Suites et séries de fonctions

Déterminer la limite simple d'une suite de fonctions. Cas des séries de fonctions

Quand on ne sait pas !

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur I à valeurs réelles et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- **(Convergence simple - Cas des suites de fonctions)**

$$\left[\begin{array}{c}\text{la suite de FONCTIONS } (f_n)_{n\in\mathbb{N}}\\ \text{converge simplement}\\ \text{vers la FONCTION } f \text{ sur } I\end{array}\right] \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{c}\text{pour chaque réel } x \in I,\\ \text{la suite de RÉELS } (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}\\ \text{converge vers le RÉEL } f(x)\end{array}\right]$$

- **(Convergence simple - Cas des séries de fonctions)**

$$\left[\begin{array}{c}\text{la série de FONCTIONS } \sum f_n\\ \text{converge simplement sur } I\end{array}\right] \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{c}\text{pour chaque réel } x \in I,\\ \text{la série de RÉELS } \sum f_n(x) \text{ converge}\end{array}\right]$$

Que faire ?

- Pour montrer qu'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I :
  - on commence par fixer un réel $x \in I$,
  - puis on montre que la suite de réels $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel noté $f(x)$.

  L'étude de la convergence simple d'une suite de fonctions se ramène donc à l'étude de la convergence d'une suite de réels.

- Pour montrer qu'une série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I, on peut utiliser une des deux méthodes suivantes :
  - *Méthode 1 (la plus fréquente) :* à $x \in I$ fixé, on montre que la série de réels $\sum f_n(x)$ converge en utilisant des critères de comparaison (par majoration, par équivalence ou par négligeabilité) sur le terme général $f_n(x)$, ou le critère spécial des séries alternées, ou encore le critère de d'Alembert.

À l'issue de l'application de la méthode 1, on obtient l'existence SANS la connaissance de l'expression de la limite simple de la série $\sum f_n$.

- *Méthode 2 (la moins fréquente) :* à $x \in I$ fixé, on montre que la série de réels $\sum f_n(x)$ converge en étudiant la convergence de sa suite des sommes partielles $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$.
  À l'issue de l'application de la méthode 2, on obtient l'existence AVEC la connaissance de l'expression de la limite simple de la série $\sum f_n$.

Conseils

- Il faut toujours préciser l'ensemble sur lequel on étudie la convergence simple.

Exemple traité

1 Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}$$

2 Étudier la convergence simple sur $]1,+\infty[$ de la série de fonctions $\sum \frac{1}{1+x^n}$.

SOLUTION

1 Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. On a la disjonction de cas suivante :

- Si $x = 0$, alors $f_n(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc la suite de réels $(f_n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
- Si $x \neq 0$, alors on a la majoration suivante pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|f_n(x)| = \left|\frac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}\right| \leq \underbrace{\frac{1}{1+n^2x^2}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$$

Par le théorème d'encadrement, la suite de réels $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

À $x \in \mathbb{R}$ fixé, la suite de réels $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le réel 0.
Ainsi, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle $0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$.

2 Soit $x > 1$ fixé. On pose $f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et on a alors l'encadrement suivant pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq f_n(x) \leq \left(\frac{1}{x}\right)^n$$

Or la série géométrique de terme général $(x^{-1})^n$ converge (car $x^{-1} \in]-1,1[$), donc par critère de comparaison par majoration, il vient que la série de réels $\sum f_n(x)$ converge pour tout $x > 1$.
Ainsi, la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $]1, +\infty[$.

Exercices

EXERCICE 54.1

Étudier la convergence simple des suites de fonctions définies par les expressions suivantes :

1 $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n\sqrt{x}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$

2 $f_n(x) = n(x^n - x^{n+1})$ sur $[0,1]$

EXERCICE 54.2

Étudier la convergence simple des séries de fonctions suivantes :

1 $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(nx)}{n^2}$ sur $\mathbb{R}$

2 $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{x+n}$ sur $\mathbb{R}_+$

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 54.1

1 Majorer la fonction sinus par 1.

2 Faire une disjonction de cas suivant que $x = 0$ ou $x \neq 0$

EXERCICE 54.2

1 Majorer la fonction sinus par 1.

2 Utiliser le critère spécial des séries alternées.

Solutions des exercices

EXERCICE 54.1

1 Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé. On a la majoration suivante pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$|f_n(x)| = \left|\frac{\sin(nx)}{n\sqrt{x}}\right| \leq \frac{1}{n\sqrt{x}}$$

Par le théorème d'encadrement, à $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, la suite de réels $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers le réel 0.
Ainsi, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction nulle $0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R})}$.

2 Soit $x \in [0,1]$ fixé. On a la disjonction de cas suivante :

- Si $x = 1$, alors $f_n(1) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc la suite de réels $(f_n(1))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
- Si $x \in [0,1[$, alors la suite géométrique $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 et, par croissances comparées :

$$f_n(x) = n(x^n - x^{n+1}) = nx^n(1-x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Donc la suite de réels $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

À $x \in [0,1]$ fixé, la suite de réels $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le réel 0.
Ainsi, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle $0_{\mathcal{F}([0,1],\mathbb{R})}$.

EXERCICE 54.2

1 Soit $x \in \mathbb{R}$. On a l'encadrement suivant pour tout $n \geq 1$:

$$0 \leq \left|\frac{\sin(nx)}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$$

Or la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, donc par critère de comparaison par majoration, la série de réels $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(nx)}{n^2}$ converge absolument, donc elle converge pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Ainsi, la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(nx)}{n^2}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

2 Soit $x \in \mathbb{R}_+$ fixé.
La suite $\left(\frac{1}{x+n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est positive, décroissante et de limite nulle, donc par le critère spécial des séries alternées, il vient que la série de réels $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{x+n}$ converge.
Ainsi, la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{x+n}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

Étudier la convergence uniforme d'une suite de fonctions

Quand on ne sait pas !

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur I à valeurs réelles et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.
Si $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction, alors on rappelle que $\|\varphi\|_\infty = \sup_{x\in I} |\varphi(x)|$.

- **(Définition pratique de la convergence uniforme)**

$$\left[\begin{array}{c}\text{la suite de FONCTIONS } (f_n)_{n\in\mathbb{N}}\\ \text{converge uniformément}\\ \text{vers la FONCTION } f \text{ sur } I\end{array}\right] \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{c}\text{la suite de RÉELS } (\|f_n - f\|_\infty)_{n\in\mathbb{N}}\\ \text{converge vers le RÉEL } 0\end{array}\right]$$

- **(Définition quantifiée de la convergence uniforme)**

$$\big[\,(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur } I\,\big]$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ \big[\forall x \in I,\ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon\big]$$

Interprétation graphique :
Pour tout voisinage « tubulaire » (aussi petit soit-il et délimité ci-contre par des pointillés) du graphe de f, les graphes des fonctions f_n s'y situent tous à partir d'un certain rang N.

Légendes :
- - - graphe de f
—— graphe de f_n pour $n \geq N$

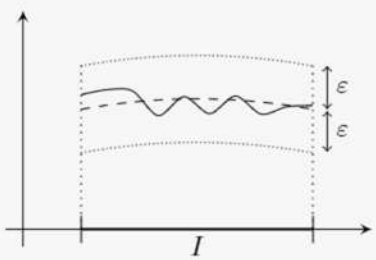


Fig. : Visualisation graphique

- **(Théorème 1)** La convergence uniforme implique la convergence simple.
La réciproque est fausse.

- **(Théorème 2)** Toute limite uniforme de fonctions continues sur I est continue sur I.

Que faire ?

- Pour montrer qu'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I :
  - on commence par déterminer sa limite simple f sur I,
  - on montre ensuite que la suite de réels $(\|f_n - f\|_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 en majorant au besoin la quantité $|f_n(x) - f(x)|$ sur l'intervalle I par le terme général d'une suite INDÉPENDANTE DE x et de limite nulle. Cette majoration peut s'obtenir :
    - ↪ OU BIEN par des manipulations élémentaires d'inégalités ;
    - ↪ OU BIEN en étudiant les variations de la fonction $f_n - f$ sur I.
- Pour montrer qu'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur I, on peut utiliser une des trois méthodes suivantes :
  - *Méthode 1 :* on montre que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas simplement sur I, et par contraposition du théorème 1, elle ne converge pas uniformément sur I ;
  - *Méthode 2 :* on montre que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f sur I, mais que la suite de réels $(\|f_n - f\|_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0. Pour ce faire, on peut au besoin :
    - ↪ OU BIEN intuiter une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans I telle que la suite de réels $(f_n(u_n) - f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tende pas vers 0 ;
    - ↪ OU BIEN étudier les variations de la fonction $f_n - f$ sur I.
  - *Méthode 3 :* on montre que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues sur I de limite simple qui n'est pas continue sur I.
    EXEMPLE 1 La suite $(f_n : x \mapsto x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.
    En effet, la fonction f_n est continue sur $[0,1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, mais sa limite simple f définie par :
    $$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$
    n'est pas continue sur $[0,1]$.

Conseils

- Il est très important de préciser l'ensemble sur lequel on étudie la convergence uniforme : il se peut que la convergence ne soit pas uniforme sur l'intervalle I entier, mais qu'elle le devienne sur tout compact strictement inclus dans I.

Exemple traité

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = 1 + x + \cdots + x^{n-1}$$

1 Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers une fonction f (à préciser) sur un intervalle I (à préciser).

2 Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément vers f sur I.

3 Soit $a \in]0, 1[$. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $[-a, a]$.

SOLUTION

1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculons pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{si } x = 1 \\ \dfrac{1-x^n}{1-x} & \text{si } x \neq 1 \end{cases}$$

On a la disjonction de cas suivante :

- si $x \in]-1, 1[$, alors $x^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\dfrac{1}{1-x}$.
- si $x = 1$, alors $n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$.
- si $x \notin]-1, 1]$, alors $(x^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge, donc $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge.

Ainsi, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers $f : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ sur $I =]-1, 1[$.

2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculons pour tout $x \in I =]-1, 1[$:

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{x^n}{1-x}\right| \underset{x\to1^-}{\longrightarrow} +\infty$$

Donc la suite de réels $(\|f_n - f\|_\infty)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne tend pas vers 0.
Ainsi, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément vers f sur I.

3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a les déductions suivantes :

$$\forall x \in [-a, a], \quad \left[\, |x^n| \leq a^n \quad \text{et} \quad |1-x| \geq 1-a \,\right]$$

$$\text{d'où :} \quad \forall x \in [-a, a], \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \underbrace{\frac{a^n}{1-a}}_{\text{indépendant de } x\,!}$$

$$\text{d'où :} \quad \forall x \in [-a, a], \quad |f_n(x) - f(x)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\text{d'où :} \quad \sup_{x\in[-a,a]} |f_n(x) - f(x)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Ainsi, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $[-a, a]$.

Exercices

EXERCICE 55.1

Étudier la convergence uniforme des suites de fonctions définies par les expressions suivantes :

1 $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n\sqrt{x}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ 2 $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}$ sur $\mathbb{R}$ 3 $f_n(x) = n(x^n - x^{n+1})$ sur $[0,1]$

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 55.1

Les indications suivantes sont pour l'étude de la convergence uniforme :

1 Remarquer que :

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} g(nx) \quad \text{où } g : x \mapsto \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$$

puis montrer que g est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$.

2 Calculer $f_n(\frac{1}{n})$.

3 Étudier les variations de $f_n - f$ (où f désigne la limite simple).

Solutions des exercices

EXERCICE 55.1

1 ■ *Étude de la convergence simple de* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$ *:*
D'après l'exercice 1 de la *fiche 54*, on sait déjà que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction nulle $f = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R})}$.

■ *Étude de la convergence uniforme de* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$ *:*
On cherche à savoir si la suite $(\|f_n - f\|_\infty)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 ou pas.
Calculons pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{\sin(nx)}{\sqrt{nx}} = \frac{1}{\sqrt{n}} g(nx) \quad \text{où } g : x \mapsto \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$$

La fonction g, ainsi définie, est prolongeable par continuité sur le segment $[0,1]$ (car $g(x) \underset{0^+}{\sim} \frac{x}{\sqrt{x}} \underset{0^+}{\sim} \sqrt{x}$, d'où $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = 0$), donc g est bornée sur le segment $[0,1]$.

De plus, g est continue sur $[1,+\infty[$ de limite finie en $+\infty$ (car $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$), donc g est bornée sur $[1,+\infty[$ et finalement, g est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$. On en déduit alors :

$$\|f_n-f\|_\infty=\|f_n\|_\infty=\frac{1}{\sqrt{n}}\|g\|_\infty \quad \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Ainsi, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+^*$.

2 ■ *Étude de la convergence simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}$:*
D'après l'exercice 1 de la *fiche 54*, on sait déjà que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle $f=0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$.

■ *Étude de la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}$:*
On cherche à savoir si la suite $(\|f_n-f\|_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 ou pas.
Or la suite $(f_n(\frac{1}{n})-f(\frac{1}{n}))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite constante valant $\frac{\sin 1}{2}$, donc elle ne converge pas vers 0.
Ainsi, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

3 ■ *Étude de la convergence simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0,1]$:*
D'après l'exercice 1 de la *fiche 54*, on sait déjà que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle $f=0_{\mathcal{F}([0,1],\mathbb{R})}$.

■ *Étude de la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0,1]$:*
On cherche à savoir si la suite $(\|f_n-f\|_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 ou pas.
Soit $n\in\mathbb{N}$. Étudions les variations de $f_n-f=f_n$ qui est dérivable sur $[0,1]$.
Calculons pour tout $x\in[0,1]$:

$$f_n'(x)=n(nx^{n-1}-(n+1)x^n)=\underbrace{nx^{n-1}}_{\geq 0}\underbrace{(n-(n+1)x)}_{\geq 0 \text{ ssi } x\leq \frac{n}{n+1}}$$

Donc la fonction f_n admet un maximum pour $\frac{n}{n+1}$, et on en déduit alors :

$$\|f_n-f\|_\infty \overset{f_n\geq 0 \text{ sur } [0,1]}{=} f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) \overset{f_n(x)=nx^n(1-x)}{=} n\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\left(1-\frac{n}{n+1}\right)$$
$$=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}=\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=\mathrm{e}^{(n+1)\ln(1-\frac{1}{n+1})}$$

Or :

$$(n+1)\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\underset{+\infty}{\sim}(n+1)\times\left(-\frac{1}{n+1}\right)\underset{+\infty}{\sim}-1$$

($\ln(1+x)\underset{0}{\sim}x$)

Donc la suite $(\|f_n-f\|_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers e^{-1}.
Ainsi, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.

56 Montrer qu'une série de fonctions converge uniformément en utilisant la convergence normale

Quand on ne sait pas !

■ Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles ou complexes. Pour tout entier $n \geq 0$, on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$$

On dit que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur I si la suite de fonctions $(S_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ sur I. La fonction f est alors la somme de la série de fonctions :

$$\forall x \in I,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

■ On dit que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge normalement sur I si :

- Pour tout entier $n \geq 0$, f_n est bornée sur I.
- La série (numérique) $\sum_{n\geq 0} \|f_n\|_\infty$ converge.

■ Un résultat clé pour montrer la convergence uniforme d'une série de fonctions est alors le suivant :

> Si une série de fonctions converge normalement sur un intervalle alors elle converge uniformément sur cet intervalle

Que faire ?

Pour montrer la convergence uniforme d'une série de fonctions, on peut essayer de montrer que celle-ci converge normalement. On peut alors procéder de l'une des manières suivantes :

- On étudie pour tout entier $n \geq 0$, la fonction f_n sur I (variations, limites éventuelles). Si l'une des fonctions f_n n'est pas bornée : la série ne converge pas normalement. Sinon, l'étude des fonctions f_n permet de déterminer la valeur de $\|f_n\|_\infty$. Il suffit alors d'étudier la série de terme général $\|f_n\|_\infty$ pour laquelle on peut utiliser tout critère lié aux séries à termes positifs.
- On détermine pour tout entier $n \geq 0$, un réel positif α_n tel que :

$$\forall x \in I,\ |f_n(x)| \leq \alpha_n$$

Ceci implique que f_n est bornée sur I et que l'on a :

$$\|f_n\|_\infty \leqslant \alpha_n$$

Si la série de terme général α_n converge alors par critère de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que la série de fonctions de terme général f_n converge normalement sur I.

Conseils

- La convergence normale implique la convergence uniforme mais la réciproque est fausse. On ne peut donc rien conclure si la série ne converge pas normalement.
- Ne jamais écrire $\|f_n\|_\infty$ sans préciser au préalable que f_n est bornée sur I.

Exemple traité

Pour tout $n \geq 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$, posons :

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^2+1}$$

Étudier la convergence uniforme de $\displaystyle\sum_{n\geq 0} f_n$ sur $\mathbb{R}$.

SOLUTION

Pour tout $n \geq 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2+1}$$

Ainsi, f_n est bornée sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{n^2+1}$$

On sait que :

$$\frac{1}{n^2+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$$

et que ces deux termes généraux sont positifs. Par critère de comparaison des séries à termes positifs avec une série de Riemann convergente $(2 > 1)$, on obtient que la série de terme général $\frac{1}{n^2+1}$ converge. De nouveau par critère de comparaison, on obtient que la série $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ donc uniformément sur $\mathbb{R}$.

Exercices

EXERCICE 56.1

Pour tout entier $n \geq 1$, on définit la fonction $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f_n(x) = \frac{1}{n + n^3 x^2}$$

1 Étudier la convergence simple de $\sum_{n\geq 1} f_n$ sur $\mathbb{R}_+$.

2 Montrer que $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$.

EXERCICE 56.2

On appelle série trigonométrique toute série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ telle que pour tout entier $n \geq 0$, f_n est une fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

où $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ sont deux suites réelles.

Déterminer une condition suffisante simple sur $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ pour qu'une série trigonométrique converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 56.1

1 Utiliser un critère de comparaison.

2 Étudier la convergence normale de la série de fonctions.

EXERCICE 56.2 Majorer pour $n \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}$, $|f_n(x)|$.

Solutions des exercices

EXERCICE 56.1

1 Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. La série de terme général $f_n(x)$ est à termes positifs et :

$$f_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^3 x^2}$$

La série de terme général positif $\frac{1}{n^3}$ converge (série de Riemann avec $3 > 1$). Par critère de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que la série de terme général $f_n(x)$ converge. Ainsi, $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

2 Soit $(a, b) \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $a < b$. Pour tout entier $n \geq 1$ et tout $x \in [a, b]$,

$$n + n^3 x^2 \geq n + n^3 a^2 > 0$$

Par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, on a alors :

$$0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{n + n^3 a^2} = f_n(a)$$

Ainsi f_n est bornée sur $[a, b]$ et on a :

$$0 \leq \|f_n\|_\infty \leq f_n(a)$$

La série de terme général $f_n(a)$ converge (la série de fonctions converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$) donc par critère de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement sur $[a, b]$ et donc converge uniformément sur $[a, b]$.

EXERCICE 56.2

Soit $n \geq 0$. Pour tout réel x, on a d'après l'inégalité triangulaire :

$$|f_n(x)| \leq |a_n| + |b_n|$$

Ainsi, f_n est bornée sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$0 \leq \|f_n\|_\infty \leq |a_n| + |b_n|$$

Si les deux séries $\sum_{n \geq 0} a_n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n$ convergent absolument alors par critère de comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que la série $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ donc uniformément sur $\mathbb{R}$.

57 Montrer qu'une série de fonctions qui ne converge pas normalement converge uniformément

Quand on ne sait pas !

Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles ou complexes. Pour tout entier $n \geq 0$, on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$$

■ On dit que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur I si la suite de fonctions $(S_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ sur I. La fonction f est alors la somme de la série de fonctions :

$$\forall x \in I,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

Notons pour tout $n \geq 0$, R_n, la fonction reste d'ordre n définie par :

$$\forall x \in I, \quad R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$$

On a alors pour tout $x \in I$ et tout $n \geq 0$,

$$S(x) - \sum_{k=0}^{n} f_k(x) = R_n(x)$$

■ On en déduit alors que les assertions suivantes sont équivalentes :

- La série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur I.
- La série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement et la suite de fonctions $(R_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur I vers la fonction nulle.

Que faire ?

- Le critère précédent s'applique souvent en utilisant le critère spécial des séries alternées (qui permet de majorer facilement un reste) ou quand le reste est facilement calculable ou majorable.
- La convergence normale étant plus facile à étudier, il ne faut pas hésiter à étudier celle-ci en premier (voir fiche 56).

Conseils

- Il est très important de connaitre les hypothèses du critère spécial des séries alternées (voir fiche 47).

Exemple traité

Posons pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et tout $n \geq 1$,

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{x+n}$$

Étudier la convergence uniforme de $\sum_{n\geq 1} f_n$.

SOLUTION

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. La suite $\left(\frac{1}{x+n}\right)_{n\geq 0}$ est décroissante et converge vers 0 donc d'après le critère spécial des séries alternées, la série $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ converge.

Ainsi, la série $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

Posons pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et tout $n \geq 1$,

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$$

D'après le critère spécial des séries alternées, on a :

$$0 \leq |R_n(x)| \leq |f_{n+1}(x)| = \frac{1}{x+n+1} \leq \frac{1}{n+1}$$

car $x \geq 0$. On en déduit que R_n est bornée sur $\mathbb{R}_+$ et on a :

$$0 \leq \|R_n\|_\infty \leq \frac{1}{n+1}$$

Or

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

D'après le théorème d'encadrement, on en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \|R_n\|_\infty = 0$$

Ainsi, $(R_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+$.

Finalement, $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

Exercices

EXERCICE 57.1

Pour tout entier $n \geq 1$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$$

1 Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$.

2 Étudier la convergence uniforme sur $[0, +\infty[$ de la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$.

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 57.1

1 Penser au critère spécial des séries alternées dans les cas $x = 0$ et $x > 0$.

2 Majorer la fonction reste d'ordre n.

Solutions des exercices

EXERCICE 57.1

1 Pour tout entier $n \geq 1$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f_n(x) = (-1)^n u_n(x)$ où

$$u_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Si $x < 0$ alors par théorème des croissances comparées :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n(x) = +\infty$$

donc la série de terme général $f_n(x)$ diverge grossièrement.

- Si $x \geq 0$, alors $(u_n(x))_{n\geq 1}$ est positive, décroissante (produit de deux suites décroissantes positives) et

$$\lim_{n\to+\infty} u_n(x) = 0$$

D'après le critère spécial des séries alternées, on en déduit que la série de terme général $f_n(x)$ converge.

Finalement, $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.

2 La série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$. On pose alors pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et tout $n \geq 1$,

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$$

D'après le critère spécial des séries alternées (hypothèses vérifiées d'après la question précédente), on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et tout $n \geq 0$,

$$|R_n(x)| \leq \frac{e^{-(n+1)x}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$$

Ainsi pour tout $n \geq 1$, R_n est bornée sur $\mathbb{R}_+$ et on a :

$$0 \leq \|R_n\|_\infty \leq \frac{1}{n+1}$$

Par théorème d'encadrement, on en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \|R_n\|_\infty = 0$$

Ainsi $(R_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+$ donc $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$.

58 Montrer que la limite d'une suite de fonctions est continue. Cas des séries de fonctions

Quand on ne sait pas !

■ Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles ou complexes. Le résultat suivant permet d'étudier la continuité de la limite simple de la suite $(f_n)_{n\geq 0}$:

Supposons que pour tout $n \geq 0$, f_n est continue en $a \in I$ et que $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers une fonction f sur I. Alors f est continue en a.

En particulier :

Supposons que pour tout $n \geq 0$, f_n est continue sur I et que $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers une fonction f sur I. Alors f est continue sur I.

■ On en déduit le résultat analogue pour les séries de fonctions :

Supposons que :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I.
- La série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur I.

Alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur I.

Que faire ?

■ Dans les deux cas (suite ou série), on commence par justifier la continuité des fonctions f_n.

■ Pour montrer la convergence uniforme de la série de fonctions de terme général f_n, on peut utiliser la convergence normale (fiche 56) ou la suite des restes (fiche 57).

Conseils

- Pour montrer la continuité sur I de la limite simple d'une suite de fonctions ou de la somme d'une série de fonctions, il suffit de montrer la continuité sur tout segment de I. On peut donc appliquer les résultats précédents en se restreignant à un segment quelconque de I. Il est souvent plus simple d'étudier la convergence uniforme sur un tel segment.

Exemple traité

Posons pour tout $x \in]1, +\infty[$, $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

Justifier que cette fonction est bien définie et continue sur $]1, +\infty[$.

SOLUTION

La fonction ζ est bien définie car pour tout $x > 1$, la série de terme général $\frac{1}{n^x}$ converge (série de Riemann). Montrons que ζ est continue sur $]1, +\infty[$. Posons pour tout $n \geq 1$,

$$f_n : x \mapsto \frac{1}{n^x}$$

Soit $[a, b] \subset]1, +\infty[$. Pour tout $x \in [a, b]$ et tout $n \geq 1$,

$$\left| \frac{1}{n^x} \right| \leq \frac{1}{n^a}$$

On en déduit que f_n est bornée sur $[a, b]$ et on a :

$$\|f_n\|_{[a,b],\infty} \leq \frac{1}{n^a}$$

La série de terme général $\frac{1}{n^a}$ converge (série de Riemann avec $a > 1$) donc par critère de comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que la série $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge normalement sur $[a, b]$ et ceci pour tout segment $[a, b] \subset]1, +\infty[$. Or, pour tout $n \geq 1$, f_n est continue sur $]1, +\infty[$ donc d'après le théorème de continuité, on en déduit que ζ est continue sur $]1, +\infty[$.

Exercices

EXERCICE 58.1

Soit $\sum_{n\geq 1} u_n$ la série de fonctions d'une variable réelle de terme général u_n défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ u_n(x) = \frac{2x}{x^2 + n^2\pi^2}$$

1 Montrer que $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. On note U la somme de cette série de fonctions.

2 Montrer que, pour tout $a > 0$, $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge normalement sur $[-a, a]$.

3 Montrer que U est continue sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 58.2

On pose pour tout entier $n \geq 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \frac{n+2}{n+1} \mathrm{e}^{-nx^2}$$

1 Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$.

2 La suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}$?

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 58.1

1 Utiliser un critère de comparaison.

2 Majorer pour $n \geq 1$ et $x \in [-a, a]$, $|u_n(x)|$.

3 Utiliser le théorème de continuité.

EXERCICE 58.2

1 Distinguer les cas $x = 0$ et $x \in \mathbb{R}^*$.

2 Raisonner par l'absurde.

Solutions des exercices

EXERCICE 58.1

1 Pour tout réel x et tout entier $n \geq 1$, on a :

$$|u_n(x)| \leq \frac{2|x|}{n^2\pi^2}$$

Or la série de terme général $\frac{2|x|}{n^2\pi^2}$ converge (série de Riemann avec $2 > 1$) donc par critère de comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que la série de terme général $u_n(x)$ converge absolument donc converge. Ainsi, $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

2 Si $x \in [-a, a]$ alors pour tout $n \geq 1$,

$$|u_n(x)| \leq \frac{2|x|}{n^2\pi^2} \leq \frac{2|a|}{n^2\pi^2}$$

Ainsi u_n est bornée sur $[-a, a]$ et on a :

$$\|u_n\|_{[-a,a],\infty} \leq \frac{2|a|}{n^2\pi^2}$$

Or la série de terme général $\frac{2|a|}{n^2\pi^2}$ converge (série de Riemann avec $2 > 1$) donc par critère de comparaison de séries à termes positifs, pour tout $a > 0$, la série de fonctions de terme général u_n converge normalement sur $[-a, a]$.

3 Les fonctions u_n $(n \geq 1)$ sont continues sur $\mathbb{R}$ et on sait que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge normalement donc uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$ (car sur tout segment symétrique par rapport à 0). Par théorème de continuité, on en déduit que U est continue sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 58.2

1 Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Si $x = 0$, alors pour tout entier $n \geq 0$,

$$f_n(0) = \frac{n+2}{n+1}$$

et ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(0) = 1$$

- Si $x \neq 0$, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(0) = 0$$

car $f_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-nx^2}$.

Ainsi, (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

2 Supposons que (f_n) converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$. On sait que toutes les fonctions f_n sont continues sur $\mathbb{R}$ donc d'après le théorème de continuité, on en déduirait que f est continue sur $\mathbb{R}$ ce qui est absurde. Ainsi, (f_n) ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

59 Calculer des limites d'une fonction définie comme une somme de série

Quand on ne sait pas !

Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles ou complexes. Si la série de fonctions de terme général f_n converge simplement sur un intervalle I, on définit alors sa fonction somme f de la manière suivante :

$$\forall x \in I,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

Pour étudier l'existence d'une limite en un point a de I ou une extrémité de I (éventuellement infini), on utilise le résultat suivant :

Supposons que :

- Pour tout entier $n \geq 0$, f_n possède une limite finie en a que l'on notera ℓ_n.
- La série $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur I.

Alors :

- La série $\sum_{n\geq 0} \ell_n$ converge.
- La fonction f admet une limite finie en a.
- $\lim\limits_{x\to a} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \lim\limits_{x\to a} f_n(x)$, ou plus simplement : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \ell_n$

Que faire ?

