716	369,291865	395,761257	424,239391	454,880785	487,851811	523,331598	561,512994	602,603611
42	350,169874	375,847892	403,528133	433,369173	465,542133	500,231662	537,636992	577,973087	621,471859	668,383499
43	380,934313	409,734582	440,845665	474,455822	510,768636	550,004249	592,400692	638,215328	687,726404	741,234725
44	414,313730	446,586358	481,521775	519,342985	560,291656	604,629663	652,640761	704,632399	760,937676	821,917458
45	450,530397	486,662664	525,858734	568,382212	614,519364	664,581055	718,904837	777,857220	841,836132	911,273585
46	489,825480	530,245648	574,186021	621,957566	673,898703	730,377708	791,795321	858,587585	931,228926	1010,235495
47	532,460646	577,642142	626,862762	680,488641	738,919080	802,589534	871,974853	947,592813	1030,007963	1119,835811
48	578,719801	629,185829	684,280411	744,433840	810,116393	881,842014	960,172338	1045,721076	1139,158800	1241,218160
49	628,910984	685,239589	746,865648	814,293970	888,077450	968,821610	1057,189572	1153,907486	1259,770473	1375,649113
50	683,368418	746,198053	815,083556	890,616163	973,444808	1064,281717	1163,908529	1273,183003	1393,046373	1524,531392

Table T. 3 Valeur acquise par n annuités constantes de 1 DH : $C_n = \frac{(1+t)^n - 1}{t}$

n t	11,00%	11,25%	11,50%	11,75%	12,00%	12,25%	12,50%	12,75%	13,00%	13,25%
1	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000
2	2,110000	2,112500	2,115000	2,117500	2,120000	2,122500	2,125000	2,127500	2,130000	2,132500
3	3,342100	3,350156	3,358225	3,366306	3,374400	3,382506	3,390625	3,398756	3,406900	3,415056
4	4,709731	4,727049	4,744421	4,761847	4,779328	4,796863	4,814453	4,832098	4,849797	4,867551
5	6,227801	6,258842	6,290029	6,321364	6,352847	6,384479	6,416260	6,448190	6,480271	6,512502
6	7,912860	7,962962	8,013383	8,064125	8,115189	8,166578	8,218292	8,270334	8,322706	8,375408
7	9,783274	9,858795	9,934922	10,011659	10,089012	10,166983	10,245579	10,324802	10,404658	10,485150
8	11,859434	11,967909	12,077438	12,188029	12,299693	12,412439	12,526276	12,641214	12,757263	12,874432
9	14,163972	14,314299	14,466343	14,620123	14,775656	14,932963	15,092061	15,252969	15,415707	15,580294
10	16,722009	16,924657	17,129972	17,337987	17,548735	17,762251	17,978568	18,197723	18,419749	18,644683
11	19,561430	19,828681	20,099919	20,375200	20,654583	20,938126	21,225889	21,517932	21,814317	22,115104
12	22,713187	23,059408	23,411410	23,769287	24,133133	24,503047	24,879125	25,261469	25,650178	26,045355
13	26,211638	26,653592	27,103722	27,562178	28,029109	28,504670	28,989016	29,482306	29,984701	30,496365
14	30,094918	30,652121	31,220650	31,800734	32,392602	32,996492	33,612643	34,241300	34,882712	35,537133
15	34,405359	35,100484	35,811025	36,537320	37,279715	38,038562	38,814223	39,607066	40,417464	41,245803
16	39,189948	40,049289	40,929293	41,830455	42,753280	43,698286	44,666001	45,656966	46,671735	47,710872
17	44,500843	45,554834	46,636161	47,745533	48,883674	50,051326	51,249252	52,478230	53,739060	55,032563
18	50,395936	51,679752	52,999320	54,355634	55,749715	57,182614	58,655408	60,169204	61,725138	63,324377
19	56,939488	58,493725	60,094242	61,742420	63,439681	65,187484	66,987334	68,840777	70,749406	72,714857
20	64,202832	66,074269	68,005080	69,997155	72,052442	74,172951	76,360751	78,617977	80,946829	83,349576
21	72,265144	74,507624	76,825664	79,221821	81,698736	84,259137	86,905845	89,641769	92,469917	95,393395
22	81,214309	83,889731	86,660615	89,530384	92,502584	95,580882	98,769075	102,071094	105,491006	109,033020
23	91,147884	94,327326	97,626586	101,050205	104,602894	108,289540	112,115210	116,085159	120,204837	124,479895
24	102,174151	105,939150	109,853643	113,923604	118,155241	122,555008	127,129611	131,886016	136,831465	141,973481

n t	13,50%	13,75%	14,00%	14,25%	14,50%	14,75%	15,00%	15,25%	15,50%	15,75%
1	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000
2	2,135000	2,137500	2,140000	2,142500	2,145000	2,147500	2,150000	2,152500	2,155000	2,157500
3	3,423225	3,431406	3,439600	3,447806	3,456025	3,464256	3,472500	3,480756	3,489025	3,497306
4	4,885360	4,903225	4,921144	4,939119	4,957149	4,975234	4,993375	5,011572	5,029824	5,048132
5	6,544884	6,577418	6,610104	6,642943	6,675935	6,709081	6,742381	6,775836	6,809447	6,843213
6	8,428443	8,481813	8,535519	8,589562	8,643946	8,698671	8,753738	8,809151	8,864911	8,921019
7	10,566283	10,648062	10,730491	10,813575	10,897318	10,981724	11,066799	11,152547	11,238972	11,326079
8	12,992731	13,112171	13,232760	13,354510	13,477429	13,601529	13,726819	13,853310	13,981013	14,109937
9	15,746750	15,915094	16,085347	16,257527	16,431656	16,607754	16,785842	16,965940	17,148070	17,332252
10	18,872561	19,103420	19,337295	19,574225	19,814246	20,057398	20,303718	20,553246	20,806020	21,062081
11	22,420357	22,730140	23,044516	23,363552	23,687312	24,015864	24,349276	24,687616	25,030954	25,379359
12	26,447106	26,855534	27,270749	27,692858	28,121972	28,558204	29,001667	29,452477	29,910751	30,376608
13	31,017465	31,548170	32,088654	32,639090	33,199658	33,770539	34,351917	34,943980	35,546918	36,160924
14	36,204823	36,886044	37,581065	38,290161	39,013609	39,751694	40,504705	41,272937	42,056690	42,856270
15	42,092474	42,957875	43,842414	44,746508	45,670582	46,615069	47,580411	48,567060	49,575477	50,606132
16	48,774957	49,864582	50,980352	52,122886	53,292816	54,490791	55,717472	56,973537	58,259676	59,576598
17	56,359577	57,720962	59,117601	60,550397	62,020275	63,528183	65,075093	66,662001	68,289926	69,959912
18	64,968120	66,657595	68,394066	70,178829	72,013215	73,898590	75,836357	77,827956	79,874864	81,978598
19	74,738816	76,823014	78,969235	81,179312	83,455131	85,798632	88,211811	90,696719	93,255468	95,890228
20	85,828556	88,386178	91,024928	93,747364	96,556125	99,453930	102,443583	105,527969	108,710066	111,992938
21	98,415411	101,539278	104,768418	108,106363	111,556763	115,123385	118,810120	122,620984	126,560126	130,631826
22	112,701491	116,500929	120,435996	124,511520	128,732494	133,104084	137,631638	142,320685	147,176945	152,206339
23	128,916193	133,519806	138,297035	143,254411	148,398705	153,736937	159,276384	165,024589	170,989372	177,178837
24	147,319879	152,878780	158,658620	164,668165	170,916517	177,413135	184,167841	191,190839	198,492725	206,084504

Table T. 3 Valeur acquise par n annuités constantes de 1 DH : $C_n = \dfrac{(1+t)^n - 1}{t}$

n t	16,00%	16,25%	16,50%	16,75%	17,00%	17,25%	17,50%	17,75%	18,00%	18,25%
1	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000
2	2,160000	2,162500	2,165000	2,167500	2,170000	2,172500	2,175000	2,177500	2,180000	2,182500
3	3,505600	3,513906	3,522225	3,530556	3,538900	3,547256	3,555625	3,564006	3,572400	3,580806
4	5,066496	5,084916	5,103392	5,121924	5,140513	5,159158	5,177859	5,196617	5,215432	5,234303
5	6,877135	6,911215	6,945452	6,979847	7,014400	7,049113	7,083985	7,119017	7,154210	7,189564
6	8,977477	9,034287	9,091451	9,148971	9,206848	9,265085	9,323682	9,382642	9,441968	9,501659
7	11,413873	11,502359	11,591541	11,681424	11,772012	11,863312	11,955326	12,048061	12,141522	12,235712
8	14,240093	14,371492	14,504145	14,638062	14,773255	14,909733	15,047509	15,186592	15,326996	15,468729
9	17,518508	17,706860	17,897329	18,089938	18,284708	18,481662	18,680823	18,882213	19,085855	19,291772
10	21,321469	21,584225	21,850388	22,120002	22,393108	22,669749	22,949967	23,233805	23,521309	23,812521
11	25,732904	26,091661	26,455702	26,825103	27,199937	27,580280	27,966211	28,357806	28,755144	29,158306
12	30,850169	31,331556	31,820893	32,318307	32,823926	33,337879	33,860298	34,391316	34,931070	35,479697

n t	18,50%	18,75%	19,00%	19,25%	19,50%	19,75%	20,00%	20,25%	20,50%	20,75%
1	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000
2	2,185000	2,187500	2,190000	2,192500	2,195000	2,197500	2,200000	2,202500	2,205000	2,207500
3	3,589225	3,597656	3,606100	3,614556	3,623025	3,631506	3,640000	3,648506	3,657025	3,665556
4	5,253232	5,272217	5,291259	5,310358	5,329515	5,348729	5,368000	5,387329	5,406715	5,426159
5	7,225079	7,260757	7,296598	7,332602	7,368770	7,405103	7,441600	7,478263	7,515092	7,552087
6	9,561719	9,622149	9,682952	9,744128	9,805680	9,867610	9,929920	9,992611	10,055686	10,119145
7	12,330637	12,426302	12,522713	12,619873	12,717788	12,816463	12,915904	13,016115	13,117101	13,218868
8	15,611805	15,756234	15,902028	16,049198	16,197757	16,347715	16,499085	16,651878	16,806107	16,961783
9	19,499989	19,710528	19,923413	20,138669	20,356319	20,576389	20,798902	21,023883	21,251359	21,481353
10	24,107487	24,406252	24,708862	25,015363	25,325802	25,640226	25,958682	26,281220	26,607887	26,938734
11	29,567372	29,982424	30,403546	30,830820	31,264333	31,704170	32,150419	32,603167	33,062504	33,528521
12	36,037336	36,604129	37,180220	37,765753	38,360878	38,965744	39,580502	40,205308	40,840317	41,485689

n t	0,2125	0,215	0,2175	0,22	0,2225	0,225	0,2275	0,23	0,2325	0,235
1	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000
2	2,212500	2,215000	2,217500	2,220000	2,222500	2,225000	2,227500	2,230000	2,232500	2,235000
3	3,682656	3,691225	3,699806	3,708400	3,717006	3,725625	3,734256	3,742900	3,751556	3,760225
4	5,465221	5,484838	5,504514	5,524248	5,544040	5,563891	5,583800	5,603767	5,623793	5,643878
5	7,626580	7,664079	7,701746	7,739583	7,777589	7,815766	7,854114	7,892633	7,931325	7,970189
6	10,247228	10,311856	10,376876	10,442291	10,508103	10,574313	10,640925	10,707939	10,775358	10,843184
7	13,424764	13,528904	13,633846	13,739595	13,846155	13,953534	14,061735	14,170765	14,280629	14,391332
8	17,277527	17,437619	17,599208	17,762306	17,926925	18,093079	18,260780	18,430041	18,600875	18,773295
9	21,949001	22,186707	22,427035	22,670013	22,915666	23,164022	23,415108	23,668950	23,925578	24,185019
10	27,613164	27,956849	28,304916	28,657416	29,014402	29,375927	29,742044	30,112809	30,488275	30,868498
11	34,480961	34,967572	35,461235	35,962047	36,470106	36,985510	37,508360	38,038755	38,576799	39,122596
12	42,808166	43,485599	44,174053	44,873697	45,584704	46,307250	47,041511	47,787669	48,545905	49,316406

