Exercice 1 : (10 points)

Une usine spécialisée dans la fabrication d'une pièce mécanique pour automobile utilise, dans sa chaîne de production, trois machines qu'on notera M_1, M_2 et M_3.

Partie A

Une étude statistique a montré que :

- la machine M_1 produit 41% des pièces dont $2{,}5\ \%$ sont défectueuses,
- la machine M_2 produit 30% des pièces dont $1{,}9\%$ sont défectueuses,
- la machine M_3 produit le reste des pièces dont $1{,}5\%$ sont défectueuses.

On choisit au hasard une pièce dans cette chaîne de production et on suppose que toutes les pièces ont la même probabilité d'être choisies.

On note les événements :

- M_1 : « La pièce choisie est produite par la machine M_1».
- M_2 : « La pièce choisie est produite par la machine M_2».
- M_3 : « La pièce choisie est produite par la machine M_3».
- D : « La pièce choisie est défectueuse ».

On notera $\overline{D}$ l'événement contraire de l'événement D.

1. Déterminer $P_{M_1}(D)$.

2. *Compléter l'arbre de probabilités fourni en* **annexe** page 5, **à rendre avec la copie**.

3. **a.** Définir par une phrase l'événement $M_1 \cap D$.
   b. Calculer la valeur exacte de sa probabilité.

4. **a.** Justifier, en détaillant les calculs, que $P(D) = 0{,}0203$.
   b. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

5. La pièce choisie au hasard est défectueuse, déterminer la probabilité qu'elle soit produite par la machine M_3. Arrondir le résultat à $0{,}001$ près.

Partie B

On suppose dans cette partie que $P(D) = 0{,}02$.
On prélève au hasard 600 pièces. On suppose que le stock est assez important pour assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui, à chaque prélèvement, associe le nombre de pièces défectueuses.

Les résultats seront arrondis à $0{,}001$ près.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

2. **a.** Calculer $P(X = 12)$.
   b. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

3. Calculer la probabilité de l'événement « cinq pièces ou moins sont défectueuses ».

4. a. Calculer $P(X \geq 6)$.
   b. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie C

Dans cette partie, on s'intéresse au diamètre des pièces qui sont de format cylindrique.
On prélève au hasard une pièce dans le stock.
On suppose que la variable aléatoire Y qui associe à chaque pièce son diamètre (en centimètre), suit la loi normale de paramètres $\mu = 5$ et $\sigma = 0{,}04$.

Les résultats seront arrondis à 0,01 près.

1. a. Déterminer $P(4{,}92 \leq Y \leq 5{,}08)$.
   b. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

2. Calculer la probabilité que le diamètre de cette pièce soit au minimum de 4,96 centimètres.

Exercice 2 : (10 points)

Les différentes parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A

Le tableau suivant donne le bénéfice (en milliers d'euros) réalisé par une entreprise spécialisée dans la vente à distance.

Année	2017	2018	2019	2020	2021	2022
Rang de l'année : x_i	1	2	3	4	5	6
Bénéfice en milliers d'euros : y_i	9,9	11,3	12,5	13,4	14,4	15,4

La calculatrice est nécessaire pour la plupart des calculs demandés.

1. Déterminer un ajustement affine de y en fonction de x selon la méthode des moindres carrés. Les coefficients de l'équation de la droite seront arrondis à 0,01 près.

2. Dans cette question, on décide d'ajuster le nuage de points $(x_i ; y_i)$ par la droite d'équation : $y = 1{,}1x + 9$.

   Selon ce modèle :
   a. Déterminer une estimation, en milliers d'euros, du bénéfice en 2025.
   b. Déterminer l'année à partir de laquelle le bénéfice dépassera 22 000 euros pour la première fois. Justifier la réponse.

Partie B

Le tableau suivant est un extrait d'une feuille de calcul qui donne l'évolution annuelle (d'une année par rapport à la précédente) du nombre de produits vendus entre 2017 et 2022.