- Les exercices commencent généralement par l'étude de la convergence simple de la série de fonctions. Cela permet d'obtenir l'ensemble de définition de f.
- Pour étudier la convergence uniforme des séries de fonctions, on peut étudier la convergence normale (fiche 56) ou utiliser la suite des restes (fiche 57).
- Le théorème de continuité permet aussi de calculer des limites (fiche 58).

Conseils

- Il est parfois possible de se passer de ce théorème en encadrant la somme de la série de fonctions.

Exemple traité

Posons pour tout $x \in]1, +\infty[$:

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

Justifier que ζ est bien définie sur $]1, +\infty[$ et déterminer sa limite en $+\infty$.

SOLUTION

La fonction ζ est bien définie car pour tout $x > 1$, la série de terme général $\frac{1}{n^x}$ converge (série de Riemann). Posons pour tout entier $n \geq 1$, $f_n :]1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x > 1,\ f_n(x) = \frac{1}{n^x}$$

Pour tout $x \in [2, +\infty[$ et tout $n \geq 1$,

$$\left| \frac{1}{n^x} \right| \leq \frac{1}{n^2}$$

La série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann avec $a > 1$) donc la série $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[2, +\infty[$. De plus, pour tout $n \geq 2$:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{n^x} = 0$$

et

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1^x} = 1$$

Par interversion limite et somme, on en déduit que ζ admet une limite finie en $+\infty$ et on a :

$$\lim_{x \to +\infty} \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{n^x} \right) = 1$$

Exercices

EXERCICE 59.1 Soit f définie par :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$$

1 Donner l'ensemble de définition et de continuité de la fonction f.

2 Déterminer la limite en $+\infty$ de f.

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 59.1

1 Distinguer les cas $x < 0$, $x = 0$ et $x > 0$.

2 Étudier la convergence normale sur $[a, +\infty[$ pour $a > 0$.

Solutions des exercices

EXERCICE 59.1

1 Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Si $x < 0$ alors $-x > 0$ donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}} = +\infty$$

La série de terme général $\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$ diverge donc grossièrement.

- Si $x = 0$ alors pour tout entier $n \geq 0$, $\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}} = 1$ donc la série de terme général $\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$ diverge donc grossièrement.
- Si $x > 0$, on a :

$$\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

car par théorème des croissances comparées :

$$n^2\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}} = (\sqrt{n})^4\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

La série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann avec $2 > 1$). Par critère de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que la série de terme général $\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$ converge absolument donc converge.

Ainsi, f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Notons pour tout entier $n \geq 0$, f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x > 0,\ f_n(x) = \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$$

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout entier $n \geq 0$, la fonction f_n est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ donc :

$$0 \leq f_n(x) \leq f_n(a)$$

Ainsi, f_n est bornée sur $[a, +\infty[$ et :

$$0 \leq \|f_n\|_{[a,+\infty[,\infty} \leq f_n(a)$$

La série de terme général $f_n(a)$ converge (la série de fonctions converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$) donc par critère de comparaison, on en déduit que $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge normalement donc uniformément sur $[a, +\infty[$. Sachant que pour tout entier $n \geq 0$, f_n est continue sur $[a, +\infty[$, on en déduit par théorème de continuité d'une somme de série de fonctions que f est continue sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$ donc elle est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

2 On a :

$$\lim_{x\to+\infty} f_0(x) = \lim_{x\to+\infty} 1 = 1$$

et pour tout entier $n \geq 1$,

$$\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$$

D'après la question précédente, la série $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur $[1, +\infty[$ dont $+\infty$ est une extrémité. Par théorème d'interversion limite-somme, on en déduit que f admet une limite en $+\infty$ et on a :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\lim_{x\to+\infty} f_n(x) \right) = 1$$

60 Intervertir une limite et une intégrale sur un segment par convergence uniforme

Que faire ?

Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles ou complexes.

Supposons que :

- Pour tout entier naturel n, f_n est continue sur $[a,b]$.
- La suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction f.

Alors :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$$

ou encore :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Quand on ne sait pas !

- Commencer par étudier la convergence simple de la suite de fonctions.
- Pour montrer que la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, il suffit de montrer qu'à partir d'un certain rang, $f_n - f$ est bornée et que l'on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$$

Pour cela, on peut étudier les variations de $f_n - f$ afin de calculer explicitement $\|f_n - f\|_\infty$ ou alors trouver une suite $(\alpha_n)_{n\geq 0}$, convergeant vers 0, telle qu'à partir d'un certain rang :

$$\forall x \in [a,b],\ |f_n(x) - f(x)| \leq \alpha_n$$

Conseils

- Le théorème reste vrai si les fonctions sont continues par morceaux.
- Penser au théorème de convergence dominée en cas de non convergence uniforme.

Exemple traité

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 \left(x^2+1\right) \frac{n\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^{-x}}{n+x} \mathrm{d}x$.

SOLUTION

On pose pour tout entier $n \geq 1$ et tout $x \in [0,1]$,

$$f_n(x) = \left(x^2+1\right) \frac{n\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^{-x}}{n+x}$$

Soit $x \in [0,1]$. Alors :

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = (x^2+1)\mathrm{e}^x$$

Ainsi, la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers $f : x \mapsto (x^2+1)\mathrm{e}^x$ sur $[0,1]$.

Pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \geq 1$,

$$f_n(x) - f(x) = (x^2+1)\frac{x(\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^x)}{n+x}$$

D'après l'inégalité triangulaire et en utilisant que $n + x \geq n > 0$, on en déduit que :

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{2(1+\mathrm{e})}{n}$$

Ainsi, les fonctions $f_n - f$ sont bornées sur $[0,1]$ et on a :

$$\|f_n - f\|_{[0,1],\infty} \leq \frac{2(1+\mathrm{e})}{n}$$

et sachant que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2(1+\mathrm{e})}{n} = 0$$

On en déduit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$. Pour tout $n \geq 1$, f_n est continue sur $[0,1]$ et $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$ donc par interversion limite-intégrale, on en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 (x^2+1)\frac{n\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^{-x}}{n+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (x^2+1)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$$

Deux intégrations par parties permettent d'obtenir :

$$\int_0^1 (x^2+1)\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = 2\mathrm{e} - 3$$

Exercices

EXERCICE 60.1

Posons pour tout $n \geq 1$ et $x \in [0,1]$, $f_n(x) = \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$.

1. Étudier la convergence simple de $(f_n)_{n\geq 1}$ sur $[0,1]$.
2. Étudier la convergence uniforme de $(f_n)_{n\geq 1}$ sur $[0,1]$.
3. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \mathrm{d}x$.

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 60.1

1. Écrire $f_n(x)$ à l'aide de la fonction exponentielle.
2. Étudier $x \mapsto f_n(x) - \mathrm{e}^x$.
3. Vérifier les hypothèses du théorème d'interversion limite-intégrale.

Solutions des exercices

EXERCICE 60.1

1. Soit $x \in [0,1]$.
   - Si $x = 0$, $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = 1 \underset{n\to+\infty}{\to} 1$.
   - Si $x \neq 0$, $\dfrac{x}{n}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ donc :

$$\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{n}$$

puis par produit :

$$n\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} x$$

Ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) = x$$

puis par composition avec la fonction exponentielle (continue sur $\mathbb{R}$) :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\exp\left(n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right) = \mathrm{e}^x$$

Ainsi, pour tout $x \in [0,1]$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n = e^x$ donc $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers la fonction exponentielle sur $[0,1]$.

2 Pour tout entier $n \geq 1$, la fonction $g_n : x \mapsto f_n(x) - \mathrm{e}^x$ est dérivable sur $[0,1]$ et sa dérivée est :

$$g_n' : x \mapsto n \times \frac{1}{n}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1} - \mathrm{e}^x = \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1} - \mathrm{e}^x$$

Soit $n > 2$. On sait que pour tout réel $y > 1$, $\ln(1+y) \leq y$ donc pour tout $x \in [0,1]$,

$$\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \leq \frac{x}{n}$$

et en particulier, en utilisant que $n > n-1 > 0$,

$$\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \leq \frac{x}{n-1}$$

puis

$$(n-1)\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \leq x$$

En utilisant le fait que la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit que :

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1} \leq \mathrm{e}^x$$

Ainsi, pour tout $n \geq 2$ et tout $x \in [0,1]$, $g_n'(x) \leq 0$ donc g_n est décroissante. On remarque que cela reste vrai pour $n = 1$. Or on a :

$$g_n(0) = f_n(0) - 1 = 0 \text{ et } g_n(1) = f_n(1) - \mathrm{e} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n - \mathrm{e}$$

Ainsi, $f_n - f$ est bornée sur $[0,1]$ et on a :

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - \mathrm{e}\right|$$

Or on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n - \mathrm{e}$ (convergence simple en 1). On obtient donc que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers la fonction exponentielle sur $[0,1]$.

3 La suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers la fonction exponentielle sur $[0,1]$ et toutes les fonctions f_n sont continues sur $[0,1]$ donc d'après le théorème d'interversion limite/intégrale, on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e} - 1$$

61 Intervertir une somme et une intégrale sur un segment par convergence uniforme

Quand on ne sait pas !

Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle $I = [a, b]$ de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles ou complexes.

Supposons que :

- Pour tout entier naturel n, f_n est continue sur $[a, b]$.
- La série $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$.

Alors la série $\sum_{n\geq 0} \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x$ converge et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right) \mathrm{d}x$$

Que faire ?

- Pour vérifier la convergence uniforme d'une série de fonctions, il est possible d'étudier la convergence normale (fiche 56) ou d'étudier la suite des restes (voir fiche 57).

Conseils

- Une série entière de rayon de convergence $R > 0$ converge uniformément sur tout segment $[a, b] \subset]-R, R[$. Le théorème précédent s'applique donc directement dans ce cas (le terme général est une fonction polynomiale donc continue).
- Ce théorème s'applique uniquement sur un segment.

Exemple traité

Montrer que que pour tout $a \in [0,1[$,

$$-\ln(1-a) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

SOLUTION

Soit $a \in [0,1[$. La série entière $\sum_{n\geq 0} x^n$ a pour rayon de convergence 1. Elle converge donc uniformément sur $[0,a]$. De plus, pour tout $n \geq 0$, les fonctions $x \mapsto x^n$ sont continues sur $[0,a]$. On en déduit alors que :

$$\int_0^a \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^a x^n \mathrm{d}x$$

ce qui donne :

$$\int_0^a \frac{1}{1-x} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

et ainsi :

$$-\ln(1-a) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

Exercices

EXERCICE 61.1

On pose pour tout $x \in [0,1]$,

$$S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x}\right)$$

1 Justifier que S est bien définie.

2 Calculer $\displaystyle\int_0^1 S(x)\mathrm{d}x$.

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 61.1

1 Étudier la convergence simple de la série de fonctions.

2 Étudier la convergence normale de la série de fonctions puis faire apparaitre une somme télescopique.

Solutions des exercices

EXERCICE 61.1

1 On définit pour tout entier $n \geq 2$, $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in [0,1],\ f_n(x) = \frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} = \frac{2x}{n^2 - x^2}$$

Soit $x \in [0,1]$. Pour tout entier $n \geq 2$, $n^2 > x^2$ car $x \in [0,1]$. Ainsi, $f_n(x) \geq 0$. On a de plus :

$$f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2x}{n^2}$$

La série de terme général (positif) $\frac{1}{n^2}$ converge donc par critère de comparaison pour des séries à termes positifs, on en déduit que la série de terme général $f_n(x)$ converge. Ainsi, S est bien définie sur $[0,1]$.

2 Pour tout entier $n \geq 2$, f_n est continue sur $[0,1]$ (par quotient de fonctions continues avec un dénominateur ne s'annulant pas).

Étudions la convergence normale de $\sum_{n\geq 2} f_n$. Pour tout entier $n \geq 2$ et tout $x \in [0,1]$, on a :

$$n^2 - x^2 \geq n^2 - 1 > 0$$

Par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que :

$$0 \leq \frac{1}{n^2 - x^2} \leq \frac{1}{n^2 - 1}$$

Sachant que $0 \leq 2x \leq 2$, on en déduit que :

$$0 \leq f_n(x) \leq \frac{2}{n^2 - 1}$$

Ainsi, f_n est bornée sur $[0,1]$ et on a :

$$0 \leq \|f_n\|_\infty \leq \frac{2}{n^2 - 1}$$

On a de plus :

$$\frac{2}{n^2-1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{n^2}$$

La série de terme général (positif) $\frac{1}{n^2}$ converge donc par critère de comparaison pour des séries à termes positifs, on en déduit que la série de terme général $\frac{2}{n^2}$ converge puis de nouveau par comparaison, que $\sum_{n\geq 2} f_n$ converge normalement sur $[0,1]$ donc uniformément sur $[0,1]$. On en déduit alors que :

$$\int_0^1 S(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=2}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$$

Or on a pour tout entier $n \geq 2$,

$$\begin{aligned}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x &= \int_0^1 \left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x}\right)\mathrm{d}x \\ &= \left[-\ln(n-x) - \ln(n+x)\right]_0^1 \\ &= -\ln(n-1) - \ln(n+1) + 2\ln(n) \\ &= \ln(n) - \ln(n-1) - (\ln(n+1) - \ln(n))\end{aligned}$$

Par télescopage, on en déduit que pour tout entier $N \geq 2$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{N} \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x &= (\ln(N) - \ln(1)) - (\ln(N+1) - \ln(2)) \\ &= \ln(2) - (\ln(N+1) - \ln(N)) \\ &= \ln(2) - \ln\left(1 + \frac{1}{N}\right)\end{aligned}$$

Par continuité de la fonction logarithme népérien en 1, on en déduit que :

$$\lim_{N\to+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{N}\right) = 0$$

On obtient finalement :

$$\int_0^1 S(x)\mathrm{d}x = \ln(2)$$

62 Montrer que la limite d'une suite de fonctions est de classe C1. Cas des séries de fonctions

Quand on ne sait pas !

Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles ou complexes.

Supposons que :

- Pour tout entier naturel n, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.
- La suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement vers une fonction f sur I.
- La suite $(f'_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers une fonction g sur I (ou sur tout segment de I).

Alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f' = g$.

Par définition de convergence d'une série de fonctions, on en déduit le résultat analogue pour les séries de fonctions :

Supposons que :

- Pour tout entier naturel n, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.
- La série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur I.
- La série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} f'_n$ converge uniformément sur I (ou sur tout segment de I).

Alors la fonction $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $\displaystyle\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n$.

Que faire ?

- Pour vérifier la convergence uniforme d'une série de fonctions, il est possible d'étudier la convergence normale (fiche 56) ou d'étudier la suite des restes (fiche 57).

Conseils

- Le deuxième théorème est utile dans le cas de l'étude d'une fonction définie comme une somme de série. Il peut par exemple permettre l'étude des variations de celle-ci.
- Les différentes hypothèses doivent être parfaitement connues. En particulier, il ne faut pas confondre convergence simple et convergence uniforme.
- Il est très fréquent de se restreindre à des segments ou des intervalles du type $[a, +\infty[$.