Table T. 4 **Valeur actuelle de n annuités constantes de 1 DH :** $\dfrac{1-(1+t)^{-n}}{t}$

n / t	0,05%	0,10%	0,20%	0,30%	0,40%	0,50%	0,60%	0,70%	0,80%	0,90%
1	0,999500	0,999001	0,998004	0,997009	0,996016	0,995025	0,994036	0,993049	0,992063	0,991080
2	1,998501	1,997004	1,994016	1,991036	1,988064	1,985099	1,982143	1,979194	1,976253	1,973320
3	2,997002	2,994010	2,988040	2,982090	2,976159	2,970248	2,964357	2,958485	2,952632	2,946799
4	3,995005	3,990020	3,980080	3,970179	3,960318	3,950496	3,940713	3,930968	3,921262	3,911595
5	4,992509	4,985035	4,970139	4,955313	4,940556	4,925866	4,911245	4,896691	4,882205	4,867785
6	5,989514	5,979056	5,958223	5,937501	5,916888	5,896384	5,875989	5,855701	5,835521	5,815446
7	6,986021	6,972084	6,944334	6,916750	6,889331	6,862074	6,834979	6,808045	6,781270	6,754654
8	7,982030	7,964120	7,928477	7,893071	7,857899	7,822959	7,788250	7,753769	7,719514	7,685485
9	8,977541	8,955165	8,910656	8,866472	8,822609	8,779064	8,735835	8,692918	8,650312	8,608012
10	9,972555	9,945219	9,890874	9,836961	9,783475	9,730412	9,677768	9,625539	9,573722	9,522312
11	10,967071	10,934285	10,869136	10,804547	10,740513	10,677027	10,614084	10,551678	10,489804	10,428456
12	11,961091	11,922363	11,845445	11,769239	11,693738	11,618932	11,544815	11,471378	11,398615	11,326517
13	12,954614	12,909453	12,819806	12,731046	12,643165	12,556151	12,469995	12,384685	12,300213	12,216568
14	13,947640	13,895558	13,792221	13,689976	13,588810	13,488708	13,389657	13,291644	13,194656	13,098680
15	14,940170	14,880677	14,762696	14,646038	14,530687	14,416625	14,303834	14,192298	14,082000	13,972923
16	15,932204	15,864812	15,731233	15,599241	15,468812	15,339925	15,212558	15,086691	14,962301	14,839369
17	16,923742	16,847964	16,697838	16,549592	16,403199	16,258632	16,115863	15,974867	15,835616	15,698086
18	17,914784	17,830134	17,662513	17,497101	17,333864	17,172768	17,013781	16,856869	16,702000	16,549144
19	18,905332	18,811323	18,625262	18,441775	18,260820	18,082356	17,906343	17,732740	17,561508	17,392610
20	19,895384	19,791531	19,586090	19,383624	19,184084	18,987419	18,793581	18,602522	18,414195	18,228553
21	20,884941	20,770760	20,545000	20,322656	20,103669	19,887979	19,675528	19,466258	19,260114	19,057040
22	21,874004	21,749011	21,501996	21,258880	21,019591	20,784059	20,552215	20,323990	20,099319	19,878137
23	22,862573	22,726285	22,457082	22,192303	21,931863	21,675681	21,423673	21,175760	20,931864	20,691910
24	23,850648	23,702583	23,410261	23,122934	22,840501	22,562866	22,289933	22,021609	21,757802	21,498424
25	24,838229	24,677905	24,361538	24,050782	23,745519	23,445638	23,151027	22,861578	22,577184	22,297744
26	25,825316	25,652252	25,310916	24,975854	24,646932	24,324018	24,006985	23,695708	23,390064	23,089935
27	26,811910	26,625627	26,258399	25,898160	25,544753	25,198028	24,857838	24,524039	24,196492	23,875059
28	27,798011	27,598029	27,203991	26,817706	26,438997	26,067689	25,703616	25,346613	24,996520	24,653181
29	28,783619	28,569459	28,147696	27,734503	27,329678	26,933024	26,544350	26,163469	25,790198	25,424361
30	29,768735	29,539919	29,089517	28,648557	28,216811	27,794054	27,380070	26,974646	26,577578	26,188663
31	30,753358	30,509410	30,029458	29,559878	29,100409	28,650800	28,210805	27,780185	27,358708	26,946148
32	31,737489	31,477932	30,967523	30,468472	29,980487	29,503284	29,036585	28,580124	28,133639	27,696876
33	32,721129	32,445487	31,903716	31,374349	30,857059	30,351526	29,857441	29,374503	28,902419	28,440908
34	33,704277	33,412074	32,838040	32,277517	31,730138	31,195548	30,673400	30,163359	29,665099	29,178303
35	34,686933	34,377697	33,770499	33,177983	32,599739	32,035371	31,484493	30,946732	30,421725	29,909121
36	35,669099	35,342354	34,701096	34,075755	33,465876	32,871016	32,290749	31,724659	31,172346	30,633420
37	36,650773	36,306048	35,629837	34,970843	34,328562	33,702504	33,092196	32,497179	31,917010	31,351259
38	37,631957	37,268780	36,556723	35,863253	35,187810	34,529854	33,888862	33,264329	32,655764	32,062695
39	38,612651	38,230549	37,481760	36,752994	36,043636	35,353089	34,680778	34,026146	33,388655	32,767785
40	39,592855	39,191358	38,404950	37,640074	36,896052	36,172228	35,467970	34,782667	34,115729	33,466585
41	40,572568	40,151206	39,326297	38,524500	37,745071	36,987291	36,250467	35,533930	34,837033	34,159153
42	41,551792	41,110096	40,245806	39,406282	38,590709	37,798300	37,028297	36,279970	35,552612	34,845543
43	42,530527	42,068028	41,163479	40,285425	39,432977	38,605274	37,801488	37,020824	36,262512	35,525811
44	43,508773	43,025003	42,079320	41,161940	40,271889	39,408232	38,570068	37,756528	36,966777	36,200011
45	44,486530	43,981022	42,993333	42,035832	41,107459	40,207196	39,334064	38,487118	37,665454	36,868197
46	45,463798	44,936086	43,905522	42,907111	41,939700	41,002185	40,093503	39,212630	38,358585	37,530423
47	46,440577	45,890196	44,815891	43,775783	42,768626	41,793219	40,848412	39,933098	39,046215	38,186743
48	47,416869	46,843353	45,724442	44,641858	43,594249	42,580318	41,598819	40,648558	39,728388	38,837208
49	48,392673	47,795557	46,631179	45,505342	44,416583	43,363500	42,344751	41,359045	40,405147	39,481871
50	49,367989	48,746810	47,536107	46,366243	45,235640	44,142786	43,086233	42,064593	41,076535	40,120784

Table T. 4 **Valeur actuelle de n annuités constantes de 1 DH :** $\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$

n t	1,00%	1,25%	1,50%	1,75%	2,00%	2,25%	2,50%	2,75%	3,00%	3,25%
1	0,990099	0,987654	0,985222	0,982801	0,980392	0,977995	0,975610	0,973236	0,970874	0,968523
2	1,970395	1,963115	1,955883	1,948699	1,941561	1,934470	1,927424	1,920424	1,913470	1,906560
3	2,940985	2,926534	2,912200	2,897984	2,883883	2,869897	2,856024	2,842262	2,828611	2,815070
4	3,901966	3,878058	3,854385	3,830943	3,807729	3,784740	3,761974	3,739428	3,717098	3,694983
5	4,853431	4,817835	4,782645	4,747855	4,713460	4,679453	4,645828	4,612582	4,579707	4,547199
6	5,795476	5,746010	5,697187	5,648998	5,601431	5,554477	5,508125	5,462367	5,417191	5,372590
7	6,728195	6,662726	6,598214	6,534641	6,471991	6,410246	6,349391	6,289408	6,230283	6,172000
8	7,651678	7,568124	7,485925	7,405053	7,325481	7,247185	7,170137	7,094314	7,019692	6,946247
9	8,566018	8,462345	8,360517	8,260494	8,162237	8,065706	7,970866	7,877678	7,786109	7,696123
10	9,471305	9,345526	9,222185	9,101223	8,982585	8,866216	8,752064	8,640076	8,530203	8,422395
11	10,367628	10,217803	10,071118	9,927492	9,786848	9,649111	9,514209	9,382069	9,252624	9,125806
12	11,255077	11,079312	10,907505	10,739550	10,575341	10,414779	10,257765	10,104204	9,954004	9,807076
13	12,133740	11,930185	11,731532	11,537641	11,348374	11,163598	10,983185	10,807011	10,634955	10,466902
14	13,003703	12,770553	12,543382	12,322006	12,106249	11,895939	11,690912	11,491008	11,296073	11,105958
15	13,865053	13,600546	13,343233	13,092880	12,849264	12,612166	12,381378	12,156699	11,937935	11,724899
16	14,717874	14,420292	14,131264	13,850497	13,577709	13,312631	13,055003	12,804573	12,561102	12,324358
17	15,562251	15,229918	14,907649	14,595083	14,291872	13,997683	13,712198	13,435108	13,166118	12,904947
18	16,398269	16,029549	15,672561	15,326863	14,992031	14,667661	14,353364	14,048767	13,753513	13,467261
19	17,226008	16,819308	16,426168	16,046057	15,678462	15,322896	14,978891	14,646002	14,323799	14,011875
20	18,045553	17,599316	17,168639	16,752881	16,351433	15,963712	15,589162	15,227252	14,877475	14,539346
21	18,856983	18,369695	17,900137	17,447549	17,011209	16,590428	16,184549	15,792946	15,415024	15,050214
22	19,660379	19,130563	18,620824	18,130269	17,658048	17,203352	16,765413	16,343500	15,936917	15,545002
23	20,455821	19,882037	19,330861	18,801248	18,292204	17,802790	17,332110	16,879319	16,443608	16,024215
24	21,243387	20,624235	20,030405	19,460686	18,913926	18,389036	17,884986	17,400797	16,935542	16,488343
25	22,023156	21,357269	20,719611	20,108782	19,523456	18,962383	18,424376	17,908318	17,413148	16,937863
26	22,795204	22,081253	21,398632	20,745732	20,121036	19,523113	18,950611	18,402256	17,876842	17,373233
27	23,559608	22,796299	22,067617	21,371726	20,706898	20,071504	19,464011	18,882974	18,327031	17,794899
28	24,316443	23,502518	22,726717	21,986955	21,281272	20,607828	19,964889	19,350826	18,764108	18,203292
29	25,065785	24,200018	23,376076	22,591602	21,844385	21,132350	20,453550	19,806157	19,188455	18,598830
30	25,807708	24,888906	24,015838	23,185849	22,396456	21,645330	20,930293	20,249301	19,600441	18,981917
31	26,542285	25,569290	24,646146	23,769877	22,937702	22,147022	21,395407	20,680585	20,000428	19,352947
32	27,269589	26,241274	25,267139	24,343859	23,468335	22,637674	21,849178	21,100326	20,388766	19,712297
33	27,989693	26,904962	25,878954	24,907970	23,988564	23,117530	22,291881	21,508833	20,765792	20,060336
34	28,702666	27,560456	26,481728	25,462378	24,498592	23,586826	22,723786	21,906407	21,131837	20,397420
35	29,408580	28,207858	27,075595	26,007251	24,998619	24,045796	23,145157	22,293340	21,487220	20,723893
36	30,107505	28,847267	27,660684	26,542753	25,488842	24,494666	23,556251	22,669918	21,832252	21,040090
37	30,799510	29,478783	28,237127	27,069045	25,969453	24,933658	23,957318	23,036416	22,167235	21,346335
38	31,484663	30,102501	28,805052	27,586285	26,440641	25,362991	24,348603	23,393106	22,492462	21,642939
39	32,163033	30,718520	29,364583	28,094629	26,902589	25,782876	24,730344	23,740249	22,808215	21,930207
40	32,834686	31,326933	29,915845	28,594230	27,355479	26,193522	25,102775	24,078101	23,114772	22,208433
41	33,499689	31,927835	30,458961	29,085238	27,799489	26,595132	25,466122	24,406911	23,412400	22,477901
42	34,158108	32,521319	30,994050	29,567801	28,234794	26,987904	25,820607	24,726921	23,701359	22,738888
43	34,810008	33,107475	31,521232	30,042065	28,661562	27,372033	26,166446	25,038366	23,981902	22,991659
44	35,455454	33,686395	32,040622	30,508172	29,079963	27,747710	26,503849	25,341475	24,254274	23,236473
45	36,094508	34,258168	32,552337	30,966263	29,490160	28,115120	26,833024	25,636472	24,518713	23,473582
46	36,727236	34,822882	33,056490	31,416474	29,892314	28,474444	27,154170	25,923574	24,775449	23,703227
47	37,353699	35,380624	33,553192	31,858943	30,286582	28,825863	27,467483	26,202992	25,024708	23,925644
48	37,973959	35,931481	34,042554	32,293801	30,673120	29,169548	27,773154	26,474931	25,266707	24,141059
49	38,588079	36,475537	34,524683	32,721181	31,052078	29,505670	28,071369	26,739592	25,501657	24,349694
50	39,196118	37,012876	34,999688	33,141209	31,423606	29,834396	28,362312	26,997170	25,729764	24,551762

Table T. 4 **Valeur actuelle de n annuités constantes de 1 DH :** $\dfrac{1-(1+t)^{-n}}{t}$