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Année**	**2017**	**2018**	**2019**	**2020**	**2021**	**2022**
2	**Nombre de produits vendus**	620	700	810	928	1092	1289
3	**Evolution annuelle en %**		12,9%	15,7%	14,6%	17,7%	18,0%

1. La plage des cellules C3 à G3 est au format pourcentage, arrondie à 0,1% près.
   a. Donner une formule qui, saisie dans la cellule C3, permet d'obtenir par recopie vers la droite les taux annuels successifs de la ligne 3.
   b. Calculer la valeur de la cellule F3, arrondie à 0,1% près.
2. **a.** Calculer le taux d'évolution global entre 2017 et 2022, arrondi à 1%.
   b. Calculer le taux d'évolution annuel moyen entre 2017 et 2022, arrondi à 0,1%.

Partie C

On suppose dans cette partie, qu'à partir de l'année 2022, le nombre de produits vendus augmente chaque année de 16%.

On décide de modéliser ce nombre par une suite (u_n) où u_n désigne le nombre de produits vendus l'année $(2022 + n)$. Ainsi $u_0 = 1289$.

1. Calculer la valeur arrondie à l'unité de u_1 et u_2 .
2. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
3. Donner le terme général u_n en fonction de n.

L'entreprise prévoit d'investir dans une nouvelle plateforme numérique de vente à distance dès que le nombre de produits vendus dépassera les 3000.

4. **a.** Compléter les différentes lignes non renseignées dans l'algorithme en **annexe** page 5, pour qu'après exécution, la variable N contienne l'année à partir de laquelle, le nombre de produits vendus dépassera pour la première fois les 3000 produits selon ce modèle.
   b. Déterminer l'année à partir de laquelle, selon ce modèle, le nombre de produits vendus dépassera pour la première fois les 3000 produits.

BTS Comptabilité et Gestion

Session 2024

Épreuve : **Mathématiques**

Durée de l'épreuve : 2 heures

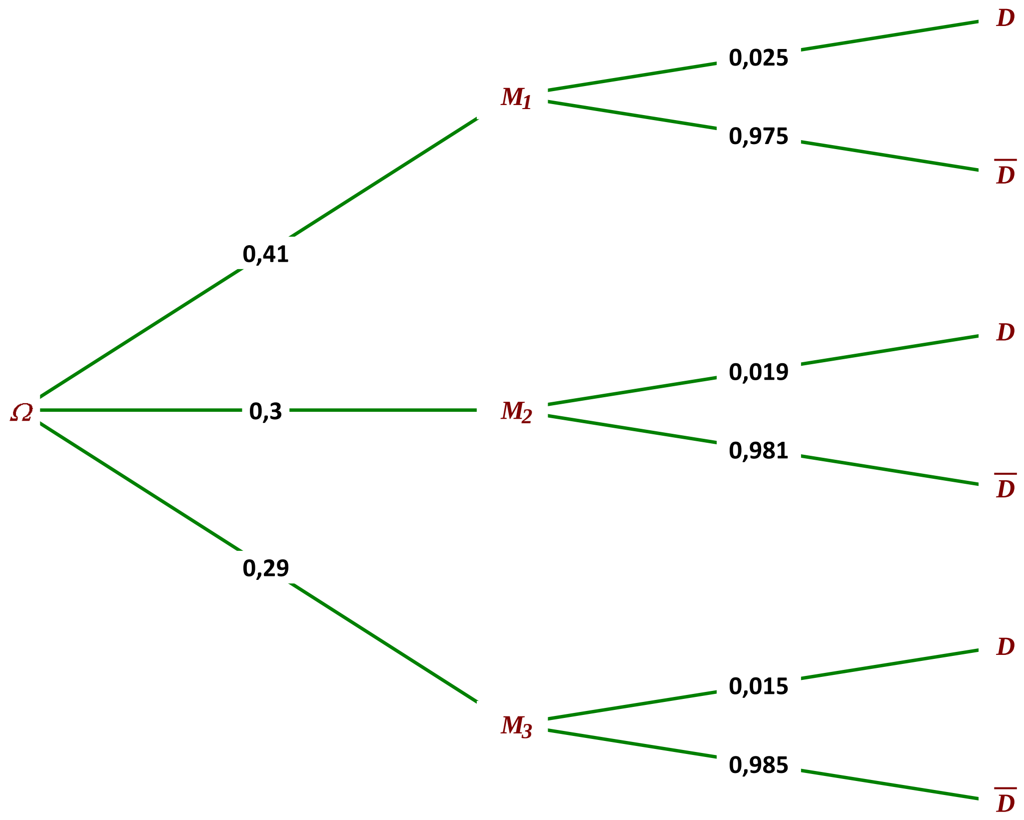
PROPOSITION DE CORRIGÉ

Exercice 1 **(10 points)**

Partie A

1. $P_{M1}(D) = 0,025$ (2,5% de pièce défectueuses parmi M1)