Exemple traité

On pose pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(nx)}{n^2}$$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

SOLUTION

Posons pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \frac{\text{Arctan}(nx)}{n^2}$$

Pour tout réel $x > 0$, on a :

$$f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{n^2}$$

La série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann avec $2 > 1$). Par critère de comparaison des séries à termes positifs (la fonction Arctan est positive sur $\mathbb{R}_+^*$), on en déduit que la série de terme général $f_n(x)$ converge. Ainsi, $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour tout $n \geq 1$, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x > 0$,

$$f_n'(x) = \frac{1}{n^2} \times \frac{n}{1 + (nx)^2} = \frac{1}{n} \times \frac{1}{1 + n^2x^2}$$

Soit $[a, +\infty[\subset \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in [a, +\infty[$, on a par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$|f_n'(x)| \leq \frac{1}{n} \times \frac{1}{1 + a^2n^2} \leq \frac{1}{a^2} \times \frac{1}{n^3}$$

Ainsi, f_n' est bornée sur $[a, +\infty[$ et on a :

$$\|f_n'\|_{[a,+\infty[} \leq \frac{1}{a^2} \times \frac{1}{n^3}$$

Par comparaison à une série de Riemann convergente ($3 > 1$) et sachant que les termes généraux des séries étudiées sont positifs, on en déduit que la série de fonctions de terme général f_n' converge normalement donc uniformément sur tout intervalle $[a, +\infty[$ de $\mathbb{R}_+^*$. Par théorème de dérivation d'une série de fonctions, on en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(1+n^2x^2)}$$

Exercices

EXERCICE 62.1

On considère la série de fonctions de terme général u_n définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,1],\ \ u_n(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}$$

On pose alors pour tout $x \in [0,1]$,

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\right]$$

1. Démontrer que S est bien définie.
2. Démontrer que S est dérivable sur $[0,1]$.
3. Calculer $S'(1)$.

EXERCICE 62.2

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n :]1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x > 1,\ f_n(x) = \frac{(-1)^n}{\ln(nx)}$$

1. Justifier que $F : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ est bien définie sur $]1, +\infty[$.
2. Démontrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ et préciser les variations de F.

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 62.1

1. Étudier la convergence simple de la série de fonctions.
2. Vérifier les hypothèses du théorème de dérivabilité.
3. Faire apparaitre une somme télescopique.

EXERCICE 62.2

1. Étudier la convergence simple de la série de fonctions en utilisant le critère spécial des séries alternées.
2. Utiliser le reste d'ordre n de la série de fonctions de terme général f'_n.

Solutions des exercices

EXERCICE 62.1

1 Soit $x \in [0,1]$. Si $x = 0$, pour tout $n \geq 1$, $u_n(0) = 0$ donc $\sum_{n\geq 1} u_n(0)$ converge.

Si $x \neq 0$, quand n tend vers $+\infty$, en utilisant le développement limité de $\ln(1+x)$ en 0, on a :

$$u_n(x) \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{x^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc :

$$|u_n(x)| \underset{+\infty}{\sim} \frac{x^2}{2n^2}$$

Or la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann avec $2 > 1$) donc, par critère de comparaison des séries à termes positifs, $\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ converge absolument donc converge.
On en déduit que la série de fonctions de terme général u_n converge simplement sur $[0,1]$. La fonction S est donc définie sur $[0,1]$.

2 Vérifions les hypothèses de dérivabilité d'une série de fonctions :

- La série de fonctions de terme général u_n converge simplement sur $[0,1]$ d'après la question précédente.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et pour tout $x \in [0,1]$,

$$u'_n(x) = \frac{1}{x+n} - \frac{1}{n} = \frac{-x}{n(x+n)}$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [0,1]$,

$$|-x| = x \leq 1$$

et $n+x \geq n > 0$ donc par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit :

$$|u_n'(x)| \leq \frac{1}{n^2}$$

Ainsi u_n' est bornée sur $[0,1]$ et on a :

$$\|u_n'\|_\infty \leq \frac{1}{n^2}$$

Or la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge donc par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série de fonctions de terme général u_n' converge normalement, donc uniformément sur $[0,1]$.

Ainsi, la fonction S est de classe $\mathcal{C}^1$ et donc dérivable sur $[0,1]$.

3 D'après la question précédente,

$$S'(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n'(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \right)$$

Or pour tout entier $N \geq 1$, on a par télescopage :

$$\sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{N+1} - 1 \xrightarrow[N \to +\infty]{} -1$$

Ainsi, $S'(1) = -1$.

EXERCICE 62.2

1 Pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel $x > 1$, $nx > 1$ donc $(\ln(nx))_{n \geq 1}$ est une suite strictement positive. De plus, elle est strictement croissante (par croissance du logarithme). On en déduit que la suite de terme général $\frac{1}{\ln(nx)}$ est strictement positive et décroissante. De plus,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\ln(nx)} = 0$$

D'après le critère spécial des séries alternées, on en déduit que la série de terme général

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{\ln(nx)}$$

converge. Ainsi, F est bien définie sur $]1, +\infty[$.

2 Vérifions les hypothèses du théorème de dérivation d'une série de fonctions.

- La série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur $]1,+\infty[$.
- Pour tout entier $n \geq 1$, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1,+\infty[$ et pour tout réel $x > 1$,

$$f_n'(x) = (-1)^n \times \left(-\frac{1}{x}\right) \times \frac{1}{\ln(nx)^2} = \frac{(-1)^{n+1}}{x\ln(nx)^2}$$

Soit $x > 1$. La suite de terme général $\ln(nx)$ est croissante et strictement positive donc la suite de terme général $\ln(nx)^2$ est croissante et ainsi la suite de terme général

$$|f_n'(x)| = \frac{1}{x\ln(nx)^2}$$

est décroissante et positive. De plus,

$$\lim_{n\to+\infty} |f_n'(x)| = 0$$

Ainsi, la série de terme général $f_n'(x)$ est une série alternée et les hypothèses du critère spécial sont vérifiées. Par conséquent, la série de terme général $f_n'(x)$ converge. Posons pour tout entier $n \geq 1$ et $x \in]1,+\infty[$,

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k'(x)$$

D'après le critère spécial :

$$|R_n(x)| \leq |f_{n+1}'(x)| = \frac{1}{x\ln((n+1)x)^2} \leq \frac{1}{\ln(n+1)^2}$$

car $x > 1$. Ainsi, R_n est bornée sur $]1,+\infty[$ et :

$$0 \leq \|R_n\|_\infty \leq \frac{1}{\ln(n+1)^2}$$

Par théorème d'encadrement, on en déduit que la suite de terme général $\|R_n\|_\infty$ converge et a pour limite 0. Ainsi, $\sum_{n\geq 1} f_n'$ converge uniformément sur $]1,+\infty[$.

Par théorème de dérivation d'une série de fonctions, on en déduit que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1,+\infty[$ et pour tout réel $x > 1$,

$$F'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{x\ln(kx)^2}$$

D'après le critère spécial, $F'(x)$ est du signe de :

$$\frac{(-1)^2}{x\ln(x)^2} = \frac{1}{x\ln(x)^2} > 0$$

Ainsi, F est croissante sur $]1,+\infty[$.

Séries entières

Déterminer le rayon de convergence d'une série entière

Quand on ne sait pas !

Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ des séries entières à coefficients et de la variable z complexes.

- **(Rayon de convergence)**
  On appelle RAYON DE CONVERGENCE de la série entière $\sum a_n z^n$ la quantité R définie par :

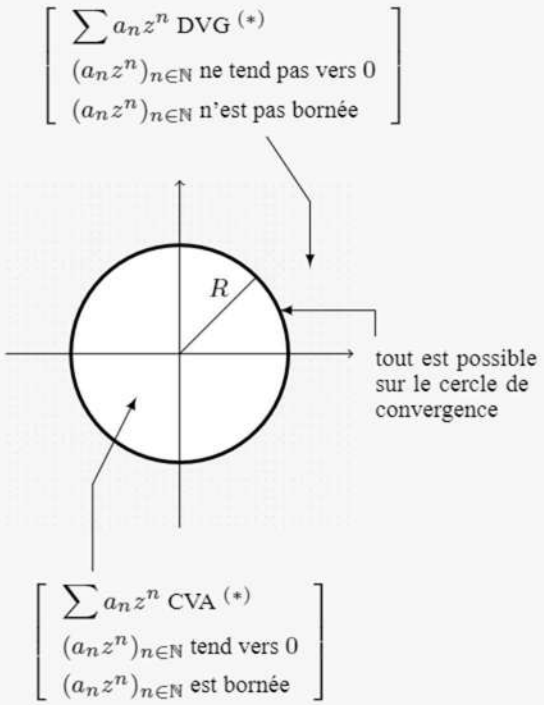
  $$R = \sup\{r \geq 0,\ (a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$$

  Le rayon de convergence R est un réel positif, ou bien $+\infty$.

- **(Autres caractérisations du rayon de convergence)**

  $$R = \sup\{r \geq 0,\ \sum a_n z^n \text{ CVA } {}^{(*)}\}$$
  $$= \sup\{r \geq 0,\ (a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ tend vers } 0\}$$

  $^{(*)}$ *où CVA et DVG signifient respectivement « converge absolument » et « diverge grossièrement ».*



- **(Propriété)** Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.
- **(Relations de comparaison)**
  On note R_a et R_b les rayons de convergence respectifs des séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$.
  - Si $|a_n| \leq |b_n|$, alors : $R_a \geq R_b$.
  - Si $|a_n| \underset{+\infty}{\sim} |b_n|$, alors : $R_a = R_b$.
  - Si $a_n = \underset{+\infty}{O}(b_n)$, alors : $R_a \geq R_b$.

■ **(Règle de d'Alembert)** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ qui ne s'annule pas à partir d'un certain rang. On suppose que $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

- Si $\ell < 1$, alors la série $\sum u_n$ converge absolument.
- Si $\ell > 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Que faire ?

■ Pour déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n z^n$, on peut utiliser une ou plusieurs des méthodes suivantes :

- **Méthode 1 :** on utilise la définition ou une des caractérisations pour encadrer R.
  - on cherche un réel positif r_1 tel que pour tout z vérifiant $|z| < r_1$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument (resp. la suite $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée ou tend vers 0). On obtient alors une minoration de R : $R \geq r_1$.
  - on cherche un réel positif r_2 tel que pour un z de module r_2, la série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement (resp. la suite $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée ou ne tend pas vers 0). On obtient alors une majoration de R : $R \leq r_2$.

  EXEMPLE 1 La série entière $\sum z^n$ a pour rayon de convergence $R = 1$.
  En effet, pour tout z tel que $|z| < 1$, la suite $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, d'où $R \geq 1$.
  Et pour $z = 1$, la suite $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0, d'où $R \leq 1$. Ainsi $R = 1$.
- **Méthode 2 :** la multiplication du terme général par une puissance de n ne modifie pas le rayon de convergence de la série entière.

  EXEMPLE 2 $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n^2}$, $\sum z^n$ et $\sum n^3 z^n$ ont même rayon de convergence $R = 1$.
- **Méthode 3 :** on utilise les relations de comparaison.

  EXEMPLE 3 La série entière $\sum n^{(-1)^n} z^n$ a pour rayon de convergence $R = 1$.
  En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a l'encadrement suivant : $1/n \leq n^{(-1)^n} \leq n$.
  Or les séries entières $\sum nz^n$ et $\sum \dfrac{z^n}{n}$ ont pour rayon de convergence 1, ce qui permet d'en déduire respectivement que $R \geq 1$ et $R \leq 1$. Ainsi, $R = 1$.

  EXEMPLE 4 La série entière $\sum (n^3 - 2n^2 + 1)z^n$ a pour rayon de convergence $R = 1$.
  En effet, sachant que $|n^3 - 2n^2 + 1| \underset{+\infty}{\sim} n^3$, la série entière $\sum (n^3 - 2n^2 + 1)z^n$ a même rayon de convergence que la série entière $\sum n^3 z^n$, à savoir $R = 1$.
- **Méthode 4 :** on applique la règle de d'Alembert à la série numérique $\sum a_n z^n$ pour un z non nul fixé.

  EXEMPLE 5 Le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{z^{2n}}{3^n}$ est $R = \sqrt{3}$.

En effet, calculons pour tout $z \neq 0$:

$$\left|\frac{\frac{z^{2(n+1)}}{3^{n+1}}}{\frac{z^{2n}}{3^n}}\right| = \left|\frac{z^2}{3}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{|z|^2}{3}$$

- Si $|z| < \sqrt{3}$, alors $\dfrac{|z|^2}{3} < 1$ et $\displaystyle\sum \frac{z^{2n}}{3^n}$ converge absolument. Donc $R \geq \sqrt{3}$.
- Si $|z| > \sqrt{3}$, alors $\dfrac{|z|^2}{3} > 1$ et $\displaystyle\sum \frac{z^{2n}}{3^n}$ diverge grossièrement. Donc $R \leq \sqrt{3}$.

Ainsi, le rayon de convergence vaut bien $R = \sqrt{3}$.

Conseils

- Pour déterminer des rayons de convergence avec efficacité, il est utile de connaître ceux des séries entières de référence, rappelés dans la *Fiche 64*.

Exemple traité

Déterminer le rayon de convergence R des séries entières suivantes :

1 $\displaystyle\sum n^3 z^n$ **2** $\displaystyle\sum_{n\geq 1} (\ln n) z^n$ **3** $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\operatorname{Arctan} n}{n^2} z^n$ **4** $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\operatorname{sh} n}{n} z^n$

SOLUTION

1 La série $\displaystyle\sum n^3 z^n$ a même rayon de convergence que la série $\displaystyle\sum z^n$, à savoir $R = 1$.

2 Comme $(\ln n)_{n\geq 1}$ ne tend pas vers 0, $\displaystyle\sum \ln n$ diverge grossièrement. Donc $R \leq 1$.
De plus, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, la suite $((\ln n) z^n)_{n\geq 1}$ tend vers 0 par croissances comparées. Donc $R \geq 1$.
Ainsi, le rayon de convergence recherché vaut $R = 1$.

3 Sachant que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \operatorname{Arctan} n = \frac{\pi}{2}$, on a l'équivalent suivant :

$$\left|\frac{\operatorname{Arctan} n}{n^2}\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2n^2}$$

Donc la série $\displaystyle\sum \frac{\operatorname{Arctan} n}{n^2} z^n$ a même rayon de convergence que la série $\displaystyle\sum \frac{z^n}{n^2}$, qui a même rayon de convergence que la série $\displaystyle\sum z^n$, à savoir $R = 1$.