n t	3,50%	3,75%	4,00%	4,25%	4,50%	4,75%	5,00%	5,25%	5,50%	5,75%
1	0,966184	0,963855	0,961538	0,959233	0,956938	0,954654	0,952381	0,950119	0,947867	0,945626
2	1,899694	1,892873	1,886095	1,879360	1,872668	1,866018	1,859410	1,852844	1,846320	1,839836
3	2,801637	2,788311	2,775091	2,761976	2,748964	2,736055	2,723248	2,710541	2,697933	2,685424
4	3,673079	3,651384	3,629895	3,608610	3,587526	3,566640	3,545951	3,525455	3,505150	3,485035
5	4,515052	4,483262	4,451822	4,420729	4,389977	4,359561	4,329477	4,299719	4,270284	4,241167
6	5,328553	5,285072	5,242137	5,199740	5,157872	5,116526	5,075692	5,035363	4,995530	4,956187
7	6,114544	6,057900	6,002055	5,946993	5,892701	5,839166	5,786373	5,734311	5,682967	5,632328
8	6,873956	6,802796	6,732745	6,663782	6,595886	6,529036	6,463213	6,398396	6,334566	6,271705
9	7,607687	7,520767	7,435332	7,351350	7,268790	7,187624	7,107822	7,029355	6,952195	6,876317
10	8,316605	8,212787	8,110896	8,010887	7,912718	7,816348	7,721735	7,628840	7,537626	7,448054
11	9,001551	8,879795	8,760477	8,643537	8,528917	8,416561	8,306414	8,198423	8,092536	7,988703
12	9,663334	9,522694	9,385074	9,250395	9,118581	8,989557	8,863252	8,739595	8,618518	8,499956
13	10,302738	10,142356	9,985648	9,832513	9,682852	9,536570	9,393573	9,253772	9,117079	8,983410
14	10,920520	10,739620	10,563123	10,390900	10,222825	10,058778	9,898641	9,742301	9,589648	9,440576
15	11,517411	11,315296	11,118387	10,926523	10,739546	10,557306	10,379658	10,206462	10,037581	9,872886
16	12,094117	11,870165	11,652296	11,440309	11,234015	11,033228	10,837770	10,647469	10,462162	10,281688
17	12,651321	12,404978	12,165669	11,933151	11,707191	11,487568	11,274066	11,066479	10,864609	10,668263
18	13,189682	12,920461	12,659297	12,405900	12,159992	11,921306	11,689587	11,464588	11,246074	11,033819
19	13,709837	13,417312	13,133939	12,859376	12,593294	12,335376	12,085321	11,842839	11,607654	11,379498
20	14,212403	13,896204	13,590326	13,294366	13,007936	12,730669	12,462210	12,202223	11,950382	11,706381
21	14,697974	14,357787	14,029160	13,711622	13,404724	13,108037	12,821153	12,543679	12,275244	12,015490
22	15,167125	14,802686	14,451115	14,111868	13,784425	13,468293	13,163003	12,868104	12,583170	12,307792
23	15,620410	15,231505	14,856842	14,495796	14,147775	13,812213	13,488574	13,176346	12,875042	12,584200
24	16,058368	15,644824	15,246963	14,864073	14,495478	14,140538	13,798642	13,469212	13,151699	12,845580
25	16,481515	16,043204	15,622080	15,217336	14,828209	14,453974	14,093945	13,747470	13,413933	13,092747
26	16,890352	16,427185	15,982769	15,556198	15,146611	14,753197	14,375185	14,011848	13,662495	13,326474
27	17,285365	16,797286	16,329586	15,881245	15,451303	15,038852	14,643034	14,263038	13,898100	13,547494
28	17,667019	17,154011	16,663063	16,193041	15,742874	15,311553	14,898127	14,501699	14,121422	13,756495
29	18,035767	17,497842	16,983715	16,492125	16,021889	15,571888	15,141074	14,728455	14,333101	13,954132
30	18,392045	17,829245	17,292033	16,779017	16,288889	15,820418	15,372451	14,943901	14,533745	14,141024
31	18,736276	18,148670	17,588494	17,054213	16,544391	16,057679	15,592811	15,148599	14,723929	14,317753
32	19,068865	18,456549	17,873551	17,318190	16,788891	16,284180	15,802677	15,343087	14,904198	14,484873
33	19,390208	18,753301	18,147646	17,571405	17,022862	16,500410	16,002549	15,527874	15,075069	14,642906
34	19,700684	19,039326	18,411198	17,814298	17,246758	16,706836	16,192904	15,703443	15,237033	14,792346
35	20,000661	19,315013	18,664613	18,047288	17,461012	16,903901	16,374194	15,870255	15,390552	14,933660
36	20,290494	19,580735	18,908282	18,270780	17,666041	17,092029	16,546852	16,028745	15,536068	15,067291
37	20,570525	19,836853	19,142579	18,485160	17,862240	17,271627	16,711287	16,179331	15,673999	15,193656
38	20,841087	20,083714	19,367864	18,690801	18,049990	17,443081	16,867893	16,322404	15,804738	15,313150
39	21,102500	20,321652	19,584485	18,888059	18,229656	17,606759	17,017041	16,458341	15,928662	15,426146
40	21,355072	20,550990	19,792774	19,077275	18,401584	17,763016	17,159086	16,587498	16,046125	15,532999
41	21,599104	20,772039	19,993052	19,258777	18,566109	17,912187	17,294368	16,710212	16,157464	15,634041
42	21,834883	20,985097	20,185627	19,432879	18,723550	18,054594	17,423208	16,826804	16,262999	15,729590
43	22,062689	21,190455	20,370795	19,599884	18,874210	18,190543	17,545912	16,937581	16,363032	15,819943
44	22,282791	21,388391	20,548841	19,760081	19,018383	18,320328	17,662773	17,042833	16,457851	15,905384
45	22,495450	21,579172	20,720040	19,913747	19,156347	18,444227	17,774070	17,142834	16,547726	15,986178
46	22,700918	21,763057	20,884654	20,061148	19,288371	18,562508	17,880066	17,237847	16,632915	16,062580
47	22,899438	21,940296	21,042936	20,202540	19,414709	18,675425	17,981016	17,328121	16,713664	16,134828
48	23,091244	22,111129	21,195131	20,338168	19,535607	18,783222	18,077158	17,413891	16,790203	16,203147
49	23,276564	22,275787	21,341472	20,468266	19,651298	18,886131	18,168722	17,495384	16,862751	16,267751
50	23,455618	22,434493	21,482185	20,593061	19,762008	18,984373	18,255925	17,572811	16,931518	16,328842

Table T. 4 **Valeur actuelle de n annuités constantes de 1 DH :** $\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$

n t	6,00%	6,25%	6,50%	6,75%	7,00%	7,25%	7,50%	7,75%	8,00%	8,25%
1	0,943396	0,941176	0,938967	0,936768	0,934579	0,932401	0,930233	0,928074	0,925926	0,923788
2	1,833393	1,826990	1,820626	1,814303	1,808018	1,801772	1,795565	1,789396	1,783265	1,777171
3	2,673012	2,660696	2,648476	2,636349	2,624316	2,612375	2,600526	2,588767	2,577097	2,565516
4	3,465106	3,445361	3,425799	3,406416	3,387211	3,368182	3,349326	3,330642	3,312127	3,293779
5	4,212364	4,183869	4,155679	4,127790	4,100197	4,072897	4,045885	4,019157	3,992710	3,966540
6	4,917324	4,878936	4,841014	4,803551	4,766540	4,729974	4,693846	4,658151	4,622880	4,588027
7	5,582381	5,533116	5,484520	5,436581	5,389289	5,342633	5,296601	5,251184	5,206370	5,162150
8	6,209794	6,148815	6,088751	6,029584	5,971299	5,913877	5,857304	5,801563	5,746639	5,692517
9	6,801692	6,728297	6,656104	6,585091	6,515232	6,446505	6,378887	6,312355	6,246888	6,182464
10	7,360087	7,273691	7,188830	7,105471	7,023582	6,943128	6,864081	6,786409	6,710081	6,635071
11	7,886875	7,787003	7,689042	7,592947	7,498674	7,406180	7,315424	7,226365	7,138964	7,053183
12	8,383844	8,270121	8,158725	8,049600	7,942686	7,837930	7,735278	7,634678	7,536078	7,439430
13	8,852683	8,724819	8,599742	8,477377	8,357651	8,240495	8,125840	8,013622	7,903776	7,796240
14	9,294984	9,152771	9,013842	8,878105	8,745468	8,615846	8,489154	8,365310	8,244237	8,125857
15	9,712249	9,555549	9,402669	9,253494	9,107914	8,965824	8,827120	8,691703	8,559479	8,430353
16	10,105895	9,934635	9,767764	9,605146	9,446649	9,292143	9,141507	8,994620	8,851369	8,711642
17	10,477260	10,291421	10,110577	9,934563	9,763223	9,596404	9,433960	9,275750	9,121638	8,971494
18	10,827603	10,627220	10,432466	10,243151	10,059087	9,880097	9,706009	9,536659	9,371887	9,211542
19	11,158116	10,943266	10,734710	10,532225	10,335595	10,144612	9,959078	9,778802	9,603599	9,433295
20	11,469921	11,240721	11,018507	10,803021	10,594014	10,391247	10,194491	10,003528	9,818147	9,638148
21	11,764077	11,520678	11,284983	11,056695	10,835527	10,621209	10,413480	10,212091	10,016803	9,827388
22	12,041582	11,784168	11,535196	11,294327	11,061240	10,835626	10,617191	10,405653	10,200744	10,002206
23	12,303379	12,032158	11,770137	11,516934	11,272187	11,035549	10,806689	10,585293	10,371059	10,163701
24	12,550358	12,265560	11,990739	11,725465	11,469334	11,221957	10,982967	10,752012	10,528758	10,312888
25	12,783356	12,485233	12,197877	11,920811	11,653583	11,395764	11,146946	10,906740	10,674776	10,450705
26	13,003166	12,691984	12,392373	12,103804	11,825779	11,557822	11,299485	11,050338	10,809978	10,578018
27	13,210534	12,886573	12,574998	12,275226	11,986709	11,708925	11,441381	11,183609	10,935165	10,695629
28	13,406164	13,069716	12,746477	12,435809	12,137111	11,849814	11,573378	11,307293	11,051078	10,804276
29	13,590721	13,242086	12,907490	12,586238	12,277674	11,981178	11,696165	11,422082	11,158406	10,904643
30	13,764831	13,404316	13,058676	12,727155	12,409041	12,103663	11,810386	11,528614	11,257783	10,997361
31	13,929086	13,557003	13,200635	12,859162	12,531814	12,217867	11,916638	11,627484	11,349799	11,083012
32	14,084043	13,700709	13,333929	12,982821	12,646555	12,324352	12,015478	11,719243	11,434999	11,162136
33	14,230230	13,835961	13,459088	13,098662	12,753790	12,423638	12,107421	11,804402	11,513888	11,235230
34	14,368141	13,963258	13,576609	13,207177	12,854009	12,516213	12,192950	11,883436	11,586934	11,302752
35	14,498246	14,083066	13,686957	13,308831	12,947672	12,602529	12,272511	11,956785	11,654568	11,365129
36	14,620987	14,195827	13,790570	13,404057	13,035208	12,683011	12,346522	12,024858	11,717193	11,422752
37	14,736780	14,301955	13,887859	13,493262	13,117017	12,758052	12,415370	12,088036	11,775179	11,475984
38	14,846019	14,401840	13,979210	13,576826	13,193473	12,828021	12,479414	12,146669	11,828869	11,525158
39	14,949075	14,495849	14,064986	13,655107	13,264928	12,893259	12,538989	12,201085	11,878582	11,570585
40	15,046297	14,584329	14,145527	13,728437	13,331709	12,954088	12,594409	12,251587	11,924613	11,612549
41	15,138016	14,667603	14,221152	13,797131	13,394120	13,010805	12,645962	12,298456	11,967235	11,651316
42	15,224543	14,745980	14,292161	13,861481	13,452449	13,063687	12,693918	12,341955	12,006699	11,687128
43	15,306173	14,819746	14,358837	13,921762	13,506962	13,112995	12,738528	12,382325	12,043240	11,720210
44	15,383182	14,889172	14,421443	13,978231	13,557908	13,158970	12,780026	12,419791	12,077074	11,750772
45	15,455832	14,954515	14,480228	14,031130	13,605522	13,201837	12,818629	12,454562	12,108402	11,779004
46	15,524370	15,016014	14,535426	14,080684	13,650020	13,241806	12,854539	12,486833	12,137409	11,805085
47	15,589028	15,073896	14,587254	14,127104	13,691608	13,279073	12,887943	12,516782	12,164267	11,829177
48	15,650027	15,128372	14,635919	14,170589	13,730474	13,313821	12,919017	12,544577	12,189136	11,851434
49	15,707572	15,179645	14,681615	14,211325	13,766799	13,346220	12,947922	12,570373	12,212163	11,871995
50	15,761861	15,227901	14,724521	14,249485	13,800746	13,376429	12,974812	12,594314	12,233485	11,890988

Table T. 4 Valeur actuelle de n annuités constantes de 1 DH : $\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$

n t	8,50%	8,75%	9,00%	9,25%	9,50%	9,75%	10,00%	10,25%	10,50%	10,75%
1	0,921659	0,919540	0,917431	0,915332	0,913242	0,911162	0,909091	0,907029	0,904977	0,902935
2	1,771114	1,765094	1,759111	1,753164	1,747253	1,741377	1,735537	1,729732	1,723961	1,718225
3	2,554022	2,542616	2,531295	2,520059	2,508907	2,497838	2,486852	2,475947	2,465123	2,454380
4	3,275597	3,257578	3,239720	3,222022	3,204481	3,187096	3,169865	3,152787	3,135858	3,119079
5	3,940642	3,915014	3,889651	3,864551	3,839709	3,815122	3,790787	3,766700	3,742858	3,719258
6	4,553587	4,519553	4,485919	4,452678	4,419825	4,387355	4,355261	4,323537	4,292179	4,261181
7	5,118514	5,075451	5,032953	4,991010	4,949612	4,908752	4,868419	4,828605	4,789303	4,750502
8	5,639183	5,586622	5,534819	5,483762	5,433436	5,383828	5,334926	5,286717	5,239188	5,192327
9	6,119063	6,056664	5,995247	5,934793	5,875284	5,816700	5,759024	5,702238	5,646324	5,591266
10	6,561348	6,488886	6,417658	6,347637	6,278798	6,211116	6,144567	6,079127	6,014773	5,951482
11	6,968984	6,886332	6,805191	6,725526	6,647304	6,570493	6,495061	6,420977	6,348211	6,276733
12	7,344686	7,251800	7,160725	7,071419	6,983839	6,897944	6,813692	6,731045	6,649964	6,570414
13	7,690955	7,587862	7,486904	7,388027	7,291178	7,196304	7,103356	7,012286	6,923045	6,835588
14	8,010097	7,896884	7,786150	7,677828	7,571852	7,468159	7,366687	7,267379	7,170176	7,075023
15	8,304237	8,181043	8,060688	7,943092	7,828175	7,715862	7,606080	7,498757	7,393825	7,291217
16	8,575333	8,442338	8,312558	8,185896	8,062260	7,941560	7,823709	7,708623	7,596221	7,486426
17	8,825192	8,682610	8,543631	8,408143	8,276037	8,147207	8,021553	7,898978	7,779386	7,662687
18	9,055476	8,903549	8,755625	8,611573	8,471266	8,334585	8,201412	8,071635	7,945146	7,821840
19	9,267720	9,106712	8,950115	8,797778	8,649558	8,505317	8,364920	8,228240	8,095154	7,965544
20	9,463337	9,293528	9,128546	8,968218	8,812382	8,660881	8,513564	8,370286	8,230909	8,095299
21	9,643628	9,465313	9,292244	9,124227	8,961080	8,802625	8,648694	8,499126	8,353764	8,212460
22	9,809796	9,623277	9,442425	9,267027	9,096876	8,931777	8,771540	8,615987	8,464945	8,318248
23	9,962945	9,768530	9,580207	9,397736	9,220892	9,049455	8,883218	8,721984	8,565561	8,413768
24	10,104097	9,902097	9,706612	9,517379	9,334148	9,156679	8,984744	8,818126	8,656616	8,500016
25	10,234191	10,024917	9,822580	9,626891	9,437578	9,254377	9,077040	8,905329	8,739019	8,577893
26	10,354093	10,137854	9,928972	9,727132	9,532034	9,343396	9,160945	8,984426	8,813592	8,648210
27	10,464602	10,241705	10,026580	9,818885	9,618296	9,424506	9,237223	9,056169	8,881079	8,711702
28	10,566453	10,337200	10,116128	9,902869	9,697074	9,498411	9,306567	9,121241	8,942153	8,769031
29	10,660326	10,425012	10,198283	9,979743	9,769018	9,565751	9,369606	9,180264	8,997423	8,820796
30	10,746844	10,505758	10,273654	10,050108	9,834719	9,627108	9,426914	9,233800	9,047442	8,867536
31	10,826584	10,580007	10,342802	10,114516	9,894721	9,683014	9,479013	9,282358	9,092707	8,909739
32	10,900078	10,648282	10,406240	10,173470	9,949517	9,733953	9,526376	9,326402	9,133672	8,947845
33	10,967813	10,711064	10,464441	10,227432	9,999559	9,780368	9,569432	9,366351	9,170744	8,982253
34	11,030243	10,768795	10,517835	10,276826	10,045259	9,822658	9,608575	9,402586	9,204293	9,013321
35	11,087781	10,821880	10,566821	10,322037	10,086995	9,861192	9,644159	9,435452	9,234654	9,041373
36	11,140812	10,870695	10,611763	10,363421	10,125109	9,896303	9,676508	9,465263	9,262131	9,066703
37	11,189689	10,915581	10,652993	10,401301	10,159917	9,928294	9,705917	9,492302	9,286996	9,089574
38	11,234736	10,956856	10,690820	10,435973	10,191705	9,957443	9,732651	9,516827	9,309499	9,110225
39	11,276255	10,994810	10,725523	10,467710	10,220735	9,984003	9,756956	9,539072	9,329863	9,128871
40	11,314520	11,029711	10,757360	10,496760	10,247247	10,008203	9,779051	9,559249	9,348292	9,145707
41	11,349788	11,061803	10,786569	10,523350	10,271458	10,030253	9,799137	9,577550	9,364970	9,160910
42	11,382293	11,091313	10,813366	10,547689	10,293569	10,050345	9,817397	9,594150	9,380064	9,174636
43	11,412252	11,118449	10,837950	10,569967	10,313762	10,068651	9,833998	9,609206	9,393723	9,187030
44	11,439864	11,143401	10,860505	10,590358	10,332203	10,085331	9,849089	9,622863	9,406084	9,198222
45	11,465312	11,166346	10,881197	10,609024	10,349043	10,100530	9,862808	9,635250	9,417271	9,208327
46	11,488767	11,187444	10,900181	10,626109	10,364423	10,114378	9,875280	9,646485	9,427394	9,217451
47	11,510384	11,206846	10,917597	10,641747	10,378469	10,126996	9,886618	9,656676	9,436556	9,225689
48	11,530308	11,224686	10,933575	10,656061	10,391296	10,138493	9,896926	9,665919	9,444847	9,233128
49	11,548671	11,241090	10,948234	10,669164	10,403010	10,148968	9,906296	9,674303	9,452350	9,239845
50	11,565595	11,256175	10,961683	10,681157	10,413707	10,158513	9,914814	9,681907	9,459140	9,245909