2. On obtient l'arbre suivant :



3. a) C'est dire que la pièce soit produite par la machine M1 et qu'elle soit défectueuse.

b) Sa probabilité est P(M1 et D) = P(M1) * P_{M1} (D) = 0,41 * 0,025 = 0,01025

4. a) D'après la formule des probabilités totales, on a :

P(D) = . P(M1 et D) + P(M2 et D) + P(M3 et D) = 0,01025 + 0,29 *0,019 + 0,29*0,015 = 0,0203

b) donc la probabilité qu'une pièce produite soit défectueuse est **0,0203.**

5. la probabilité qu'une pièce soit produite par la machine M3 sachant qu'elle est défectueuse est : $PD(\mathrm{M3}) = \dfrac{\mathrm{P(\ M3\ et\ D)}}{\mathrm{P(\ D)}} = \dfrac{0{,}29 * 0{,}015}{0{,}0203}$ **$\approx$ 0,214.**

Partie B

1. Le prélèvement d'une pièce correspond à une épreuve de Bernoulli, le succès étant lui-même assimilé à l'obtention d'une pièce défectueuse (probabilité 0,0203). On répète cette épreuve 600 fois, donc X suit la loi binomiale de paramètres n =600 et p = 0,0203.

2. a) On a : P(X = 12) **$\approx$ 0,115**

b) Ce nombre représente la probabilité que le prélèvement contienne 12 pièces défectueuses.

3. On a : P(X ≤ 5) **$\approx$ 0,017**

4. Il s'agit de la probabilité que le prélèvement contienne au moins 6 pièces défectueuses qui est :

P(X ≥ 6) = 1 - P(X ≤ 5) **$\approx$ 0,983**

Partie C

1. P(4,92 ≤ Y≤ 5,08) **$\approx$ 0,95** (intervalle « à deux sigmas »)

3. La probabilité que le diamètre soit au minimum de 4,96 est : P(Y ≥ 4,96) **$\approx$ 0,84**

Exercice 2 : **(10 points)**

Partie A

1. L'équation de la droite d' ajustement de y en x par la méthode des moindres carrés sous la forme y = ax +b, où a et b sont arrondis à 0,01 près est : **$y = 1{,}08x + 9{,}05$**

2. a) Le bénéfice estimé en 2025 avec ce modèle est :

$y = 1{,}1*9 + 9 =$ **18,9 milliers d'€**

b) Le bénéfice dépassera 22000 € quand $1{,}1x + 9 > 22$

soit quand $x > (22 – 9) / 1{,}1 = 11{,}8$… donc à partir de $x = 12$; ce qui correspond à **l'année 2028**.

Partie B

1. a) La formule « =(C2 - B2) / B2 » convient.

b) En F3 on obtient : (1092 – 928) / 928 = 0,1767… soit **environ + 17,7 %.**

2. a) Sur la période 2017 à 2022 , le taux d'évolution global est :

(1289 – 620) / 620 = 1,079… soit **environ + 108 %.**

3. $(1 + 1{,}08)^{1/5} = 2{,}08^{1/5} = 1{,}1577$…

Le taux d'évolution annuel moyen de 2017 à 2022 est donc **environ + 15,8 %.**

Partie C

1. On calcule : $u_1 =$ **1289*** (1 + 16/100) ≈ 1495 et $u_2 = u_1 * 1{,}16$ ≈ 1734

2. Augmenter de 16% revient à multiplier par 1 + 16/100 = 1,16 ce qui nous donne ici une **suite géométrique de raison 1,16 et de 1er terme u_0 = 1289.**

3. On a $u_n = u_0 * q^n$ **$= 1289 * 1{,}16^n$**

4. a)

b) On veut n tel que $1289 * 1,16^{n} > 3000$ soit $1,16^{n} > 3000 / 1289$

puis $\ln(1,16^{n}) = n \ln(1,16) > \ln(3000 / 1289)$

et enfin $n > \ln(3000 / 1289) / \ln(1,16) = 5,69\ldots$

Le nombre de produits vendus dépasse donc **pour la 1ere fois en dessous des 3000 produits en 2028.**