4 On a l'équivalent suivant :

$$\left|\frac{\operatorname{sh} n}{n}\right| \underset{+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^n}{n}$$

Donc la série $\sum \frac{\operatorname{sh} n}{n} z^n$ a même rayon de convergence que la série $\sum \frac{\mathrm{e}^n}{n} z^n$, que l'on va déterminer grâce à la règle de d'Alembert. Calculons pour $z \neq 0$:

$$\left| \frac{\frac{\mathrm{e}^{n+1}}{n+1} z^{n+1}}{\frac{\mathrm{e}^n}{n} z^n} \right| = \left| \frac{n\mathrm{e}}{n+1} z \right| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}|z|$$

- Si $|z| < \frac{1}{\mathrm{e}}$, alors $\mathrm{e}|z| < 1$ et $\sum \frac{\operatorname{sh} n}{n} z^n$ converge absolument. Donc $R \geq \frac{1}{\mathrm{e}}$.
- Si $|z| > \frac{1}{\mathrm{e}}$, alors $\mathrm{e}|z| > 1$ et $\sum \frac{\operatorname{sh} n}{n} z^n$ diverge grossièrement. Donc $R \leq \frac{1}{\mathrm{e}}$.

Ainsi, le rayon de convergence recherché vaut $R = \frac{1}{\mathrm{e}}$.

Exercices

EXERCICE 63.1

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\sum_{n \geq 1} n^2 (\ln n) z^n$
2. $\sum n! z^n$
3. $\sum_{n \geq 1} \ln\left(1 + \sin \frac{1}{n}\right) z^n$
4. $\sum (3 + 4ni) z^n$
5. $\sum \left(\prod_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)} \right) z^n$
6. $\sum_{n \geq 1} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) z^n$

EXERCICE 63.2

Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n \geq 1} a_n z^n$, où a_n désigne :

1. le nombre de diviseurs de n pour tout entier $n \geq 1$,
2. le terme général d'une suite périodique quelconque.

EXERCICE 63.3

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

Montrer que la série $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$ a un rayon de convergence infini.

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 63.2

1. Tout entier $n \geq 1$ a un nombre de diviseurs compris entre 1 et n.
2. Toute suite périodique est bornée. Il convient cependant de traiter le cas de la suite nulle à part.

EXERCICE 63.3 Considérer un réel $r \in]0, R[$, puis majorer la quantité $|a_n z^n|$ par le terme général d'une série absolument convergente pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Solutions des exercices

EXERCICE 63.1

1 Par la méthode 2, les séries entières $\sum n^2(\ln n)z^n$ et $\sum (\ln n)z^n$ ont même rayon de convergence.

La question **2** de la rubrique *Exemple traité* permet alors de conclure que $R = 1$.

2 Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, la suite $(n!z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0. Ainsi, $R = 0$.

3 On a les équivalents suivants :

$$\left|\ln\left(1+\sin\frac{1}{n}\right)\right| \underset{+\infty}{\sim} \sin\frac{1}{n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

Donc la série entière $\sum \ln\left(1+\sin\frac{1}{n}\right) z^n$ a même rayon de convergence que la série entière $\sum \frac{z^n}{n}$, qui a même rayon de convergence que la série $\sum z^n$, à savoir $R = 1$.

4 On a l'équivalent suivant :

$$|3+4ni| = \sqrt{3^2+(4n)^2} \underset{+\infty}{\sim} 4n$$

Donc la série entière $\sum (3+4ni)z^n$ a même rayon de convergence que la série entière $\sum nz^n$, qui a même rayon de convergence que la série entière $\sum z^n$, à savoir $R = 1$.

5 Calculons pour tout $z \neq 0$:

$$\left|\frac{\left(\prod_{k=0}^{n+1}\frac{1}{(2k+1)}\right)z^{n+1}}{\left(\prod_{k=0}^{n}\frac{1}{(2k+1)}\right)z^{n}}\right| = \frac{|z|}{2n+3} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 < 1$$

Donc, par la règle de d'Alembert, la série entière $\sum \left(\prod_{k=0}^{n}\frac{1}{(2k+1)}\right) z^n$ converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$. Ainsi, le rayon de convergence recherché vaut $R = +\infty$.

6 On a l'équivalent suivant :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \underset{+\infty}{\sim} \ln n$$

Donc la série entière $\sum_{n\geq 1}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)z^n$ a même rayon de convergence que la série entière $\sum_{n\geq 1}(\ln n)z^n$, à savoir $R=1$ (cf le **2** de la rubrique *Exemple traité*).

EXERCICE 63.2

1 Tout entier $n\geq 1$ a un nombre de diviseurs compris entre 1 et n, autrement dit :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ 1\leq a_n\leq n$$

Or les séries $\sum z^n$ et $\sum nz^n$ ont pour rayon de convergence 1, ce qui permet d'en déduire respectivement que $R\leq 1$ et $R\geq 1$.
Ainsi, la série $\sum a_n z^n$, où a_n désigne le nombre de diviseurs de n, a pour rayon de convergence $R=1$.

2 On effectue la disjonction de cas suivante :

- Si la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est nulle, alors $R=+\infty$.
- Sinon, la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ n'est pas nulle, et étant périodique, ne tend pas vers 0.
  Donc la série $\sum a_n$ diverge grossièrement, d'où $R\leq 1$.
  Par ailleurs, étant périodique, $(a_n)_{n\geq 1}$ est bornée par une constante $M>0$ et :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ |a_n z^n|\leq M|z^n|$$

  Or la série $\sum z^n$ a pour rayon de convergence 1, donc $R\geq 1$. Finalement, $R=1$.

Ainsi, la série $\sum a_n z^n$, où a_n est le terme général d'une suite périodique, a pour rayon de convergence $R=+\infty$ si la suite est nulle, ou $R=1$ sinon.

EXERCICE 63.3

Soit $r\in]0,R[$. Sachant que R désigne le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$, il vient alors :

$$\exists M\in\mathbb{R}_+,\ \forall n\in\mathbb{N},\ |a_n r^n|\leq M$$

Soit $z\in\mathbb{C}$. On en déduit alors :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \left|\frac{a_n}{n!}z^n\right|=|a_n r^n|\times\left|\frac{(z/r)^n}{n!}\right|\leq M\times\left|\frac{(z/r)^n}{n!}\right|$$

Or la série exponentielle $\sum\frac{(z/r)^n}{n!}$ converge absolument pour tout $z\in\mathbb{C}$, donc par comparaison par majoration, il vient que la série $\sum\frac{a_n}{n!}z^n$ converge aussi absolument pour tout $z\in\mathbb{C}$. Ainsi, la série $\sum\frac{a_n}{n!}z^n$ a un rayon de convergence infini.

Calculer la somme d'une série entière

64

Quand on ne sait pas !

Dans un premier temps, on considère des séries entières $\sum a_n x^n$ à coefficients quelconques (réels ou complexes) et de la variable x RÉELLE.

(Sommes des séries entières réelles de référence)

Fonction	*Développement en série entière*	*Intervalle de validité*
$x \mapsto \mathrm{e}^x$	$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \operatorname{ch} x$	$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \operatorname{sh} x$	$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{1-x}$	$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$	$]-1,1[$
$x \mapsto \arctan x$	$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$	$]-1,1[$
$x \mapsto \ln(1+x)$	$x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$	$]-1,1[$
$x \mapsto (1+x)^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}$	$x \mapsto 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1))}{n!} x^n$	$]-1,1[$

(Dérivation et intégration terme à terme)
La somme d'une série entière réelle est dérivable et intégrable terme à terme sur son intervalle ouvert de convergence.

On considère désormais des séries entières $\sum a_n z^n$ à coefficients quelconques et de la variable z RÉELLE OU COMPLEXE.

- **(Sommes des séries entières complexes de référence)**

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad \text{et} \qquad \forall |z| < 1,\ \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$$

- **(Produit de Cauchy)** Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b. Alors pour tout $|z| < \min(R_a, R_b)$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \right)$$

Que faire ?

- Pour calculer la somme d'une série entière, on se ramène si possible aux sommes de séries entières de référence en utilisant une ou plusieurs des méthodes suivantes :
  - s'il y a des multiples de n ou $\frac{1}{n+1}$ par rapport aux séries de référence, alors on peut dériver ou intégrer les sommes terme à terme sur l'intervalle ouvert de convergence,
  - si la série entière est du type $\sum Q(n) z^n$ où Q est une fraction rationnelle, alors on peut décomposer Q en éléments simples,
  - si la série entière est du type $\sum a_n z^n$ où on peut exprimer a_n sous la forme d'une somme, alors on peut faire apparaître un produit de Cauchy.

  Souvent, il est en outre nécessaire d'utiliser des relations de Chasles et/ou des décalages d'indices pour forcer l'apparition exacte des sommes de séries de référence.
  Ces différentes méthodes sont illustrées et commentées dans la rubrique *Exemple traité*.

- Pour calculer une somme numérique, on peut essayer de l'interpréter comme la partie réelle ou imaginaire de la somme d'une certaine série entière, que l'on peut calculer par l'une des méthodes précédentes.

EXEMPLE 1 Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Après avoir justifié la convergence, calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{3^n n!}$.

On a la majoration suivante pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left| \frac{\sin(n\theta)}{3^n n!} \right| \leq \frac{1}{3^n n!}$$

Or $\displaystyle\sum \frac{(\frac{1}{3})^n}{n!}$ est une série exponentielle, donc convergente. Par comparaison, il vient alors que $\displaystyle\sum \frac{\sin(n\theta)}{3^n n!}$ est une série absolument convergente, a fortiori convergente.

Sachant que $e^z = e^{\Re e(z)}\big[\cos(\Im m\, z) + i \sin(\Im m\, z)\big]$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, on calcule alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{3^n n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\Im m(e^{in\theta})}{3^n n!} = \Im m\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\frac{e^{i\theta}}{3})^n}{n!}\right) = \Im m\big(e^{\frac{e^{i\theta}}{3}}\big) = e^{\frac{\cos\theta}{3}} \sin\left(\frac{\sin\theta}{3}\right)$$

Conseils

- Il est aussi possible de calculer la somme d'une série entière à l'aide d'une équation différentielle. Cette technique classique est traitée dans la *Fiche 67*.

Exemple traité

Déterminer le rayon de convergence, puis la somme des séries entières suivantes :

1 $\sum n^2 x^n$ **2** $\sum \dfrac{3n}{n+2} x^n$

3 $\sum a_n x^n$ où $a_n = \text{Card}\,\{(p,q) \in \mathbb{N}^2,\ p + 5q = n\}$

SOLUTION

1 ■ La série $\sum n^2 x^n$ a même rayon de convergence que la série $\sum x^n$, à savoir 1.

■ La présence de n^2 par rapport à la série de référence $\sum x^n$ incite à dériver deux fois la somme de cette série de référence. On calcule alors pour tout $x \in]-1,1[$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

↓ on dérive, puis on multiplie par x

$$\text{d'où :} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

↓ on dérive, puis on multiplie par x

$$\text{d'où :} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^n = \frac{(1-x)^2 \times 1 - (-2(1-x))x}{(1-x)^4} \times x$$

Ainsi, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3}$ pour tout $x \in]-1,1[$.

2 ■ La règle de d'Alembert permet de trouver que le rayon de convergence est 1.

■ La série entière est du type $\sum Q(n)x^n$, où Q est une fraction rationnelle, on peut décomposer Q en éléments simples et on calcule alors pour tout $x \in]-1,1[\setminus\{0\}$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3n}{n+2}x^n = 3\sum_{n=0}^{+\infty}\left(1-\frac{2}{n+2}\right)x^n = 3\sum_{n=0}^{+\infty}x^n - \frac{6}{x^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+2}}{n+2}$$

$$= \frac{3}{1-x} - \frac{6}{x^2}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{n} = \frac{3}{1-x} + \frac{6}{x} + \frac{6\ln(1-x)}{x^2}$$

décalage d'indice ; $\ln(1-x) = -x - \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$

Ainsi, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3n}{n+2}x^n = \begin{cases} \dfrac{3}{1-x}+\dfrac{6}{x}+\dfrac{6\ln(1-x)}{x^2} & \text{si } x \in]-1,1[\setminus\{0\} \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

3 ■ Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $A_n = \{(p,q) \in \mathbb{N}^2,\ p+5q = n\}$ de sorte que $a_n = \text{Card}\, A_n$, et R le rayon de convergence de la série étudiée.
D'une part, le couple $(n,0) \in A_n$, d'où $a_n \geq 1$ et R est alors majoré par le rayon de convergence de la série $\sum x^n$, à savoir 1.
D'autre part, $A_n \subset [\![0,n]\!]^2$, d'où $a_n \leq (n+1)^2$ et R est alors minoré par le rayon de convergence de la série $\sum (n+1)^2 x^n$, à savoir 1 (obtenu par la règle de d'Alembert).
Ainsi, le rayon de convergence de la série étudiée vaut $R = 1$.

■ On considère les suites $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies respectivement par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ c_n = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ d_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est un multiple de } 5 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On calcule alors pour tout $x \in]-1,1[$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{\substack{(k,\ell)\in[\![0,n]\!]^2 \\ k+5\ell=n}} 1\right)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{\substack{(k,\ell)\in[\![0,n]\!]^2 \\ 5\ell=n-k}} c_k d_{5\ell}\right)x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} c_k d_{n-k}\right)x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} d_n x^n\right)$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^{5n}\right) = \frac{1}{(1-x)(1-x^5)}$$

par définition de c_n et d_n ; sommes de référence

Ainsi, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{1}{(1-x)(1-x^5)}$ pour tout $x \in]-1,1[$.

Exercices

EXERCICE 64.1

Le but de cet exercice est de justifier l'existence et calculer la valeur de la somme :

$$A = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n} \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$$

1 Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{1}{n} \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) x^n$.

2 Calculer la somme de cette série entière sur son intervalle ouvert de convergence.

3 En déduire l'existence et la valeur de A.

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 64.1 2 Commencer par déterminer une expression simple de la dérivée de la somme, puis intégrer.

Solutions des exercices

EXERCICE 64.1

1 La série $\sum \frac{1}{n} \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) x^n$ a même rayon de convergence R que $\sum \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) x^n$.
D'une part, on a la majoration suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left|\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\right| \leq 1$$

Or la série $\sum x^n$ a pour rayon de convergence 1, d'où la minoration $R \geq 1$.
D'autre part, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\cos(2n\pi/3))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0, car sa suite extraite $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à 1, d'où la série numérique $\sum u_n$ est grossièrement divergente. D'où la majoration $R \leq 1$.
Ainsi, le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) x^n$ est $R = 1$.