Table T. 4 **Valeur actuelle de n annuités constantes de 1 DH :** $\dfrac{1-(1+t)^{-n}}{t}$

n t	11,00%	11,25%	11,50%	11,75%	12,00%	12,25%	12,50%	12,75%	13,00%	13,25%
1	0,900901	0,898876	0,896861	0,894855	0,892857	0,890869	0,888889	0,886918	0,884956	0,883002
2	1,712523	1,706855	1,701221	1,695619	1,690051	1,684515	1,679012	1,673541	1,668102	1,662695
3	2,443715	2,433128	2,422619	2,412187	2,401831	2,391551	2,381344	2,371212	2,361153	2,351166
4	3,102446	3,085958	3,069614	3,053411	3,037349	3,021426	3,005639	2,989988	2,974471	2,959087
5	3,695897	3,672771	3,649878	3,627214	3,604776	3,582562	3,560568	3,538792	3,517231	3,495882
6	4,230538	4,200244	4,170294	4,140684	4,111407	4,082461	4,053839	4,025536	3,997550	3,969874
7	4,712196	4,674376	4,637035	4,600164	4,563757	4,527805	4,492301	4,457239	4,422610	4,388410
8	5,146123	5,100563	5,055637	5,011333	4,967640	4,924547	4,882045	4,840123	4,798770	4,757978
9	5,537048	5,483652	5,431064	5,379269	5,328250	5,277993	5,228485	5,179710	5,131655	5,084307
10	5,889232	5,828002	5,767771	5,708518	5,650223	5,592867	5,536431	5,480896	5,426243	5,372456
11	6,206515	6,137530	6,069750	6,003148	5,937699	5,873378	5,810161	5,748023	5,686941	5,626893
12	6,492356	6,415757	6,340583	6,266799	6,194374	6,123277	6,053476	5,984943	5,917647	5,851561
13	6,749870	6,665849	6,583482	6,502728	6,423548	6,345904	6,269757	6,195071	6,121812	6,049944
14	6,981865	6,890651	6,801329	6,713851	6,628168	6,544235	6,462006	6,381438	6,302488	6,225116
15	7,190870	7,092720	6,996708	6,902775	6,810864	6,720922	6,632894	6,546730	6,462379	6,379793
16	7,379162	7,274355	7,171935	7,071834	6,973986	6,878327	6,784795	6,693330	6,603875	6,516374
17	7,548794	7,437622	7,329090	7,223118	7,119630	7,018554	6,919818	6,823353	6,729093	6,636975
18	7,701617	7,584380	7,470036	7,358495	7,249670	7,143478	7,039838	6,938672	6,839905	6,743465
19	7,839294	7,716296	7,596445	7,479637	7,365777	7,254769	7,146523	7,040951	6,937969	6,837497
20	7,963328	7,834873	7,709816	7,588042	7,469444	7,353914	7,241353	7,131664	7,024752	6,920527
21	8,075070	7,941459	7,811494	7,685049	7,562003	7,442240	7,325647	7,212119	7,101550	6,993843
22	8,175739	8,037267	7,902685	7,771856	7,644646	7,520926	7,400575	7,283475	7,169513	7,058581
23	8,266432	8,123386	7,984471	7,849536	7,718434	7,591026	7,467178	7,346763	7,229658	7,115745
24	8,348137	8,200796	8,057822	7,919048	7,784316	7,653475	7,526381	7,402894	7,282883	7,166221

n t	13,50%	13,75%	14,00%	14,25%	14,50%	14,75%	15,00%	15,25%	15,50%	15,75%
1	0,881057	0,879121	0,877193	0,875274	0,873362	0,871460	0,869565	0,867679	0,865801	0,863931
2	1,657319	1,651974	1,646661	1,641377	1,636124	1,630902	1,625709	1,620546	1,615412	1,610307
3	2,341250	2,331406	2,321632	2,311928	2,302292	2,292725	2,283225	2,273792	2,264426	2,255125
4	2,943833	2,928709	2,913712	2,898843	2,884098	2,869477	2,854978	2,840601	2,826343	2,812203
5	3,474743	3,453810	3,433081	3,412554	3,392225	3,372093	3,352155	3,332408	3,312851	3,293480
6	3,942505	3,915437	3,888668	3,862191	3,836005	3,810103	3,784483	3,759140	3,734070	3,709270
7	4,354630	4,321263	4,288305	4,255747	4,223585	4,191811	4,160420	4,129405	4,098762	4,068484
8	4,717735	4,678034	4,638864	4,600217	4,562083	4,524454	4,487322	4,450677	4,414513	4,378820
9	5,037652	4,991678	4,946372	4,901721	4,857714	4,814339	4,771584	4,729438	4,687890	4,646929
10	5,319517	5,267409	5,216116	5,165620	5,115908	5,066962	5,018769	4,971313	4,924580	4,878556
11	5,567857	5,509810	5,452733	5,396604	5,341404	5,287113	5,233712	5,181182	5,129506	5,078666
12	5,786658	5,722910	5,660292	5,598778	5,538344	5,478965	5,420619	5,363282	5,306932	5,251547
13	5,979434	5,910251	5,842362	5,775736	5,710344	5,646157	5,583147	5,521286	5,460547	5,400905
14	6,149281	6,074946	6,002072	5,930622	5,860563	5,791858	5,724476	5,658382	5,593547	5,529939
15	6,298926	6,219732	6,142168	6,066190	5,991758	5,918831	5,847370	5,777338	5,708699	5,641416
16	6,430772	6,347018	6,265060	6,184849	6,106339	6,029482	5,954235	5,880554	5,808397	5,737725
17	6,546936	6,458917	6,372859	6,288708	6,206409	6,125910	6,047161	5,970112	5,894716	5,820928
18	6,649283	6,557289	6,467420	6,379613	6,293807	6,209944	6,127966	6,047819	5,969451	5,892811
19	6,739456	6,643771	6,550369	6,459180	6,370137	6,283175	6,198231	6,115245	6,034157	5,954912
20	6,818904	6,719798	6,623131	6,528823	6,436801	6,346994	6,259331	6,173748	6,090179	6,008563
21	6,888902	6,786636	6,686957	6,589779	6,495023	6,402609	6,312462	6,224510	6,138683	6,054914
22	6,950575	6,845394	6,742944	6,643133	6,545871	6,451075	6,358663	6,268555	6,180678	6,094958
23	7,004912	6,897050	6,792056	6,689832	6,590281	6,493312	6,398837	6,306773	6,217037	6,129554
24	7,052786	6,942461	6,835137	6,730706	6,629066	6,530119	6,433771	6,339933	6,248517	6,159442

Table T. 4 **Valeur actuelle de n annuités constantes de 1 DH :** $\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$

n t	16,00%	16,25%	16,50%	16,75%	17,00%	17,25%	17,50%	17,75%	18,00%	18,25%
1	0,862069	0,860215	0,858369	0,856531	0,854701	0,852878	0,851064	0,849257	0,847458	0,845666
2	1,605232	1,600185	1,595167	1,590176	1,585214	1,580280	1,575373	1,570494	1,565642	1,560817
3	2,245890	2,236718	2,227611	2,218567	2,209585	2,200665	2,191807	2,183010	2,174273	2,165596
4	2,798181	2,784274	2,770481	2,756802	2,743235	2,729779	2,716432	2,703193	2,690062	2,677037
5	3,274294	3,255289	3,236465	3,217818	3,199346	3,181048	3,162921	3,144962	3,127171	3,109545
6	3,684736	3,660464	3,636450	3,612692	3,589185	3,565926	3,542911	3,520138	3,497603	3,475302
7	4,038565	4,009001	3,979786	3,950914	3,922380	3,894180	3,866307	3,838758	3,811528	3,784611
8	4,343591	4,308818	4,274494	4,240611	4,207163	4,174140	4,141538	4,109349	4,077566	4,046182
9	4,606544	4,566725	4,527463	4,488746	4,450566	4,412913	4,375777	4,339150	4,303022	4,267385
10	4,833227	4,788581	4,744603	4,701282	4,658604	4,616557	4,575129	4,534310	4,494086	4,454448
11	5,028644	4,979424	4,930990	4,883325	4,836413	4,790240	4,744791	4,700051	4,656005	4,612641
12	5,197107	5,143591	5,090978	5,039250	4,988387	4,938371	4,889184	4,840807	4,793225	4,746419

n t	18,50%	18,75%	19,00%	19,25%	19,50%	19,75%	20,00%	20,25%	20,50%	20,75%
1	0,843882	0,842105	0,840336	0,838574	0,836820	0,835073	0,833333	0,831601	0,829876	0,828157
2	1,556018	1,551247	1,546501	1,541781	1,537088	1,532420	1,527778	1,523161	1,518569	1,514002
3	2,156978	2,148418	2,139917	2,131473	2,123086	2,114756	2,106481	2,098263	2,090099	2,081989
4	2,664116	2,651299	2,638586	2,625973	2,613461	2,601049	2,588735	2,576518	2,564397	2,552372
5	3,092081	3,074779	3,057635	3,040648	3,023817	3,007139	2,990612	2,974235	2,958006	2,941923
6	3,453233	3,431392	3,409777	3,388384	3,367211	3,346254	3,325510	3,304977	3,284652	3,264532
7	3,758003	3,731699	3,705695	3,679987	3,654570	3,629439	3,604592	3,580023	3,555728	3,531704
8	4,015192	3,984589	3,954366	3,924517	3,895037	3,865920	3,837160	3,808751	3,780687	3,752964
9	4,232230	4,197548	4,163332	4,129574	4,096266	4,063399	4,030967	3,998961	3,967375	3,936202
10	4,415384	4,376883	4,338935	4,301530	4,264657	4,228308	4,192472	4,157140	4,122303	4,087952
11	4,569944	4,527901	4,486500	4,445727	4,405571	4,366019	4,327060	4,288682	4,250874	4,213625
12	4,700375	4,655075	4,610504	4,566648	4,523490	4,481018	4,439217	4,398072	4,357572	4,317702

n t	21,00%	21,25%	21,50%	21,75%	22,00%	22,25%	22,50%	22,75%	23,00%	23,25%
1	0,826446	0,824742	0,823045	0,821355	0,819672	0,817996	0,816327	0,814664	0,813008	0,811359
2	1,509460	1,504942	1,500449	1,495980	1,491535	1,487113	1,482716	1,478341	1,473990	1,469662
3	2,073934	2,065932	2,057983	2,050086	2,042241	2,034448	2,026707	2,019015	2,011374	2,003783
4	2,540441	2,528603	2,516858	2,505204	2,493641	2,482166	2,470781	2,459483	2,448272	2,437146
5	2,925984	2,910188	2,894533	2,879018	2,863640	2,848398	2,833291	2,818316	2,803473	2,788760
6	3,244615	3,224898	3,205377	3,186052	3,166918	3,147974	3,129217	3,110644	3,092254	3,074044
7	3,507946	3,484452	3,461216	3,438235	3,415506	3,393026	3,370789	3,348794	3,327036	3,305513
8	3,725576	3,698517	3,671783	3,645368	3,619268	3,593477	3,567991	3,542806	3,517916	3,493317
9	3,905434	3,875065	3,845089	3,815497	3,786285	3,757445	3,728972	3,700860	3,673102	3,645693
10	4,054078	4,020673	3,987727	3,955234	3,923184	3,891571	3,860386	3,829621	3,799270	3,769325
11	4,176924	4,140761	4,105125	4,070007	4,035397	4,001285	3,967662	3,934518	3,901846	3,869635
12	4,278450	4,239803	4,201749	4,164277	4,127375	4,091031	4,055234	4,019974	3,985240	3,951022

Table T. 5 **Valeur des annuités qui amortissent un capital de 1 DH** $\dfrac{t}{1-(1+t)^{-n}}$

n t	0,05%	0,10%	0,20%	0,30%	0,40%	0,50%	0,60%	0,70%	0,80%	0,90%
1	1,000500	1,001000	1,002000	1,003000	1,004000	1,005000	1,006000	1,007000	1,008000	1,009000
2	0,500375	0,500750	0,501500	0,502251	0,503002	0,503753	0,504504	0,505256	0,506008	0,506760
3	0,333667	0,334000	0,334668	0,335335	0,336004	0,336672	0,337341	0,338011	0,338681	0,339351
4	0,250313	0,250625	0,251251	0,251878	0,252505	0,253133	0,253761	0,254390	0,255020	0,255650
5	0,200300	0,200600	0,201202	0,201804	0,202406	0,203010	0,203614	0,204220	0,204825	0,205432
6	0,166958	0,167250	0,167835	0,168421	0,169008	0,169595	0,170184	0,170774	0,171364	0,171956
7	0,143143	0,143429	0,144002	0,144577	0,145152	0,145729	0,146306	0,146885	0,147465	0,148046
8	0,125281	0,125563	0,126128	0,126693	0,127260	0,127829	0,128399	0,128970	0,129542	0,130115
9	0,111389	0,111667	0,112225	0,112784	0,113345	0,113907	0,114471	0,115036	0,115603	0,116171
10	0,100275	0,100551	0,101103	0,101657	0,102213	0,102771	0,103330	0,103890	0,104453	0,105017
11	0,091182	0,091455	0,092004	0,092554	0,093105	0,093659	0,094214	0,094772	0,095331	0,095891
12	0,083604	0,083876	0,084421	0,084967	0,085516	0,086066	0,086619	0,087173	0,087730	0,088288
13	0,077193	0,077463	0,078004	0,078548	0,079094	0,079642	0,080192	0,080745	0,081299	0,081856
14	0,071697	0,071965	0,072505	0,073046	0,073590	0,074136	0,074685	0,075235	0,075788	0,076344
15	0,066934	0,067201	0,067738	0,068278	0,068820	0,069364	0,069911	0,070461	0,071013	0,071567
16	0,062766	0,063033	0,063568	0,064106	0,064646	0,065189	0,065735	0,066284	0,066835	0,067388
17	0,059089	0,059354	0,059888	0,060424	0,060964	0,061506	0,062051	0,062598	0,063149	0,063702
18	0,055820	0,056085	0,056617	0,057152	0,057691	0,058232	0,058776	0,059323	0,059873	0,060426
19	0,052895	0,053159	0,053691	0,054225	0,054762	0,055303	0,055846	0,056393	0,056943	0,057496
20	0,050263	0,050527	0,051057	0,051590	0,052127	0,052666	0,053210	0,053756	0,054306	0,054859
21	0,047881	0,048145	0,048674	0,049206	0,049742	0,050282	0,050825	0,051371	0,051921	0,052474
22	0,045716	0,045979	0,046507	0,047039	0,047575	0,048114	0,048657	0,049203	0,049753	0,050307
23	0,043740	0,044002	0,044529	0,045061	0,045596	0,046135	0,046677	0,047224	0,047774	0,048328
24	0,041928	0,042189	0,042716	0,043247	0,043782	0,044321	0,044863	0,045410	0,045961	0,046515
25	0,040261	0,040522	0,041048	0,041579	0,042113	0,042652	0,043195	0,043742	0,044293	0,044848
26	0,038722	0,038983	0,039509	0,040039	0,040573	0,041112	0,041655	0,042202	0,042753	0,043309
27	0,037297	0,037558	0,038083	0,038613	0,039147	0,039686	0,040229	0,040776	0,041328	0,041885
28	0,035974	0,036234	0,036759	0,037289	0,037823	0,038362	0,038905	0,039453	0,040006	0,040563
29	0,034742	0,035002	0,035527	0,036056	0,036590	0,037129	0,037673	0,038221	0,038774	0,039332
30	0,033592	0,033852	0,034377	0,034906	0,035440	0,035979	0,036523	0,037072	0,037626	0,038184
31	0,032517	0,032777	0,033301	0,033830	0,034364	0,034903	0,035447	0,035997	0,036551	0,037111
32	0,031508	0,031768	0,032292	0,032821	0,033355	0,033895	0,034439	0,034989	0,035545	0,036105
33	0,030561	0,030821	0,031344	0,031873	0,032407	0,032947	0,033492	0,034043	0,034599	0,035161
34	0,029670	0,029929	0,030452	0,030981	0,031516	0,032056	0,032602	0,033153	0,033710	0,034272
35	0,028829	0,029089	0,029612	0,030140	0,030675	0,031215	0,031762	0,032314	0,032871	0,033435
36	0,028035	0,028295	0,028818	0,029346	0,029881	0,030422	0,030969	0,031521	0,032080	0,032644
37	0,027285	0,027544	0,028066	0,028595	0,029130	0,029671	0,030219	0,030772	0,031331	0,031897
38	0,026573	0,026832	0,027355	0,027884	0,028419	0,028960	0,029508	0,030062	0,030622	0,031189
39	0,025898	0,026157	0,026680	0,027209	0,027744	0,028286	0,028834	0,029389	0,029950	0,030518
40	0,025257	0,025516	0,026038	0,026567	0,027103	0,027646	0,028194	0,028750	0,029312	0,029881
41	0,024647	0,024906	0,025428	0,025958	0,026494	0,027036	0,027586	0,028142	0,028705	0,029275
42	0,024066	0,024325	0,024847	0,025377	0,025913	0,026456	0,027006	0,027563	0,028127	0,028698
43	0,023513	0,023771	0,024293	0,024823	0,025359	0,025903	0,026454	0,027012	0,027577	0,028149
44	0,022984	0,023242	0,023765	0,024294	0,024831	0,025375	0,025927	0,026485	0,027051	0,027624
45	0,022479	0,022737	0,023259	0,023789	0,024326	0,024871	0,025423	0,025983	0,026550	0,027124
46	0,021996	0,022254	0,022776	0,023306	0,023844	0,024389	0,024942	0,025502	0,026070	0,026645
47	0,021533	0,021791	0,022314	0,022844	0,023382	0,023927	0,024481	0,025042	0,025611	0,026187
48	0,021090	0,021348	0,021870	0,022401	0,022939	0,023485	0,024039	0,024601	0,025171	0,025749
49	0,020664	0,020922	0,021445	0,021975	0,022514	0,023061	0,023616	0,024179	0,024749	0,025328
50	0,020256	0,020514	0,021037	0,021567	0,022106	0,022654	0,023209	0,023773	0,024345	0,024925

Table T. 5 Valeur des annuités qui amortissent un capital de 1 DH $\frac{t}{1-(1+t)^{-n}}$

n t	1,00%	1,25%	1,50%	1,75%	2,00%	2,25%	2,50%	2,75%	3,00%	3,25%
1	1,010000	1,012500	1,015000	1,017500	1,020000	1,022500	1,025000	1,027500	1,030000	1,032500
2	0,507512	0,509394	0,511278	0,513163	0,515050	0,516938	0,518827	0,520718	0,522611	0,524505
3	0,340022	0,341701	0,343383	0,345067	0,346755	0,348445	0,350137	0,351832	0,353530	0,355231
4	0,256281	0,257861	0,259445	0,261032	0,262624	0,264219	0,265818	0,267421	0,269027	0,270637
5	0,206040	0,207562	0,209089	0,210621	0,212158	0,213700	0,215247	0,216798	0,218355	0,219916
6	0,172548	0,174034	0,175525	0,177023	0,178526	0,180035	0,181550	0,183071	0,184598	0,186130
7	0,148628	0,150089	0,151556	0,153031	0,154512	0,156000	0,157495	0,158997	0,160506	0,162022
8	0,130690	0,132133	0,133584	0,135043	0,136510	0,137985	0,139467	0,140958	0,142456	0,143963
9	0,116740	0,118171	0,119610	0,121058	0,122515	0,123982	0,125457	0,126941	0,128434	0,129936
10	0,105582	0,107003	0,108434	0,109875	0,111327	0,112788	0,114259	0,115740	0,117231	0,118731
11	0,096454	0,097868	0,099294	0,100730	0,102178	0,103636	0,105106	0,106586	0,108077	0,109579
12	0,088849	0,090258	0,091680	0,093114	0,094560	0,096017	0,097487	0,098969	0,100462	0,101967
13	0,082415	0,083821	0,085240	0,086673	0,088118	0,089577	0,091048	0,092533	0,094030	0,095539
14	0,076901	0,078305	0,079723	0,081156	0,082602	0,084062	0,085537	0,087025	0,088526	0,090042
15	0,072124	0,073526	0,074944	0,076377	0,077825	0,079289	0,080766	0,082259	0,083767	0,085289
16	0,067945	0,069347	0,070765	0,072200	0,073650	0,075117	0,076599	0,078097	0,079611	0,081140
17	0,064258	0,065660	0,067080	0,068516	0,069970	0,071440	0,072928	0,074432	0,075953	0,077490
18	0,060982	0,062385	0,063806	0,065245	0,066702	0,068177	0,069670	0,071181	0,072709	0,074254
19	0,058052	0,059455	0,060878	0,062321	0,063782	0,065262	0,066761	0,068278	0,069814	0,071368
20	0,055415	0,056820	0,058246	0,059691	0,061157	0,062642	0,064147	0,065672	0,067216	0,068779
21	0,053031	0,054437	0,055865	0,057315	0,058785	0,060276	0,061787	0,063319	0,064872	0,066444
22	0,050864	0,052272	0,053703	0,055156	0,056631	0,058128	0,059647	0,061186	0,062747	0,064329
23	0,048886	0,050297	0,051731	0,053188	0,054668	0,056171	0,057696	0,059244	0,060814	0,062406
24	0,047073	0,048487	0,049924	0,051386	0,052871	0,054380	0,055913	0,057469	0,059047	0,060649
25	0,045407	0,046822	0,048263	0,049730	0,051220	0,052736	0,054276	0,055840	0,057428	0,059039
26	0,043869	0,045287	0,046732	0,048203	0,049699	0,051221	0,052769	0,054341	0,055938	0,057560
27	0,042446	0,043867	0,045315	0,046791	0,048293	0,049822	0,051377	0,052958	0,054564	0,056196
28	0,041124	0,042549	0,044001	0,045482	0,046990	0,048525	0,050088	0,051677	0,053293	0,054935
29	0,039895	0,041322	0,042779	0,044264	0,045778	0,047321	0,048891	0,050489	0,052115	0,053767
30	0,038748	0,040179	0,041639	0,043130	0,044650	0,046199	0,047778	0,049384	0,051019	0,052682
31	0,037676	0,039109	0,040574	0,042070	0,043596	0,045153	0,046739	0,048355	0,049999	0,051672
32	0,036671	0,038108	0,039577	0,041078	0,042611	0,044174	0,045768	0,047393	0,049047	0,050730
33	0,035727	0,037168	0,038641	0,040148	0,041687	0,043257	0,044859	0,046493	0,048156	0,049850
34	0,034840	0,036284	0,037762	0,039274	0,040819	0,042397	0,044007	0,045649	0,047322	0,049026
35	0,034004	0,035451	0,036934	0,038451	0,040002	0,041587	0,043206	0,044856	0,046539	0,048253
36	0,033214	0,034665	0,036152	0,037675	0,039233	0,040825	0,042452	0,044111	0,045804	0,047528
37	0,032468	0,033923	0,035414	0,036943	0,038507	0,040106	0,041741	0,043410	0,045112	0,046846
38	0,031761	0,033220	0,034716	0,036250	0,037821	0,039428	0,041070	0,042748	0,044459	0,046204
39	0,031092	0,032554	0,034055	0,035594	0,037171	0,038785	0,040436	0,042123	0,043844	0,045599
40	0,030456	0,031921	0,033427	0,034972	0,036556	0,038177	0,039836	0,041532	0,043262	0,045028
41	0,029851	0,031321	0,032831	0,034382	0,035972	0,037601	0,039268	0,040972	0,042712	0,044488
42	0,029276	0,030749	0,032264	0,033821	0,035417	0,037054	0,038729	0,040442	0,042192	0,043978
43	0,028727	0,030205	0,031725	0,033287	0,034890	0,036534	0,038217	0,039939	0,041698	0,043494
44	0,028204	0,029686	0,031210	0,032778	0,034388	0,036039	0,037730	0,039461	0,041230	0,043036
45	0,027705	0,029190	0,030720	0,032293	0,033910	0,035568	0,037268	0,039007	0,040785	0,042601
46	0,027228	0,028717	0,030251	0,031830	0,033453	0,035119	0,036827	0,038575	0,040363	0,042188
47	0,026771	0,028264	0,029803	0,031388	0,033018	0,034691	0,036407	0,038164	0,039961	0,041796
48	0,026334	0,027831	0,029375	0,030966	0,032602	0,034282	0,036006	0,037772	0,039578	0,041423
49	0,025915	0,027416	0,028965	0,030561	0,032204	0,033892	0,035623	0,037398	0,039213	0,041068
50	0,025513	0,027018	0,028572	0,030174	0,031823	0,033518	0,035258	0,037041	0,038865	0,040730