2 On note S la somme de la série entière (au moins) définie sur $]-1, 1[$.

■ Par dérivation terme à terme, on calcule d'abord $S'(x)$ pour tout $x \in]-1,1[$:

$$\begin{aligned} S'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) x^{n-1} \overset{j=\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}}{=} \Re\mathrm{e}\left[j\sum_{n=1}^{+\infty}(jx)^{n-1}\right] = \Re\mathrm{e}\left[j\sum_{n=0}^{+\infty}(jx)^{n}\right] \\ &= \Re\mathrm{e}\left(\frac{j}{1-jx}\right) = \Re\mathrm{e}\left(\frac{j(1-\overline{j}x)}{(1-jx)(1-\overline{j}x)}\right) \underset{j+\overline{j}=-1}{=} \Re\mathrm{e}\left(\frac{j-x}{1+x+x^2}\right) \\ &\underset{\Re\mathrm{e}(j)=-\frac{1}{2}}{=} -\frac{1}{2}\times\frac{2x+1}{x^2+x+1} \end{aligned}$$

■ Il suffit alors d'intégrer pour en déduire que pour tout $x \in]-1,1[$:

$$S(x) = \underbrace{S(0)}_{=0} - \frac{1}{2}\int_0^x \frac{2t+1}{t^2+t+1}dt = -\frac{1}{2}\ln(1+x+x^2)$$

3 On remarque que $A = S(1/2)$ avec $1/2 \in]-1,1[$, donc A existe et vaut :

$$A = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) = S\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{7}{4}\right)$$

Montrer qu'une fonction est développable en série entière et calculer son développement

65

Quand on ne sait pas !

- **(Fonction développable en série entière au voisinage de 0)**
  Une fonction f est dite DÉVELOPPABLE EN SÉRIE ENTIÈRE AU VOISINAGE DE 0 (en abrégé DSE) s'il existe un réel $r > 0$ et une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R > r$ tels que :
$$\forall x \in]-r, r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

- **(« DSE implique $\mathscr{C}^\infty$ »)**
$$\text{Si} \left[\begin{array}{c} f \text{ est DSE} \\ \text{au voisinage de } 0 \end{array} \right], \text{ alors :} \quad \left[\begin{array}{c} f \text{ est de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ et coïncide avec sa} \\ \text{série de Taylor en 0 au voisinage de 0} \\ \text{i.e. } f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \text{ au voisinage de 0} \end{array} \right]$$

- **(Unicité du développement en série entière)** Soit $r > 0$, et $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières de rayons de convergence strictement supérieurs à r.
$$\text{Si} \left[\forall x \in]-r, r[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \right], \text{ alors :} \quad [\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = b_n\ ]$$

- Les développements en série entière de référence sont à consulter à la *fiche 64*.

Que faire ?

- Pour justifier qu'une fonction f est développable en série entière, on peut procéder d'une des manières suivantes :
  - on dit que f s'obtient par opérations usuelles (somme, produit, dérivation, intégration) de fonctions développables en série entière,

- on calcule directement son développement en série entière,
- on montre que la série de Taylor de f converge simplement vers f avec l'inégalité de Taylor-Lagrange.

- Pour calculer le développement en série entière d'une fonction f, on peut suivre une ou plusieurs des méthodes suivantes :
  - on utilise les développements usuels et les opérations sur les séries entières (somme, produit, dérivation, intégration),
  - si l'expression de f est une fraction rationnelle qui n'a pas 0 pour pôle, alors on la décompose en éléments simples, puis on développe chaque terme en série entière,
  - si f est une fonction définie par une intégrale ou une série, on développe souvent la fonction à l'intérieur de l'intégrale ou de la série en série entière, puis on intervertit les symboles,
  - on utilise la technique de l'équation différentielle (cf *fiches 66 et 67*),
  - on détermine le développement de Taylor de f.

  La rubrique *Exemple traité* illustre et commente certaines de ces méthodes.

Conseils

- Il est important de savoir qu'une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de 0 n'est pas nécessairement développable en série entière au voisinage de 0.

  EXEMPLE 1 On peut montrer que la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$ prolongée par 0 en 0 est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, mais que f n'est pas développable en série entière car elle ne coïncide pas avec son polynôme de Taylor en 0 qui est nul.

- Selon la technique employée, on peut aboutir à plusieurs résultats pour le développement en série d'une même fonction, résultats qui sont en fait tous identiques par unicité du développement en série entière. Ce procédé permet ainsi d'établir des formules par identification et est illustré dans l'exercice 1.

Exemple traité

Déterminer le développement en série entière des fonctions définies par les expressions suivantes :

1 $f(x) = \mathrm{e}^{-x}\sin x$ **2** $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - 5x + 6}$ **3** $h(x) = \displaystyle\int_0^x \sin(t^2)\mathrm{d}t$

SOLUTION

1 Les fonctions $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ et sin sont développables en série entière, donc leur produit f l'est aussi, et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathrm{e}^{-x}\sin x = \Im\mathrm{m}[\mathrm{e}^{(-1+i)x}] = \Im\mathrm{m}\left[\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1+i)^n}{n!}x^n\right] \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\Im\mathrm{m}[(\sqrt{2})^n\mathrm{e}^{i\frac{3n\pi}{4}}]}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\sqrt{2})^n}{n!}\sin\left(\frac{3n\pi}{4}\right)x^n \end{aligned}$$

2 En tant que fraction rationnelle n'admettant pas 0 pour pôle, g est développable en série entière et pour tout $x \in]-R, R[$, où R est le minimum des modules des pôles de g :

$$g(x) = \frac{1}{(x-2)(x-3)} = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2} = -\frac{1}{3}\times\frac{1}{1-\frac{x}{3}} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{1-\frac{x}{2}} = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{3^n} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{2^n}$$

Ainsi, $R = 2$ et pour tout $x \in]-2, 2[$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}}\right)x^n$.

3 Pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\sin(t^2) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}t^{4n+2}$$

Par théorème d'intégration terme à terme, il vient alors que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$h(x) = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}t^{4n+2}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\int_0^x t^{4n+2}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!(4n+3)}x^{4n+3}$$

Exercices

EXERCICE 65.1

Soit f la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = (\mathrm{ch}\, x)\cos x$$

1 Justifier que f est développable en série entière au voisinage de 0.

2 À l'aide de l'exponentielle imaginaire, calculer le développement en série entière de f.

3 À l'aide d'un produit de Cauchy, calculer le développement en série entière de f.

4 En déduire la formule suivante :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{2p+1}(-1)^k\binom{4p+2}{2k} = 0$$

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 65.1

2 S'inspirer du **1** de la rubrique *Exemple traité* pour débuter.
Utiliser ensuite la technique de factorisation par angle moitié pour factoriser une somme d'exponentielles imaginaires :

$$\begin{aligned}\forall(\theta_1,\theta_2)\in\mathbb{R}^2,\quad \mathrm{e}^{i\theta_1}+\mathrm{e}^{i\theta_2} &= \mathrm{e}^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}\left(\mathrm{e}^{i\frac{\theta_1-\theta_2}{2}}+\mathrm{e}^{-i\frac{\theta_1-\theta_2}{2}}\right)\\ &= 2\mathrm{e}^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}\cos\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)\end{aligned}$$

4 Utiliser l'unicité du développement en série entière, puis $n=2p+1$.

Solutions des exercices

EXERCICE 65.1

1 Les fonctions ch et cos sont développables en série entière au voisinage de 0, donc leur produit f est aussi développable en série entière au voisinage de 0.

2 On calcule pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}f(x) &= \Re\mathrm{e}[(\mathrm{ch}\,x)\mathrm{e}^{ix}]=\Re\mathrm{e}\left[\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}\times\mathrm{e}^{ix}\right]=\frac{1}{2}\Re\mathrm{e}\left[\mathrm{e}^{(1+i)x}+\mathrm{e}^{(-1+i)x}\right]\\ &= \frac{1}{2}\Re\mathrm{e}\left[\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(1+i)^n}{n!}x^n+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1+i)^n}{n!}x^n\right]\\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\Re\mathrm{e}[(1+i)^n+(-1+i)^n]}{n!}x^n\\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\Re\mathrm{e}[(\sqrt{2})^n\mathrm{e}^{i\frac{n\pi}{4}}+(\sqrt{2})^n\mathrm{e}^{i\frac{3n\pi}{4}}]}{n!}x^n\\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\sqrt{2})^n\Re\mathrm{e}[\mathrm{e}^{i\frac{n\pi}{2}}(\mathrm{e}^{-i\frac{n\pi}{4}}+\mathrm{e}^{i\frac{n\pi}{4}})]}{n!}x^n\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\sqrt{2})^n}{n!}\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)\Re\mathrm{e}(\mathrm{e}^{i\frac{n\pi}{2}})x^n\end{aligned}$$

$1+i=\sqrt{2}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$, $-1+i=\sqrt{2}\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{4}}$

« on factorise par l'angle moitié »

formule d'Euler

Ainsi, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\sqrt{2})^n}{n!}\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)x^n$.

3 On calcule pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= (\operatorname{ch} x)\cos x \\
&= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}\right) && \text{produit de Cauchy} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k)!} \times \frac{(-1)^{n-k}}{(2(n-k))!}\right) x^{2n} && \frac{1}{(2k)!(2n-2k)!} = \frac{1}{(2n)!}\binom{2n}{2k} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} \frac{(-1)^{n-k}}{(2n)!}\right) x^{2n} && \text{inversion d'indice } j = n-k \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{(2n)!}\sum_{j=0}^{n} \binom{2n}{2(n-j)} (-1)^j\right) x^{2n} && \text{formule de symétrie} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{(2n)!}\sum_{j=0}^{n} \binom{2n}{2j} (-1)^j\right) x^{2n}
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{(2n)!}\sum_{j=0}^{n} \binom{2n}{2j} (-1)^j\right) x^{2n}$.

4 Par unicité du développement en série entière de f, il vient alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{(2n)!}\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n}{2k} = \frac{(\sqrt{2})^n}{n!} \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

En particulier, pour $p \in \mathbb{N}$ et $n = 2p+1$, on trouve :

$$\frac{1}{(4p+2)!}\sum_{k=0}^{2p+1} (-1)^k \binom{4p+2}{2k} = \frac{(\sqrt{2})^{2p+1}}{(2p+1)!} \cos\left(\frac{(2p+1)\pi}{4}\right) \underbrace{\cos\left(\frac{(2p+1)\pi}{2}\right)}_{=0}$$

Ainsi, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{2p+1} (-1)^k \binom{4p+2}{2k} = 0$.

66 Utiliser des séries entières pour résoudre des équations différentielles

Quand on ne sait pas !

On note $\mathbb{K}$ pour désigner indifféremment $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
La résolution des équations différentielles à l'aide de séries entières est basée sur les résultats suivants :

- **(Unicité au problème de Cauchy 1)**
  Soit a, b des fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$.
  Alors le système suivant d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y' + a(x)y & = & b(x) \\ y(x_0) & = & y_0 \end{array} \right. \text{ admet une unique solution.}$$

- **(Unicité au problème de Cauchy 2)**
  Soit a, b, c des fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et $(y_0, y_1) \in \mathbb{K}^2$.
  Alors le système suivant d'inconnue $y \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y'' + a(x)y' + b(x)y & = & c(x) \\ y(x_0) & = & y_0 \\ y'(x_0) & = & y_1 \end{array} \right. \text{ admet une unique solution.}$$

- **(Unicité du développement en série entière)**
  Soit $R \in \overline{\mathbb{R}}_+^*$ et $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières à coefficients dans $\mathbb{K}$ et de rayons de convergence supérieurs ou égaux à R.

$$\text{Si } \left[\forall x \in]-R, R[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \right], \text{ alors : } \quad \left[\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = b_n \right]$$

- **(Développements en série entière de référence)**
  Les développements en série entière de référence sont à consulter à la *fiche 64*.

Que faire ?

- On considère une équation différentielle (E) dont on souhaite déterminer les solutions développables en série entière.
  On effectue alors un raisonnement par analyse-synthèse dont la démarche est la suivante :
  - Lors de la phase d'analyse, on suppose que l'équation différentielle (E) admet une solution f qui soit développable en série entière, disons :

$$f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \quad \text{à coefficients dans } \mathbb{K} \text{ et de rayon de convergence } R \in \overline{\mathbb{R}}_+^*,$$

    que l'on « injecte » ensuite dans l'équation différentielle pour obtenir des conditions nécessaires sur la suite des coefficients $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
    Au cours de cette étape, on a généralement besoin d'avoir recours aux dérivées successives de la fonction f que l'on écrira systématiquement sous la forme :

$$f' : x \mapsto \sum_{n=\boxed{1}}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \quad , \quad f'' : x \mapsto \sum_{n=\boxed{2}}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \quad , \quad \text{etc} \ldots$$

il est conseillé d'incrémenter la valeur de départ de l'indice de sommation en fonction de l'ordre de dérivation de f

  - Lors de la phase de synthèse, on vérifie généralement que le ou les candidats solutions de (E) développables en série entière (obtenus à l'issue de l'analyse) conviennent.
    Autrement dit, on vérifie que :
    - ces candidats solutions sont effectivement solution de (E) : généralement il n'y a rien à faire puisque l'on a tout fait pour !
    - le ou les rayons de convergence sont bien strictement positifs.
      Insistons sur le fait que la vérification (souvent négligée) de la stricte positivité du ou des rayons de convergence est obligatoire !
- La rubrique *Exemple traité* illustre la méthodologie de manière détaillée.
- Cette technique permet entre autres de déterminer une solution particulière d'une équation différentielle à coefficients polynomiaux.

Conseils

- Il est vivement conseillé de revoir les techniques calculatoires relatives à la manipulation du symbole $\sum$, le décalage d'indice et la relation de Chasles étant souvent utilisés.

Exemple traité

Résoudre le système suivant d'inconnue $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{K})$: $\left\{ \begin{array}{rcl} y'' + xy' + y & = & 1 \\ y(0) & = & 0 \\ y'(0) & = & 0 \end{array} \right.$

SOLUTION

Cherchons les éventuelles solutions développables en série entière au système posé :

Analyse. Supposons que le système posé admette une solution f développable en série entière sur un certain intervalle, c'est-à-dire qu'il existe $R \in \overline{\mathbb{R}}_+^*$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ tels que la fonction f définie sur $]-R, R[$ par :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

soit solution au système posé.
Cherchons alors des conditions nécessaires sur la suite des coefficients $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Sachant que f est solution de $y'' + xy' + y = 1$ sur $]-R, R[$, on peut alors écrire les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{lrcl} & \forall x \in]-R, R[, & f''(x) + xf'(x) + f(x) & = & 1 \\ \iff & \forall x \in]-R, R[, & \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n & = & 1 \\ \iff & \forall x \in]-R, R[, & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_n x^n & = & 1 \\ \iff & \forall x \in]-R, R[, & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \big[(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+1)a_n\big] x^n & = & 1 \end{array}$$

Par unicité du développement en série entière de la fonction constante égale à 1, on en déduit alors :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2a_2 + a_0 & = & 1 \\ \forall n \geq 1,\ (n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+1)a_n & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} a_2 & \underset{(\star)}{=} & \dfrac{1}{2}(1 - a_0) \\ \forall n \geq 1,\ a_{n+2} & \underset{(\star\star)}{=} & -\dfrac{a_n}{n+2} \end{array} \right.$$

Or, comme la fonction f est solution du système posé, elle en vérifie nécessairement les conditions initiales :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f(0) & = & 0 \\ f'(0) & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} a_0 & = & 0 \\ a_1 & = & 0 \end{array} \right.$$

Sachant que $a_1 = 0$ et $(\star\star)$, il vient que : $\forall p \geq 1,\ a_{2p+1} = 0$.
Sachant que $a_0 = 0$ et $(\star)$, il vient que : $a_2 = \frac{1}{2}$.
Grâce à $(\star\star)$, on en déduit alors que pour tout $p \geq 1$:

$$a_{2p} = -\frac{a_{2p-2}}{2p} = (-1)^2 \times \frac{a_{2p-4}}{2p(2p-2)} = \cdots = (-1)^{p-1} \times \frac{a_2}{2p(2p-2) \times \cdots \times 4} = \frac{(-1)^{p-1}}{2^p p!}$$

Si le système posé admet une solution développable en série entière sur un certain intervalle, alors il existe $R \in \overline{\mathbb{R}}_+^*$ tel que :

$$\forall x \in]-R, R[,\ f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n n!} x^{2n}$$

- *Synthèse.* Vérifions que la fonction f précédemment trouvée est bien solution du système posé, c'est-à-dire que :
  - la fonction f vérifie l'équation différentielle et les conditions initiales voulues : c'est bien le cas puisque l'on a tout fait pour !
  - le rayon de convergence R vaut $+\infty$: c'est une conséquence immédiate de la règle de d'Alembert.
- *Conclusion.* Le système posé admet f comme unique solution développable en série entière. Or ce système est un problème de Cauchy et, par unicité au problème de Cauchy, la fonction f trouvée est l'unique solution de ce système.
  Par ailleurs, il est bon de remarquer que f peut s'exprimer à l'aide de fonctions usuelles. En effet :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n n!} x^{2n} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{x^2}{2}\right)^n = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

Exercices

EXERCICE 66.1

On considère l'équation différentielle (E) suivante :

$$x(x+2)y'(x) + (x+1)y(x) = 1$$

Déterminer les solutions de (E) développables en série entière.

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 66.1 Reprendre le raisonnement mené dans la rubrique *Exemple traité*.

EXERCICE 66.1

Cherchons les éventuelles solutions développables en série entière de l'équation différentielle (E).

Analyse. Supposons que l'équation (E) admette une solution f développable en série entière sur un certain intervalle, c'est-à-dire qu'il existe $R \in \overline{\mathbb{R}}_+^*$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^n$ tels que la fonction f définie sur $]-R,R[$ par :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

soit solution de l'équation (E).
Cherchons alors des conditions nécessaires sur la suite des coefficients $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Sachant que f est solution de (E) sur $]-R,R[$, on peut écrire les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
& \forall x \in]-R,R[, && x(x+2)f'(x) + (x+1)f(x) &&= 1 \\
& \forall x \in]-R,R[, && x^2 f'(x) + 2xf'(x) + xf(x) + f(x) &&= 1 \\
\iff\ & \forall x \in]-R,R[, && \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+1} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n &&= 1 \\
\iff\ & \forall x \in]-R,R[, && \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1) a_{n-1} x^n + 2\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n &&= 1 \\
\iff\ & \forall x \in]-R,R[, && a_0 + (3a_1 + a_0)x + \sum_{n=2}^{+\infty} \left[n a_{n-1} + (2n+1)a_n\right] x^n &&= 1 \\
\iff\ & \forall x \in]-R,R[, && a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[n a_{n-1} + (2n+1)a_n\right] x^n &&= 1
\end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière de la fonction constante égale à 1, on en déduit alors :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_0 &=& 1 \\ \forall n \geq 1,\ n a_{n-1} + (2n+1)a_n &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a_0 &\underset{(\star)}{=}& 1 \\ \forall n \geq 1,\ a_n &\underset{(\star\star)}{=}& -\dfrac{n}{2n+1} \times a_{n-1} \end{array}\right.$$

Par applications itérées de $(\star\star)$, on en déduit que pour tout $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}
a_n &= -\frac{n}{2n+1} \times a_{n-1} = (-1)^2 \times \frac{n(n-1)}{(2n+1)(2n-1)} \times a_{n-2} \\
&= \cdots = (-1)^n \times \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times 1}{(2n+1)(2n-1) \times \cdots \times 3} \times a_0 \underset{(\star)}{=} \frac{(-2)^n (n!)^2}{(2n+1)!}
\end{aligned}$$

La formule précédemment établie reste encore vraie pour $n = 0$.
Si l'équation (E) admet une solution f développable en série entière sur un certain intervalle, alors elle est unique et il existe $R \in \overline{\mathbb{R}}_+^*$ tel que :

$$\forall x \in]-R, R[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n (n!)^2}{(2n+1)!} x^n$$

- *Synthèse.* Vérifions que la fonction f précédemment trouvée est bien une solution de (E) développable en série entière :
  - la fonction f est développable en série entière et vérifie bien l'équation (E) : c'est bien le cas puisque l'on a tout fait pour !
  - l'application de la règle de d'Alembert permet de trouver que le rayon de convergence R vaut 2. En effet, calculons pour tout $x \neq 0$:

$$\left| \frac{\frac{(-2)^{n+1}((n+1)!)^2}{(2n+3)!} x^{n+1}}{\frac{(-2)^n (n!)^2}{(2n+1)!} x^n} \right| = \frac{2(n+1)^2}{(2n+3)(2n+2)} |x| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{|x|}{2}$$

  - Si $|x| < 2$, alors $\frac{|x|}{2} < 1$ et $\sum \frac{(-2)^n (n!)^2}{(2n+1)!} x^n$ converge absolument. Donc $R \geq 2$.
  - Si $|x| > 2$, alors $\frac{|x|}{2} > 1$ et $\sum \frac{(-2)^n (n!)^2}{(2n+1)!} x^n$ diverge grossièrement. Donc $R \leq 2$.

  Ainsi, le rayon de convergence vaut bien $R = 2$, et il est bien strictement positif.
- *Conclusion.* L'équation différentielle (E) admet une unique solution f développable en série entière donnée par :

$$\forall x \in]-2, 2[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n (n!)^2}{(2n+1)!} x^n$$

67 Déterminer un développement en série entière en utilisant une équation différentielle

Quand on ne sait pas !

Pour déterminer un développement en série entière en utilisant une équation différentielle, sont nécessaires les résultats du cours suivants (détaillés aux *fiches 64* et *66*) :

- l'unicité au problème de Cauchy,
- l'unicité du développement en série entière,
- les développements en série entière de référence.

Que faire ?

Soit f une fonction dont on souhaite déterminer le développement en série entière.

- **Méthode 1 :** si ON NE SAIT PAS au préalable que f est développable en série entière, alors :
  - on commence par justifier ou établir que la fonction f est solution d'un certain problème de Cauchy,
  - ensuite, à l'aide d'un raisonnement par analyse ET synthèse (cf *fiche 66*), on montre (en la déterminant) que ce même problème de Cauchy admet une unique solution g développable en série entière,
  - enfin, par unicité au problème de Cauchy, on peut conclure que $f = g$.
- **Méthode 2 :** si ON SAIT déjà que f est développable en série entière, alors :
  - on commence par justifier ou établir que la fonction f est solution d'un certain problème de Cauchy,
  - ensuite, à l'aide d'un raisonnement par analyse SANS synthèse (cf *fiche 66*), on cherche la fonction f sous la forme d'une série entière.

Conseils

- Il y a de nombreuses similitudes avec la *fiche 66* qu'il est conseillé de faire en amont. Les justifications théoriques et les techniques calculatoires utilisées sont identiques.

Exemple traité

On considère la fonction f définie sur $I =]-1, 1[$ par :

$$f(x) = (\text{Arcsin}\, x)^2$$

et on pose $g = f'$.

1 Montrer que g est solution sur I de l'équation différentielle (E) suivante :

$$(1-x^2)y' - xy = 2$$

2 Déterminer les solutions de (E) développables en série entière et s'annulant en 0.

3 En déduire que g est développable en série entière, puis donner son développement.

4 Justifier que f est développable en série entière, puis donner son développement.

SOLUTION

1 Montrons que g est solution de (E) i.e. $\begin{cases} g \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } I & (i) \\ \forall x \in I,\ (1-x^2)g'(x) - xg(x) = 2 & (ii) \end{cases}$

- La fonction Arcsin est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, donc la fonction g l'est aussi par produit.
- Calculons pour tout $x \in I$:

$$\left| \begin{array}{rcl} g(x) & = & f'(x) = \dfrac{2\text{Arcsin}\, x}{\sqrt{1-x^2}} \\ g'(x) & = & \dfrac{2}{1-x^2} + \dfrac{2x\text{Arcsin}\, x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} \end{array} \right.$$

Un simple calcul permet alors de vérifier que : $\forall x \in I,\ (1-x^2)g'(x) - xg(x) = 2$.
Ainsi, la fonction g est bien solution de l'équation différentielle (E) sur $]-1, 1[$.

2 Cherchons les éventuelles solutions développables en série entière et s'annulant en 0 de l'équation différentielle (E).

- *Analyse.* Supposons que l'équation (E) admette une solution h développable en série entière sur un certain intervalle, c'est-à-dire qu'il existe $R \in \overline{\mathbb{R}}_+^*$ et une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tels que la fonction h définie sur $]-R, R[$ par :

$$h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

soit solution de l'équation différentielle (E).
Cherchons alors des conditions nécessaires sur la suite des coefficients $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Sachant que h est solution de (E) sur $]-R, R[$, on peut écrire les équivalences suivantes :

$$
\begin{aligned}
&\forall x \in]-R,R[, && (1-x^2)h'(x) - xh(x) &&= 2\\
\iff\ &\forall x \in]-R,R[, && \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} &&= 2\\
\iff\ &\forall x \in]-R,R[, && \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)a_{n-1}x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^n &&= 2\\
\iff\ &\forall x \in]-R,R[, && \underbrace{a_1}_{n=0} + \underbrace{(2a_2 - a_0)x}_{n=1} + \sum_{n=2}^{+\infty} \big[(n+1)a_{n+1} - n a_{n-1}\big]x^n &&= 2\\
\iff\ &\forall x \in]-R,R[, && a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \big[(n+1)a_{n+1} - n a_{n-1}\big]x^n &&= 2
\end{aligned}
$$

Par unicité du développement en série entière de la fonction constante égale à 2, on en déduit alors :

$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
a_1 &=& 2\\
\forall n \geq 1,\ (n+1)a_{n+1} - n a_{n-1} &=& 0
\end{array}
\right.
\iff
\left\{
\begin{array}{rcl}
a_1 &\underset{(\star)}{=}& 2\\
\forall n \geq 1,\ a_{n+1} &\underset{(\star\star)}{=}& \dfrac{n}{n+1} \times a_{n-1}
\end{array}
\right.
$$

Or la fonction h doit vérifier la condition initiale $h(0) = 0$ i.e. $a_0 = 0$, donc par applications itérées de $(\star\star)$, il vient que : $\forall p \geq 0,\ a_{2p} = 0$.
Toujours par applications itérées de $(\star\star)$, on en déduit que pour tout $p \geq 1$:

$$
\begin{aligned}
a_{2p+1} &= \frac{2p}{2p+1} \times a_{2p-1} = \frac{2p(2p-2)}{(2p+1)(2p-1)} \times a_{2p-3}\\
&= \cdots = \frac{2p(2p-2)\times\cdots\times 2}{(2p+1)(2p-1)\times\cdots\times 3} \times a_1 \underset{(\star)}{=} \frac{2^{2p+1}(p!)^2}{(2p+1)!}
\end{aligned}
$$

La formule établie ci-dessus reste encore vraie pour $p = 0$.
Si l'équation (E) admet une solution h développable en série entière sur un certain intervalle et s'annulant en 0, alors elle est unique et il existe $R \in \overline{\mathbb{R}}_+^*$ tel que :

$$
\forall x \in]-R,R[, \quad h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!} x^{2n+1}
$$

■ *Synthèse.* Vérifions que la fonction h précédemment trouvée est bien une solution de (E) développable en série entière et s'annulant en 0 :

– la fonction h est développable en série entière, vérifie bien l'équation (E) et s'annule en 0 : on a tout fait pour !

– l'application de la règle de d'Alembert permet de trouver que le rayon de convergence R vaut 1. En effet, calculons pour tout $x \neq 0$:

$$
\left| \frac{\dfrac{2^{2n+3}((n+1)!)^2}{(2n+3)!} x^{2n+3}}{\dfrac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!} x^{2n+1}} \right| = \frac{2^2(n+1)^2}{(2n+3)(2n+2)} \times |x|^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |x|^2
$$

- Si $|x| < 1$, alors $|x|^2 < 1$ et $\sum \dfrac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}x^{2n+1}$ converge absolument.
  Donc $R \geq 1$.
- Si $|x| > 1$, alors $|x|^2 > 1$ et $\sum \dfrac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}x^{2n+1}$ diverge grossièrement.
  Donc $R \leq 1$.

Ainsi, le rayon de convergence vaut bien $R = 1$, et il est strictement positif.

■ *Conclusion.* L'équation différentielle (E) admet une unique solution h développable en série entière et s'annulant en 0, et elle est donnée par :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

3 Considérons le problème de Cauchy suivant sur I :

$$\begin{cases} y' - \dfrac{x}{1-x^2}y &= \dfrac{2}{1-x^2} \\ y(0) &= 0 \end{cases}$$

Les questions **1** et **2** permettent d'établir que les fonctions g et h sont toutes deux solutions de ce même problème de Cauchy.
Ainsi, par unicité au problème de Cauchy, il vient que $g = h$, ce qui permet de conclure que la fonction g est développable en série entière, et :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

4 Sachant que $f' = g$ et $f(0) = 0$, il vient par théorème d'intégration terme à terme que la fonction f est aussi développable en série entière, et pour tout $x \in I$:

$$f(x) = \int_0^x f'(t)\mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}t^{2n+1}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}\int_0^x t^{2n+1}\mathrm{d}t$$

Ainsi,

$$\forall x \in]-1,1[, \quad (\operatorname{Arcsin} x)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+2)!}x^{2n+2}$$

Exercices

EXERCICE 67.1

On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \mathrm{e}^{-x^2} \int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$$

1 **a.** Justifier que F est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

b. Déterminer son développement en série entière.

2 **a.** Montrer que F est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) suivante :

$$y'(x) = -2xy(x) + 1$$

b. À l'aide de l'équation (E), déterminer le développement en série entière de F.