Table T. 5 **Valeur des annuités qui amortissent un capital de 1 DH** $\frac{t}{1-(1+t)^{-n}}$

n t	3,50%	3,75%	4,00%	4,25%	4,50%	4,75%	5,00%	5,25%	5,50%	5,75%
1	1,035000	1,037500	1,040000	1,042500	1,045000	1,047500	1,050000	1,052500	1,055000	1,057500
2	0,526400	0,528298	0,530196	0,532096	0,533998	0,535900	0,537805	0,539711	0,541618	0,543527
3	0,356934	0,358640	0,360349	0,362060	0,363773	0,365490	0,367209	0,368930	0,370654	0,372381
4	0,272251	0,273869	0,275490	0,277115	0,278744	0,280376	0,282012	0,283651	0,285294	0,286941
5	0,221481	0,223052	0,224627	0,226207	0,227792	0,229381	0,230975	0,232573	0,234176	0,235784
6	0,187668	0,189212	0,190762	0,192317	0,193878	0,195445	0,197017	0,198595	0,200179	0,201768
7	0,163544	0,165074	0,166610	0,168152	0,169701	0,171257	0,172820	0,174389	0,175964	0,177546
8	0,145477	0,146998	0,148528	0,150065	0,151610	0,153162	0,154722	0,156289	0,157864	0,159446
9	0,131446	0,132965	0,134493	0,136029	0,137574	0,139128	0,140690	0,142261	0,143839	0,145427
10	0,120241	0,121761	0,123291	0,124830	0,126379	0,127937	0,129505	0,131082	0,132668	0,134263
11	0,111092	0,112615	0,114149	0,115693	0,117248	0,118813	0,120389	0,121975	0,123571	0,125177
12	0,103484	0,105012	0,106552	0,108103	0,109666	0,111240	0,112825	0,114422	0,116029	0,117648
13	0,097062	0,098596	0,100144	0,101703	0,103275	0,104860	0,106456	0,108064	0,109684	0,111316
14	0,091571	0,093113	0,094669	0,096238	0,097820	0,099416	0,101024	0,102645	0,104279	0,105926
15	0,086825	0,088376	0,089941	0,091520	0,093114	0,094721	0,096342	0,097977	0,099626	0,101288
16	0,082685	0,084245	0,085820	0,087410	0,089015	0,090635	0,092270	0,093919	0,095583	0,097260
17	0,079043	0,080613	0,082199	0,083800	0,085418	0,087051	0,088699	0,090363	0,092042	0,093736
18	0,075817	0,077397	0,078993	0,080607	0,082237	0,083883	0,085546	0,087225	0,088920	0,090630
19	0,072940	0,074531	0,076139	0,077764	0,079407	0,081068	0,082745	0,084439	0,086150	0,087877
20	0,070361	0,071962	0,073582	0,075220	0,076876	0,078550	0,080243	0,081952	0,083679	0,085423
21	0,068037	0,069649	0,071280	0,072931	0,074601	0,076289	0,077996	0,079721	0,081465	0,083226
22	0,065932	0,067555	0,069199	0,070862	0,072546	0,074248	0,075971	0,077712	0,079471	0,081249
23	0,064019	0,065653	0,067309	0,068986	0,070682	0,072400	0,074137	0,075894	0,077670	0,079465
24	0,062273	0,063919	0,065587	0,067276	0,068987	0,070719	0,072471	0,074243	0,076036	0,077848
25	0,060674	0,062332	0,064012	0,065715	0,067439	0,069185	0,070952	0,072741	0,074549	0,076378
26	0,059205	0,060875	0,062567	0,064283	0,066021	0,067782	0,069564	0,071368	0,073193	0,075039
27	0,057852	0,059533	0,061239	0,062967	0,064719	0,066494	0,068292	0,070111	0,071952	0,073814
28	0,056603	0,058295	0,060013	0,061755	0,063521	0,065310	0,067123	0,068957	0,070814	0,072693
29	0,055445	0,057150	0,058880	0,060635	0,062415	0,064218	0,066046	0,067896	0,069769	0,071663
30	0,054371	0,056088	0,057830	0,059598	0,061392	0,063209	0,065051	0,066917	0,068805	0,070716
31	0,053372	0,055100	0,056855	0,058637	0,060443	0,062276	0,064132	0,066013	0,067917	0,069843
32	0,052442	0,054181	0,055949	0,057743	0,059563	0,061409	0,063280	0,065176	0,067095	0,069038
33	0,051572	0,053324	0,055104	0,056911	0,058745	0,060605	0,062490	0,064400	0,066335	0,068292
34	0,050760	0,052523	0,054315	0,056135	0,057982	0,059856	0,061755	0,063680	0,065630	0,067603
35	0,049998	0,051773	0,053577	0,055410	0,057270	0,059158	0,061072	0,063011	0,064975	0,066963
36	0,049284	0,051071	0,052887	0,054732	0,056606	0,058507	0,060434	0,062388	0,064366	0,066369
37	0,048613	0,050411	0,052240	0,054097	0,055984	0,057898	0,059840	0,061807	0,063800	0,065817
38	0,047982	0,049792	0,051632	0,053502	0,055402	0,057329	0,059284	0,061265	0,063272	0,065303
39	0,047388	0,049209	0,051061	0,052944	0,054856	0,056796	0,058765	0,060759	0,062780	0,064825
40	0,046827	0,048659	0,050523	0,052418	0,054343	0,056297	0,058278	0,060286	0,062320	0,064379
41	0,046298	0,048142	0,050017	0,051924	0,053862	0,055828	0,057822	0,059844	0,061891	0,063963
42	0,045798	0,047653	0,049540	0,051459	0,053409	0,055388	0,057395	0,059429	0,061489	0,063574
43	0,045325	0,047191	0,049090	0,051021	0,052982	0,054974	0,056993	0,059040	0,061113	0,063211
44	0,044878	0,046754	0,048665	0,050607	0,052581	0,054584	0,056616	0,058676	0,060761	0,062872
45	0,044453	0,046341	0,048262	0,050217	0,052202	0,054218	0,056262	0,058333	0,060431	0,062554
46	0,044051	0,045949	0,047882	0,049848	0,051845	0,053872	0,055928	0,058012	0,060122	0,062256
47	0,043669	0,045578	0,047522	0,049499	0,051507	0,053546	0,055614	0,057710	0,059831	0,061978
48	0,043306	0,045226	0,047181	0,049169	0,051189	0,053239	0,055318	0,057425	0,059559	0,061716
49	0,042962	0,044892	0,046857	0,048856	0,050887	0,052949	0,055040	0,057158	0,059302	0,061471
50	0,042634	0,044574	0,046550	0,048560	0,050602	0,052675	0,054777	0,056906	0,059061	0,061241

Table T. 5 **Valeur des annuités qui amortissent un capital de 1 DH** $\dfrac{t}{1-(1+t)^{-n}}$

n t	6,00%	6,25%	6,50%	6,75%	7,00%	7,25%	7,50%	7,75%	8,00%	8,25%
1	1,060000	1,062500	1,065000	1,067500	1,070000	1,072500	1,075000	1,077500	1,080000	1,082500
2	0,545437	0,547348	0,549262	0,551176	0,553092	0,555009	0,556928	0,558848	0,560769	0,562692
3	0,374110	0,375841	0,377576	0,379312	0,381052	0,382793	0,384538	0,386284	0,388034	0,389785
4	0,288591	0,290245	0,291903	0,293564	0,295228	0,296896	0,298568	0,300242	0,301921	0,303603
5	0,237396	0,239013	0,240635	0,242260	0,243891	0,245525	0,247165	0,248808	0,250456	0,252109
6	0,203363	0,204963	0,206568	0,208179	0,209796	0,211418	0,213045	0,214677	0,216315	0,217959
7	0,179135	0,180730	0,182331	0,183939	0,185553	0,187174	0,188800	0,190433	0,192072	0,193718
8	0,161036	0,162633	0,164237	0,165849	0,167468	0,169094	0,170727	0,172367	0,174015	0,175669
9	0,147022	0,148626	0,150238	0,151858	0,153486	0,155123	0,156767	0,158419	0,160080	0,161748
10	0,135868	0,137482	0,139105	0,140737	0,142378	0,144027	0,145686	0,147353	0,149029	0,150714
11	0,126793	0,128419	0,130055	0,131701	0,133357	0,135022	0,136697	0,138382	0,140076	0,141780
12	0,119277	0,120917	0,122568	0,124230	0,125902	0,127585	0,129278	0,130981	0,132695	0,134419
13	0,112960	0,114616	0,116283	0,117961	0,119651	0,121352	0,123064	0,124788	0,126522	0,128267
14	0,107585	0,109257	0,110940	0,112637	0,114345	0,116065	0,117797	0,119541	0,121297	0,123064
15	0,102963	0,104651	0,106353	0,108067	0,109795	0,111535	0,113287	0,115052	0,116830	0,118619
16	0,098952	0,100658	0,102378	0,104111	0,105858	0,107618	0,109391	0,111178	0,112977	0,114789
17	0,095445	0,097168	0,098906	0,100659	0,102425	0,104206	0,106000	0,107808	0,109629	0,111464
18	0,092357	0,094098	0,095855	0,097626	0,099413	0,101214	0,103029	0,104859	0,106702	0,108559
19	0,089621	0,091380	0,093156	0,094947	0,096753	0,098574	0,100411	0,102262	0,104128	0,106007
20	0,087185	0,088962	0,090756	0,092567	0,094393	0,096235	0,098092	0,099965	0,101852	0,103754
21	0,085005	0,086800	0,088613	0,090443	0,092289	0,094151	0,096029	0,097923	0,099832	0,101756
22	0,083046	0,084860	0,086691	0,088540	0,090406	0,092288	0,094187	0,096102	0,098032	0,099978
23	0,081278	0,083111	0,084961	0,086829	0,088714	0,090616	0,092535	0,094471	0,096422	0,098389
24	0,079679	0,081529	0,083398	0,085284	0,087189	0,089111	0,091050	0,093006	0,094978	0,096966
25	0,078227	0,080095	0,081981	0,083887	0,085811	0,087752	0,089711	0,091686	0,093679	0,095687
26	0,076904	0,078790	0,080695	0,082619	0,084561	0,086521	0,088500	0,090495	0,092507	0,094536
27	0,075697	0,077600	0,079523	0,081465	0,083426	0,085405	0,087402	0,089417	0,091448	0,093496
28	0,074593	0,076513	0,078453	0,080413	0,082392	0,084390	0,086405	0,088438	0,090489	0,092556
29	0,073580	0,075517	0,077474	0,079452	0,081449	0,083464	0,085498	0,087550	0,089619	0,091704
30	0,072649	0,074603	0,076577	0,078572	0,080586	0,082620	0,084671	0,086741	0,088827	0,090931
31	0,071792	0,073763	0,075754	0,077766	0,079797	0,081847	0,083916	0,086003	0,088107	0,090228
32	0,071002	0,072989	0,074997	0,077025	0,079073	0,081140	0,083226	0,085330	0,087451	0,089589
33	0,070273	0,072275	0,074299	0,076344	0,078408	0,080492	0,082594	0,084714	0,086852	0,089006
34	0,069598	0,071617	0,073656	0,075716	0,077797	0,079896	0,082015	0,084151	0,086304	0,088474
35	0,068974	0,071007	0,073062	0,075138	0,077234	0,079349	0,081483	0,083635	0,085803	0,087988
36	0,068395	0,070443	0,072513	0,074604	0,076715	0,078846	0,080994	0,083161	0,085345	0,087545
37	0,067857	0,069921	0,072005	0,074111	0,076237	0,078382	0,080545	0,082726	0,084924	0,087139
38	0,067358	0,069436	0,071535	0,073655	0,075795	0,077954	0,080132	0,082327	0,084539	0,086767
39	0,066894	0,068985	0,071099	0,073233	0,075387	0,077560	0,079751	0,081960	0,084185	0,086426
40	0,066462	0,068567	0,070694	0,072842	0,075009	0,077196	0,079400	0,081622	0,083860	0,086114
41	0,066059	0,068177	0,070318	0,072479	0,074660	0,076859	0,079077	0,081311	0,083561	0,085827
42	0,065683	0,067815	0,069968	0,072142	0,074336	0,076548	0,078778	0,081024	0,083287	0,085564
43	0,065333	0,067478	0,069644	0,071830	0,074036	0,076260	0,078502	0,080760	0,083034	0,085323
44	0,065006	0,067163	0,069341	0,071540	0,073758	0,075994	0,078247	0,080517	0,082802	0,085101
45	0,064700	0,066869	0,069060	0,071270	0,073500	0,075747	0,078011	0,080292	0,082587	0,084897
46	0,064415	0,066596	0,068797	0,071019	0,073260	0,075518	0,077794	0,080084	0,082390	0,084709
47	0,064148	0,066340	0,068553	0,070786	0,073037	0,075306	0,077592	0,079893	0,082208	0,084537
48	0,063898	0,066101	0,068325	0,070569	0,072831	0,075110	0,077405	0,079716	0,082040	0,084378
49	0,063664	0,065878	0,068112	0,070366	0,072639	0,074928	0,077232	0,079552	0,081886	0,084232
50	0,063444	0,065669	0,067914	0,070178	0,072460	0,074758	0,077072	0,079401	0,081743	0,084097

Table T. 5 Valeur des annuités qui amortissent un capital de 1 DH $\frac{t}{1-(1+t)^{-n}}$

n t	8,50%	8,75%	9,00%	9,25%	9,50%	9,75%	10,00%	10,25%	10,50%	10,75%
1	1,085000	1,087500	1,090000	1,092500	1,095000	1,097500	1,100000	1,102500	1,105000	1,107500
2	0,564616	0,566542	0,568469	0,570397	0,572327	0,574258	0,576190	0,578124	0,580059	0,581996
3	0,391539	0,393296	0,395055	0,396816	0,398580	0,400346	0,402115	0,403886	0,405659	0,407435
4	0,305288	0,306977	0,308669	0,310364	0,312063	0,313765	0,315471	0,317180	0,318892	0,320608
5	0,253766	0,255427	0,257092	0,258762	0,260436	0,262115	0,263797	0,265484	0,267175	0,268871
6	0,219607	0,221261	0,222920	0,224584	0,226253	0,227928	0,229607	0,231292	0,232982	0,234677
7	0,195369	0,197027	0,198691	0,200360	0,202036	0,203718	0,205405	0,207099	0,208799	0,210504
8	0,177331	0,178999	0,180674	0,182357	0,184046	0,185741	0,187444	0,189153	0,190869	0,192592
9	0,163424	0,165107	0,166799	0,168498	0,170205	0,171919	0,173641	0,175370	0,177106	0,178850
10	0,152408	0,154110	0,155820	0,157539	0,159266	0,161002	0,162745	0,164497	0,166257	0,168025
11	0,143493	0,145215	0,146947	0,148687	0,150437	0,152196	0,153963	0,155740	0,157525	0,159319
12	0,136153	0,137897	0,139651	0,141414	0,143188	0,144971	0,146763	0,148565	0,150377	0,152197
13	0,130023	0,131789	0,133567	0,135354	0,137152	0,138960	0,140779	0,142607	0,144445	0,146293
14	0,124842	0,126632	0,128433	0,130245	0,132068	0,133902	0,135746	0,137601	0,139467	0,141342
15	0,120420	0,122234	0,124059	0,125896	0,127744	0,129603	0,131474	0,133355	0,135248	0,137151
16	0,116614	0,118451	0,120300	0,122161	0,124035	0,125920	0,127817	0,129725	0,131644	0,133575
17	0,113312	0,115173	0,117046	0,118932	0,120831	0,122741	0,124664	0,126599	0,128545	0,130503
18	0,110430	0,112315	0,114212	0,116123	0,118046	0,119982	0,121930	0,123891	0,125863	0,127847
19	0,107901	0,109809	0,111730	0,113665	0,115613	0,117574	0,119547	0,121533	0,123531	0,125541
20	0,105671	0,107602	0,109546	0,111505	0,113477	0,115462	0,117460	0,119470	0,121493	0,123528
21	0,103695	0,105649	0,107617	0,109598	0,111594	0,113602	0,115624	0,117659	0,119707	0,121766
22	0,101939	0,103915	0,105905	0,107909	0,109928	0,111960	0,114005	0,116063	0,118134	0,120218
23	0,100372	0,102370	0,104382	0,106409	0,108449	0,110504	0,112572	0,114653	0,116747	0,118853
24	0,098970	0,100989	0,103023	0,105071	0,107134	0,109210	0,111300	0,113403	0,115519	0,117647
25	0,097712	0,099751	0,101806	0,103876	0,105959	0,108057	0,110168	0,112292	0,114429	0,116579
26	0,096580	0,098640	0,100715	0,102805	0,104909	0,107027	0,109159	0,111304	0,113461	0,115631
27	0,095560	0,097640	0,099735	0,101845	0,103969	0,106106	0,108258	0,110422	0,112599	0,114788
28	0,094639	0,096738	0,098852	0,100981	0,103124	0,105281	0,107451	0,109634	0,111830	0,114038
29	0,093806	0,095923	0,098056	0,100203	0,102364	0,104540	0,106728	0,108929	0,111143	0,113368
30	0,093051	0,095186	0,097336	0,099501	0,101681	0,103873	0,106079	0,108298	0,110528	0,112771
31	0,092365	0,094518	0,096686	0,098868	0,101064	0,103274	0,105496	0,107731	0,109978	0,112237
32	0,091742	0,093912	0,096096	0,098295	0,100507	0,102733	0,104972	0,107222	0,109485	0,111759
33	0,091176	0,093361	0,095562	0,097776	0,100004	0,102246	0,104499	0,106765	0,109042	0,111331
34	0,090660	0,092861	0,095077	0,097306	0,099549	0,101805	0,104074	0,106354	0,108645	0,110947
35	0,090189	0,092405	0,094636	0,096880	0,099138	0,101408	0,103690	0,105983	0,108288	0,110603
36	0,089760	0,091990	0,094235	0,096493	0,098764	0,101048	0,103343	0,105649	0,107967	0,110294
37	0,089368	0,091612	0,093870	0,096142	0,098426	0,100722	0,103030	0,105349	0,107677	0,110016
38	0,089010	0,091267	0,093538	0,095822	0,098119	0,100427	0,102747	0,105077	0,107417	0,109767
39	0,088682	0,090952	0,093236	0,095532	0,097840	0,100160	0,102491	0,104832	0,107183	0,109543
40	0,088382	0,090664	0,092960	0,095267	0,097587	0,099918	0,102259	0,104611	0,106971	0,109341
41	0,088107	0,090401	0,092708	0,095027	0,097357	0,099698	0,102050	0,104411	0,106781	0,109159
42	0,087856	0,090161	0,092478	0,094808	0,097148	0,099499	0,101860	0,104230	0,106609	0,108996
43	0,087625	0,089941	0,092268	0,094608	0,096958	0,099318	0,101688	0,104067	0,106454	0,108849
44	0,087414	0,089739	0,092077	0,094426	0,096785	0,099154	0,101532	0,103919	0,106314	0,108717
45	0,087220	0,089555	0,091902	0,094259	0,096627	0,099005	0,101391	0,103786	0,106188	0,108597
46	0,087042	0,089386	0,091742	0,094108	0,096484	0,098869	0,101263	0,103665	0,106074	0,108490
47	0,086878	0,089231	0,091595	0,093970	0,096353	0,098746	0,101147	0,103555	0,105971	0,108393
48	0,086728	0,089089	0,091461	0,093843	0,096234	0,098634	0,101041	0,103456	0,105878	0,108306
49	0,086590	0,088959	0,091339	0,093728	0,096126	0,098532	0,100946	0,103367	0,105794	0,108227
50	0,086463	0,088840	0,091227	0,093623	0,096027	0,098440	0,100859	0,103285	0,105718	0,108156

Table T. 5 **Valeur des annuités qui amortissent un capital de 1 DH** $\frac{t}{1-(1+t)^{-n}}$

n t	11,00%	11,25%	11,50%	11,75%	12,00%	12,25%	12,50%	12,75%	13,00%	13,25%
1	1,110000	1,112500	1,115000	1,117500	1,120000	1,122500	1,125000	1,127500	1,130000	1,132500
2	0,583934	0,585873	0,587813	0,589755	0,591698	0,593643	0,595588	0,597535	0,599484	0,601433
3	0,409213	0,410994	0,412776	0,414562	0,416349	0,418139	0,419931	0,421725	0,423522	0,425321
4	0,322326	0,324048	0,325774	0,327503	0,329234	0,330970	0,332708	0,334449	0,336194	0,337942
5	0,270570	0,272274	0,273982	0,275694	0,277410	0,279130	0,280854	0,282582	0,284315	0,286051
6	0,236377	0,238081	0,239791	0,241506	0,243226	0,244950	0,246680	0,248414	0,250153	0,251897
7	0,212215	0,213932	0,215655	0,217384	0,219118	0,220858	0,222603	0,224354	0,226111	0,227873
8	0,194321	0,196057	0,197799	0,199548	0,201303	0,203064	0,204832	0,206606	0,208387	0,210173
9	0,180602	0,182360	0,184126	0,185899	0,187679	0,189466	0,191260	0,193061	0,194869	0,196684
10	0,169801	0,171585	0,173377	0,175177	0,176984	0,178799	0,180622	0,182452	0,184290	0,186135
11	0,161121	0,162932	0,164751	0,166579	0,168415	0,170260	0,172112	0,173973	0,175841	0,177718
12	0,154027	0,155866	0,157714	0,159571	0,161437	0,163311	0,165194	0,167086	0,168986	0,170895
13	0,148151	0,150018	0,151895	0,153782	0,155677	0,157582	0,159496	0,161419	0,163350	0,165291
14	0,143228	0,145124	0,147030	0,148946	0,150871	0,152806	0,154751	0,156704	0,158667	0,160640
15	0,139065	0,140990	0,142924	0,144869	0,146824	0,148789	0,150764	0,152748	0,154742	0,156745
16	0,135517	0,137469	0,139432	0,141406	0,143390	0,145384	0,147388	0,149402	0,151426	0,153460
17	0,132471	0,134452	0,136443	0,138444	0,140457	0,142479	0,144512	0,146556	0,148608	0,150671
18	0,129843	0,131850	0,133868	0,135897	0,137937	0,139988	0,142049	0,144120	0,146201	0,148292
19	0,127563	0,129596	0,131641	0,133696	0,135763	0,137840	0,139928	0,142026	0,144134	0,146252
20	0,125576	0,127634	0,129705	0,131786	0,133879	0,135982	0,138096	0,140220	0,142354	0,144498
21	0,123838	0,125921	0,128016	0,130123	0,132240	0,134368	0,136507	0,138656	0,140814	0,142983
22	0,122313	0,124420	0,126539	0,128669	0,130811	0,132962	0,135125	0,137297	0,139479	0,141672
23	0,120971	0,123101	0,125243	0,127396	0,129560	0,131735	0,133919	0,136114	0,138319	0,140533
24	0,119787	0,121939	0,124103	0,126278	0,128463	0,130660	0,132866	0,135082	0,137308	0,139544

n t	13,50%	13,75%	14,00%	14,25%	14,50%	14,75%	15,00%	15,25%	15,50%	15,75%
1	1,135000	1,137500	1,140000	1,142500	1,145000	1,147500	1,150000	1,152500	1,155000	1,157500
2	0,603384	0,605336	0,607290	0,609244	0,611200	0,613158	0,615116	0,617076	0,619037	0,620999
3	0,427122	0,428926	0,430731	0,432539	0,434350	0,436162	0,437977	0,439794	0,441613	0,443434
4	0,339693	0,341447	0,343205	0,344965	0,346729	0,348496	0,350265	0,352038	0,353814	0,355593
5	0,287791	0,289535	0,291284	0,293036	0,294792	0,296552	0,298316	0,300083	0,301855	0,303630
6	0,253646	0,255399	0,257157	0,258920	0,260688	0,262460	0,264237	0,266018	0,267804	0,269595
7	0,229641	0,231414	0,233192	0,234976	0,236766	0,238560	0,240360	0,242166	0,243976	0,245792
8	0,211966	0,213765	0,215570	0,217381	0,219198	0,221021	0,222850	0,224685	0,226526	0,228372
9	0,198505	0,200333	0,202168	0,204010	0,205858	0,207713	0,209574	0,211442	0,213316	0,215196
10	0,187987	0,189847	0,191714	0,193588	0,195469	0,197357	0,199252	0,201154	0,203063	0,204979
11	0,179602	0,181494	0,183394	0,185302	0,187217	0,189139	0,191069	0,193006	0,194951	0,196902
12	0,172811	0,174736	0,176669	0,178610	0,180559	0,182516	0,184481	0,186453	0,188433	0,190420
13	0,167240	0,169198	0,171164	0,173138	0,175121	0,177112	0,179110	0,181117	0,183132	0,185154
14	0,162621	0,164611	0,166609	0,168616	0,170632	0,172656	0,174688	0,176729	0,178777	0,180834
15	0,158757	0,160779	0,162809	0,164848	0,166896	0,168952	0,171017	0,173090	0,175171	0,177260
16	0,155502	0,157554	0,159615	0,161685	0,163764	0,165852	0,167948	0,170052	0,172165	0,174285
17	0,152743	0,154825	0,156915	0,159015	0,161124	0,163241	0,165367	0,167501	0,169643	0,171794
18	0,150392	0,152502	0,154621	0,156749	0,158886	0,161032	0,163186	0,165349	0,167520	0,169698
19	0,148380	0,150517	0,152663	0,154818	0,156982	0,159155	0,161336	0,163526	0,165723	0,167929
20	0,146651	0,148814	0,150986	0,153167	0,155357	0,157555	0,159761	0,161976	0,164199	0,166429
21	0,145161	0,147348	0,149545	0,151750	0,153964	0,156186	0,158417	0,160655	0,162901	0,165155
22	0,143873	0,146084	0,148303	0,150531	0,152768	0,155013	0,157266	0,159526	0,161795	0,164070
23	0,142757	0,144990	0,147231	0,149481	0,151739	0,154005	0,156278	0,158560	0,160848	0,163144
24	0,141788	0,144041	0,146303	0,148573	0,150851	0,153137	0,155430	0,157730	0,160038	0,162352

Table T. 5 **Valeur des annuités qui amortissent un capital de 1 DH** $\frac{t}{1-(1+t)^{-n}}$

n t	16,00%	16,25%	16,50%	16,75%	17,00%	17,25%	17,50%	17,75%	18,00%	18,25%
1	1,160000	1,162500	1,165000	1,167500	1,170000	1,172500	1,175000	1,177500	1,180000	1,182500
2	0,622963	0,624928	0,626894	0,628861	0,630829	0,632799	0,634770	0,636742	0,638716	0,640690
3	0,445258	0,447084	0,448911	0,450741	0,452574	0,454408	0,456245	0,458083	0,459924	0,461767
4	0,357375	0,359160	0,360948	0,362739	0,364533	0,366330	0,368130	0,369933	0,371739	0,373547
5	0,305409	0,307192	0,308979	0,310770	0,312564	0,314362	0,316163	0,317969	0,319778	0,321590
6	0,271390	0,273189	0,274993	0,276802	0,278615	0,280432	0,282254	0,284080	0,285910	0,287745
7	0,247613	0,249439	0,251270	0,253106	0,254947	0,256793	0,258645	0,260501	0,262362	0,264228
8	0,230224	0,232082	0,233946	0,235815	0,237690	0,239570	0,241456	0,243348	0,245244	0,247147
9	0,217082	0,218975	0,220874	0,222779	0,224691	0,226608	0,228531	0,230460	0,232395	0,234336
10	0,206901	0,208830	0,210766	0,212708	0,214657	0,216612	0,218573	0,220541	0,222515	0,224495
11	0,198861	0,200826	0,202799	0,204779	0,206765	0,208758	0,210757	0,212764	0,214776	0,216796
12	0,192415	0,194417	0,196426	0,198442	0,200466	0,202496	0,204533	0,206577	0,208628	0,210685

n t	18,50%	18,75%	19,00%	19,25%	19,50%	19,75%	20,00%	20,25%	20,50%	20,75%
1	1,185000	1,187500	1,190000	1,192500	1,195000	1,197500	1,200000	1,202500	1,205000	1,207500
2	0,642666	0,644643	0,646621	0,648600	0,650581	0,652563	0,654545	0,656530	0,658515	0,660501
3	0,463612	0,465459	0,467308	0,469159	0,471012	0,472868	0,474725	0,476585	0,478446	0,480310
4	0,375359	0,377174	0,378991	0,380811	0,382634	0,384460	0,386289	0,388121	0,389955	0,391792
5	0,323407	0,325227	0,327050	0,328877	0,330708	0,332542	0,334380	0,336221	0,338066	0,339914
6	0,289584	0,291427	0,293274	0,295126	0,296982	0,298842	0,300706	0,302574	0,304446	0,306323
7	0,266099	0,267974	0,269855	0,271740	0,273630	0,275525	0,277424	0,279328	0,281236	0,283149
8	0,249054	0,250967	0,252885	0,254808	0,256737	0,258671	0,260609	0,262553	0,264502	0,266456
9	0,236282	0,238234	0,240192	0,242156	0,244125	0,246099	0,248079	0,250065	0,252056	0,254052
10	0,226481	0,228473	0,230471	0,232475	0,234485	0,236501	0,238523	0,240550	0,242583	0,244621
11	0,218821	0,220853	0,222891	0,224935	0,226985	0,229042	0,231104	0,233172	0,235246	0,237325
12	0,212749	0,214819	0,216896	0,218979	0,221068	0,223164	0,225265	0,227372	0,229486	0,231605

n t	21,00%	21,25%	21,50%	21,75%	22,00%	22,25%	22,50%	22,75%	23,00%	23,25%
1	1,210000	1,212500	1,215000	1,217500	1,220000	1,222500	1,225000	1,227500	1,230000	1,232500
2	0,662489	0,664477	0,666467	0,668458	0,670450	0,672444	0,674438	0,676434	0,678430	0,680428
3	0,482175	0,484043	0,485913	0,487784	0,489658	0,491534	0,493411	0,495291	0,497173	0,499056
4	0,393632	0,395475	0,397321	0,399169	0,401020	0,402874	0,404730	0,406590	0,408451	0,410316
5	0,341765	0,343620	0,345479	0,347341	0,349206	0,351075	0,352947	0,354822	0,356700	0,358582
6	0,308203	0,310087	0,311976	0,313868	0,315764	0,317665	0,319569	0,321477	0,323389	0,325304
7	0,285067	0,286989	0,288916	0,290847	0,292782	0,294722	0,296666	0,298615	0,300568	0,302525
8	0,268415	0,270379	0,272347	0,274321	0,276299	0,278282	0,280270	0,282262	0,284259	0,286261
9	0,256053	0,258060	0,260072	0,262089	0,264111	0,266138	0,268170	0,270207	0,272249	0,274296
10	0,246665	0,248715	0,250769	0,252830	0,254895	0,256966	0,259041	0,261122	0,263208	0,265299
11	0,239411	0,241502	0,243598	0,245700	0,247807	0,249920	0,252038	0,254161	0,256289	0,258422
12	0,233730	0,235860	0,237996	0,240138	0,242285	0,244437	0,246595	0,248758	0,250926	0,253099

Table T. 6 **Taux annuels(t_a) et taux mensuels(t_m), trimestriels(t_t), quadrimestriels (t_q) et semestriels(t_s) correspondants**

Taux mensuel : $t_m = (1+t_a)^{(1/12)} - 1$
Taux trimestriel : $t_t = (1+t_a)^{(1/4)} - 1$
Taux quadrimestriel : $t_q = (1+t_a)^{(1/3)} - 1$
Taux semestriel : $t_s = (1+t_a)^{(1/2)} - 1$

ta	t_m	t_{3m}	t_{4m}	t_{6m}
1,00%	0,000830	0,002491	0,003322	0,004988
1,25%	0,001036	0,003110	0,004149	0,006231
1,50%	0,001241	0,003729	0,004975	0,007472
1,75%	0,001447	0,004347	0,005800	0,008712
2,00%	0,001652	0,004963	0,006623	0,009950
2,25%	0,001856	0,005578	0,007444	0,011187
2,50%	0,002060	0,006192	0,008265	0,012423
2,75%	0,002263	0,006805	0,009084	0,013657
3,00%	0,002466	0,007417	0,009902	0,014889
3,25%	0,002669	0,008028	0,010718	0,016120
3,50%	0,002871	0,008637	0,011533	0,017349
3,75%	0,003073	0,009246	0,012347	0,018577
4,00%	0,003274	0,009853	0,013159	0,019804
4,25%	0,003474	0,010460	0,013971	0,021029
4,50%	0,003675	0,011065	0,014780	0,022252
4,75%	0,003875	0,011669	0,015589	0,023474
5,00%	0,004074	0,012272	0,016396	0,024695
5,25%	0,004273	0,012874	0,017202	0,025914
5,50%	0,004472	0,013475	0,018007	0,027132
5,75%	0,004670	0,014075	0,018811	0,028348
6,00%	0,004868	0,014674	0,019613	0,029563
6,25%	0,005065	0,015272	0,020414	0,030776
6,50%	0,005262	0,015868	0,021213	0,031988
6,75%	0,005458	0,016464	0,022012	0,033199
7,00%	0,005654	0,017059	0,022809	0,034408
7,25%	0,005850	0,017652	0,023605	0,035616
7,50%	0,006045	0,018245	0,024400	0,036822
7,75%	0,006240	0,018836	0,025193	0,038027
8,00%	0,006434	0,019427	0,025986	0,039230
8,25%	0,006628	0,020016	0,026777	0,040433
8,50%	0,006821	0,020604	0,027566	0,041633
8,75%	0,007015	0,021192	0,028355	0,042833
9,00%	0,007207	0,021778	0,029142	0,044031
9,25%	0,007400	0,022364	0,029929	0,045227
9,50%	0,007592	0,022948	0,030714	0,046422
9,75%	0,007783	0,023531	0,031497	0,047616
10,00%	0,007974	0,024114	0,032280	0,048809
10,25%	0,008165	0,024695	0,033062	0,050000
10,50%	0,008355	0,025275	0,033842	0,051190
10,75%	0,008545	0,025855	0,034621	0,052378
11,00%	0,008735	0,026433	0,035399	0,053565
11,25%	0,008924	0,027011	0,036176	0,054751
11,50%	0,009112	0,027587	0,036951	0,055936
11,75%	0,009301	0,028163	0,037726	0,057119
12,00%	0,009489	0,028737	0,038499	0,058301

ta	t_m	t_{3m}	t_{4m}	t_{6m}
12,25%	0,009676	0,029311	0,039271	0,059481
12,50%	0,009864	0,029884	0,040042	0,060660
12,75%	0,010050	0,030455	0,040812	0,061838
13,00%	0,010237	0,031026	0,041580	0,063015
13,25%	0,010423	0,031596	0,042348	0,064190
13,50%	0,010609	0,032165	0,043114	0,065364
13,75%	0,010794	0,032733	0,043880	0,066536
14,00%	0,010979	0,033299	0,044644	0,067708
14,25%	0,011163	0,033866	0,045407	0,068878
14,50%	0,011348	0,034431	0,046169	0,070047
14,75%	0,011531	0,034995	0,046930	0,071214
15,00%	0,011715	0,035558	0,047690	0,072381
15,25%	0,011898	0,036120	0,048448	0,073546
15,50%	0,012081	0,036682	0,049206	0,074709
15,75%	0,012263	0,037242	0,049962	0,075872
16,00%	0,012445	0,037802	0,050718	0,077033
16,25%	0,012627	0,038361	0,051472	0,078193
16,50%	0,012808	0,038919	0,052225	0,079352
16,75%	0,012989	0,039475	0,052977	0,080509
17,00%	0,013170	0,040031	0,053728	0,081665
17,25%	0,013350	0,040587	0,054478	0,082820
17,50%	0,013530	0,041141	0,055227	0,083974
17,75%	0,013709	0,041694	0,055975	0,085127
18,00%	0,013888	0,042247	0,056722	0,086278
18,25%	0,014067	0,042798	0,057468	0,087428
18,50%	0,014246	0,043349	0,058212	0,088577
18,75%	0,014424	0,043899	0,058956	0,089725
19,00%	0,014602	0,044448	0,059699	0,090871
19,25%	0,014779	0,044996	0,060440	0,092016
19,50%	0,014956	0,045543	0,061181	0,093161
19,75%	0,015133	0,046090	0,061920	0,094303
20,00%	0,015309	0,046635	0,062659	0,095445
20,25%	0,015486	0,047180	0,063396	0,096586
20,50%	0,015661	0,047724	0,064132	0,097725
20,75%	0,015837	0,048267	0,064868	0,098863
21,00%	0,016012	0,048809	0,065602	0,100000
21,25%	0,016187	0,049350	0,066336	0,101136
21,50%	0,016361	0,049891	0,067068	0,102270
21,75%	0,016535	0,050430	0,067799	0,103404
22,00%	0,016709	0,050969	0,068530	0,104536
22,25%	0,016882	0,051507	0,069259	0,105667
22,50%	0,017056	0,052044	0,069987	0,106797
22,75%	0,017228	0,052581	0,070715	0,107926
23,00%	0,017401	0,053116	0,071441	0,109054
23,25%	0,017573	0,053651	0,072167	0,110180

BIBLIOGRAPHIE

TITRES	AUTEUR	**EDITION**
Comment évaluer la rentabilité des investissements ?	**B. ABLEY / P. ROBEN**	CLET 89
Comprendre les mathématiques financières	**D. SCHLACTHER**	HACHETTE SUP
Mathématiques financières	**C. D. CRAPSKY**	BREAL 96
Mathématiques financières	E. FAVRO	DUNOD 91
Mathématiques financières	**K. LOUINEAU**	DUNOD 92
Mathématiques financières	K. LOUINEAU	DUNOD 92
Mathématiques financières	P. BONNEAU	DUNOD 88
Mathématiques financières	**W. MACIERI**	SIREY
Mathématiques financières	**W. O'SHAUGHNESS**	SMG 91
Mathématiques financières	**E. FAVRO**	DUNOD 91
Mathématiques financières : corrigés	**M. CHAHIB**	FOUCHER 97
Mathématiques financières : cours-exercices	**M. CHAHIB**	FOUCHER 97
Mathématiques financières et recherche opérationnelle en techniques quantitatives de gestion	**C. MAURICE BAUMONT**	ELLIPSES 90
Mathématiques financières : exercices corrigés (avec rappels de cours)	**M. BOISSONNADE**	DUNOD 99
Mathématiques financières : sujets et corrigés	**M. CHAHIB**	FOUCHER 97
Mathématiques financières : travaux pratiques énoncés et solutions	**W. MACIERI**	**SIREY**

LISTE DES LIVRES CO-EDITES PAR IGA ET TOUBKAL

Les livres co-édités par l'IGA et les éditions TOUBKAL sont offerts gratuitement, au début de chaque année universitaire, aux étudiants de l'IGA.

Ces livres sont disponibles dans toutes les librairies spécialistes des livres universitaires.

Auteurs	Titres des livres
A. Elmarhoum	Analyse des données
A. Elmarhoum & M. Diouri	Statistiques descriptives
A. Elmarhoum & M. Diouri	Statistique descriptive (cours et exercices)
A. Elmarhoum & M. Diouri	Probabilités
A. Elmarhoum & M. Diouri	Statistiques décisionnelles
A. Enasri	Ingénierie financière (évaluation des actifs financiers)
B. Alhamany	Comptabilité générale
B. Alhamany	Comptabilité générale (cours et exercices)
B. Alhamany & B. ElIbrahimi	Lexique juridique de la société anonyme en droit marocain
B. Alhamany & M. Diouri	Comptabilité analytique
B. Alhamany, B. ElIbrahimi & M. Diouri	EPG Encyclopédie Pratique de Gestion
B. Dinar	Economie internationale
B. ElIbrahimi	Fiscalité d'entreprise
C.R.IGA*	Plan comptable marocain
C.R.IGA	Génie informatique
C.R.IGA	Manuel des caractéristiques des circuits intégrés
C.R.IGA	Génie électronique
C.R.IGA	Tables statistiques et financières
Collectif d'auteurs	Encyclopédie Pratique d'Informatique pour Manager

* C.R.IGA : Comité de Rédaction IGA composé d'un ensemble de responsables pédagogiques de l'IGA.

LISTE DES LIVRES CO-EDITES PAR IGA ET TOUBKAL (suite)

Auteurs	Titres des livres
E. Labriji & M. Rachik	Mathématiques supérieures
E. Labriji & M. Rachik	Analyse de Fourrier
E. Labriji, M. Diouri & M. Rachik	Algèbre 1 et 2
IGA	Olympiades d'informatiques
K. Mansouri	Algorithmique et techniques de programmation.
K. Mansouri	Programmation des applications informatiques
K. Mansouri	Développements informatiques, études et résolutions de cas.
K. Mansouri & B. Riyami	Encyclopédie Pratique d'Informatique pour Ingénieur Programmation en visual basic (cours et exercices corrigés)
K. Mansouri & B. Riyami	Encyclopédie Pratique d'Informatique pour Ingénieur Développement d'applications en visual basic (cours et exercices corrigés)
M. Diouri	Le management intégral
M. Diouri	Mathématiques financières
M. Diouri	La négociation
M. Diouri & K. Benzakour	Pratique d'électronique d'automatique et de robotique t.1
M. Diouri & K. Benzakour	Pratique d'électronique d'automatique et de robotique t.2
M. R. Aasri	Ingénierie financière
N. Bennis	Automatique linéaire continu
N. El Mezouari	Programmation en langage C
O. Bensaoud	Informatique industrielle
S. Alami Mohamed	Electronique t.1
S. Alami Mohamed & A. Chafik	Electronique t.2. Amplification, oscillation, commutation

TABLE DES MATIERES