3 En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\binom{n}{k} = \frac{4^n}{(2n+1)\binom{2n}{n}}$$

➲ Source : d'après écrit Banque PT 2017

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 67.1

1 **b.** Reconnaître un produit de Cauchy.

3 Invoquer l'unicité du développement en série entière de F.

Solutions des exercices

EXERCICE 67.1

1 **a.** Sachant que la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, il vient que les fonctions $x \mapsto \mathrm{e}^{x^2}$ et $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ le sont aussi.
Ensuite, par théorème d'intégration terme à terme, la fonction $x \mapsto \int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.
Ainsi, la fonction F est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, en tant que produit de fonctions qui le sont.

b. Calculons pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
F(x) &= \mathrm{e}^{-x^2} \int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!}\right) \times \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{n!}\right) \mathrm{d}t \qquad \text{intégration terme à terme} \\
&= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}\right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)}\right) \\
&= x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\frac{(-1)^n}{n!}}_{b_n} (x^2)^n\right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{n!(2n+1)}}_{a_n} (x^2)^n\right) \qquad \text{produit de Cauchy} \\
&= x \times \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \underbrace{\frac{1}{k!(2k+1)}}_{a_k} \underbrace{\frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!}}_{b_{n-k}}\right) (x^2)^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{(2k+1)n!} \times \frac{n!}{k!(n-k)!}\right) x^{2n+1}
\end{aligned}$$

Ainsi, le développement en série entière de F est donné par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{(2k+1)n!} \binom{n}{k}\right) x^{2n+1}$$

2 **a.** La fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions qui le sont. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = -2x\mathrm{e}^{-x^2} \int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t + \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{e}^{x^2} = -2xF(x) + 1$$

Ainsi, la fonction F est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E).

b. Comme F est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Sachant que F est solution de (E) sur $\mathbb{R}$, on a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \mathbb{R}, && F'(x) &&= -2xF(x)+1\\
\iff\ &\forall x \in \mathbb{R}, && \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} &&= -2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1}+1\\
\iff\ &\forall x \in \mathbb{R}, && \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n &&= -2\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^n+1\\
\iff\ &\forall x \in \mathbb{R}, && \underbrace{a_1}_{n=0}+\sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n &&= 1+\sum_{n=1}^{+\infty}(-2a_{n-1})x^n
\end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière, il vient alors :

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ \forall n \geq 1,\ (n+1)a_{n+1} = -2a_{n-1} \end{cases} \iff \begin{cases} a_1 \underset{(\star)}{=} 1 \\ \forall n \geq 2,\ a_n \underset{(\star\star)}{=} -\dfrac{2}{n} \times a_{n-2} \end{cases}$$

Or la fonction F vérifie la condition initiale $F(0)=0$ i.e. $a_0=0$, donc par applications itérées de $(\star\star)$, il vient que : $\forall p \geq 0,\ a_{2p}=0$.
Toujours par applications itérées de $(\star\star)$, on en déduit que pour tout $p \geq 1$:

$$\begin{aligned}
a_{2p+1} &= \frac{(-2)^1}{2p+1} \times a_{2p-1} = \frac{(-2)^2}{(2p+1)(2p-1)} \times a_{2p-3}\\
&= \cdots = \frac{(-2)^p}{(2p+1)(2p-1)\times\cdots\times 3} \times a_1 \underset{(\star)}{=} \frac{(-1)^p 4^p p!}{(2p+1)!}
\end{aligned}$$

La formule établie ci-dessus reste encore vraie pour $p=0$.
Ainsi, le développement en série entière de F est donné par :

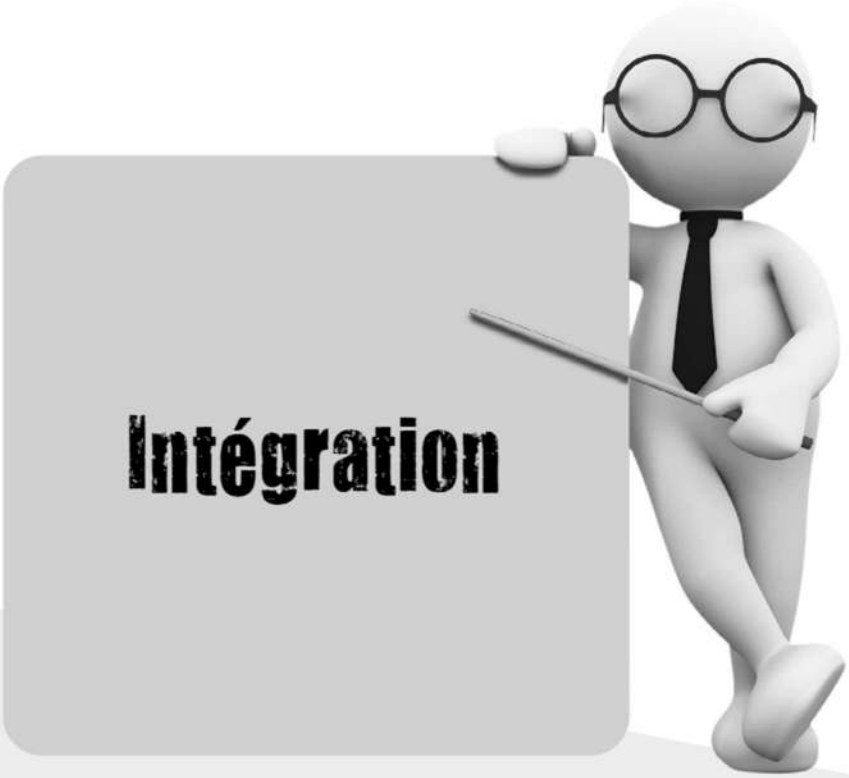
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 4^n n!}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

3 Par unicité du développement en série entière de la fonction F, il vient alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{(2k+1)n!}\binom{n}{k} = \frac{(-1)^n 4^n n!}{(2n+1)!}$$

Sachant que $(-1)^{-k} = (-1)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, il vient alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\binom{n}{k} = \frac{4^n}{2n+1} \times \frac{(n!)^2}{(2n)!} = \frac{4^n}{(2n+1)\binom{2n}{n}}$$


Intégration

Déterminer la nature d'une intégrale

68

Quand on ne sait pas !

Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle I, à valeurs réelles ou complexes.

- Si $I = [a, b[$ avec a réel et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ *converge* lorsque la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ admet une limite finie lorsque x tend vers b. Dans ce cas, on pose :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x \to b} \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

- Si $I =]a, b]$ avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et b réel, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ *converge* lorsque la fonction $x \mapsto \int_x^b f(t)\mathrm{d}t$ admet une limite finie lorsque x tend vers a. Dans ce cas, on pose :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x \to a} \int_x^b f(t)\mathrm{d}t$$

- Si $I =]a, b[$ avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ *converge* si pour un réel $c \in]a, b[$, $\int_a^c f(t)\mathrm{d}t$ et $\int_c^b f(t)\mathrm{d}t$ convergent. Dans ce cas, on pose :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t$$

  La valeur de cette intégrale est alors indépendante de c.

Si une intégrale n'est pas convergente, on dit qu'elle est divergente. Étudier la *nature* d'une intégrale, c'est étudier la convergence de celle-ci.

Que faire ?

- Pour étudier la nature d'une intégrale, on peut revenir à la définition et étudier l'existence d'une limite finie.

  EXEMPLE 1 Étudions la convergence de $I = \int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t$.

La fonction $t \mapsto e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$\int_0^x e^{-t}\mathrm{d}t = -e^{-x} + 1 \underset{x\to+\infty}{\to} 1$$

Ainsi, I converge et $I = 1$.

- Il faut connaitre parfaitement la convergence des intégrales usuelles au programme.
  - — Intégrales de Riemann. Pour tout réel α, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ et $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.
  - — Pour tout réel λ, L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\lambda > 0$.
  - — L'intégrale $\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t$ converge.
- Il est possible d'utiliser l'un des critères de comparaison suivants (on adapte l'énoncé pour un intervalle de la forme $]a, b]$) :

Soit $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b[$ à *valeurs positives*.

1. Supposons que pour tout $t \in [a, b[$, $f(t) \leq g(t)$.

- — Si $\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ converge alors $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge.
- — Si $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ diverge alors $\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ diverge.

2. Si $f(t) \underset{t\to b^-}{=} O(g(t))$ et si $\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ converge alors $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge.

3. Si $f(t) \underset{t\to b^-}{=} o(g(t))$ et si $\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ converge alors $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge.

4. Si $f(t) \underset{t\to b^-}{\sim} g(t)$ alors $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et $\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ sont de même nature.

EXEMPLE 2 Étudions la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$.

La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ est continue sur $[1, +\infty[$ et positive car pour tout $x \geq 1$, $\dfrac{1}{x} \in [0, 1]$ où la fonction sinus est positive. On sait que :

$$\sin(u) \underset{0}{\sim} u$$

Si x tend vers $+\infty$, $\dfrac{1}{x}$ tend vers 0 donc :

$$\frac{1}{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$$

Par positivité des intégrandes et par comparaison à une intégrale de Riemann convergente ($2 > 1$), on en déduit que l'intégrale étudiée converge.

- Soit a un réel et f une fonction continue par morceaux définie sur $]a, b]$ à valeurs réelles ou complexes. Si la fonction f admet une limite finie en a^+ alors $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est convergente. On dit que l'intégrale est faussement impropre en a. On adapte l'énoncé dans le cas d'un intervalle $[a, b[$ où $b \in \mathbb{R}$.

  EXEMPLE 3 Étudions la convergence de $I = \int_0^1 t\ln(t)\mathrm{d}t$.
  La fonction $t \mapsto t\ln(t)$ est continue sur $]0, 1]$ et est prolongeable par continuité en 0 car :

$$\lim_{t\to 0} t\ln(t) = 0$$

  d'après le théorème des croissances comparées. Ainsi l'intégrale I est faussement impropre en 0 donc convergente.
- On peut aussi étudier l'absolue convergence (voir fiche 69 liée à l'intégrabilité), utiliser une intégration par parties (voir fiche 70) ou un changement de variable (voir fiche 71).

Conseils

- Si l'on demande d'étudier la nature d'une intégrale et de calculer la valeur, il faut revenir à la définition pour répondre directement aux deux questions.
- Il est important de préciser les hypothèses du critère de comparaison utilisé (continuité et positivité). Pour le critère lié à l'équivalence, le résultat reste vrai si les fonctions sont toutes les deux négatives.

Exemple traité

Montrer que $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{(x-1)(x+1)}\mathrm{d}x$ converge et donner sa valeur.

SOLUTION

La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{(x-1)(x+1)}$ est continue sur $[2, +\infty[$ car le dénominateur l'est et ne s'annule par sur cet intervalle. Remarquons que pour tout réel x,

$$(x+1) - (x-1) = 2$$

donc

$$\int_2^X \frac{1}{(x-1)(x+1)}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_2^X \frac{(x+1)-(x-1)}{(x-1)(x+1)}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_2^X \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x$$

ce qui implique

$$\int_2^X \frac{1}{(x-1)(x+1)}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\ln(x-1) - \ln(x+1)\right]_2^X = \frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right]_2^X$$

ou encore :

$$\int_2^X \frac{1}{(x-1)(x+1)}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{X-1}{X+1}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{X-1}{X+1}\right) + \frac{\ln(3)}{2}$$

On sait que :

$$\lim_{X\to+\infty} \frac{X-1}{X+1} = 1$$

donc par continuité de la fonction logarithme népérien en 1 :

$$\lim_{X\to+\infty} \ln\left(\frac{X-1}{X+1}\right) = \ln(1) = 0$$

Ainsi,

$$\lim_{X\to+\infty} \frac{1}{2}\ln\left(\frac{X-1}{X+1}\right) + \frac{\ln(3)}{2} = \frac{\ln(3)}{2}$$

On en déduit que l'intégrale étudiée converge et vaut $\dfrac{\ln(3)}{2}$.

Exercices

EXERCICE 68.1

Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$ converge et donner sa valeur.

EXERCICE 68.2

Étudier la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

EXERCICE 68.3

Étudier la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2x}{x^2+x+1}\mathrm{d}x$.

EXERCICE 68.4

Déterminer pour quels réels x, $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$ converge.

La valeur de cette intégrale est dans ce cas notée $\Gamma(x)$. Ceci permet de définir la fonction Gamma d'Euler.

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 68.1 Revenir à la définition.

EXERCICE 68.2 Faire une étude en deux temps : étudier la nature de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2}\mathrm{d}t$ puis la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\mathrm{d}t$. Utiliser à chaque fois les critères de comparaison.

EXERCICE 68.3 Utiliser les critères de comparaison.

EXERCICE 68.4 L'intégrale définissant $\Gamma(x)$ a deux impropretés : 0 et $+\infty$.

Solutions des exercices

EXERCICE 68.1

La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$. Pour tout réel $X \geq 0$,

$$\int_0^X \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = [\mathrm{Arctan}(x)]_0^X = \mathrm{Arctan}(X) - \mathrm{Arctan}(0) = \mathrm{Arctan}(X)$$

On a :

$$\lim_{X\to+\infty} \mathrm{Arctan}(X) = \frac{\pi}{2}$$

Ainsi, l'intégrale étudiée converge et vaut $\dfrac{\pi}{2}$.

EXERCICE 68.2

La fonction $t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{1+t^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$. On a :

$$\frac{\ln(t)}{1+t^2} \underset{0}{\sim} \ln(t)$$

On sait que $\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t$ converge (intégrale de référence) donc par critère de comparaison pour des fonctions continues et négatives, on en déduit que $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2}\mathrm{d}t$ converge. Remarquons maintenant que :

$$\frac{\ln(t)}{1+t^2} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$$

car

$$t^{3/2} \times \frac{\ln(t)}{1+t^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

par théorème des croissances comparées. Par critère de comparaison pour des fonctions continues et positives, sachant que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{3/2}} \mathrm{d}t$ converge (intégrale de Riemann avec $\frac{3}{2} > 1$), on en déduit que $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2} \mathrm{d}t$ converge. Ainsi, on en déduit que $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2} \mathrm{d}t$ converge.

EXERCICE 68.3

La fonction $x \mapsto \dfrac{2x}{x^2+x+1}$ est continue (et positive) sur $\mathbb{R}_+$. On a :

$$\frac{2x}{x^2+x+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{x}$$

On sait que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} \mathrm{d}x$ diverge (intégrale de Riemann divergente) donc par critère de comparaison pour des fonctions continues et positives, on en déduit que $\int_1^{+\infty} \frac{2x}{x^2+x+1} \mathrm{d}x$ diverge donc que $\int_0^{+\infty} \frac{2x}{x^2+x+1} \mathrm{d}x$ diverge.

EXERCICE 68.4

Soit x un réel. La fonction $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue (et positive) sur $\mathbb{R}_+^*$. On a :

$$t^{x-1}e^{-t} \underset{t\to0}{\sim} t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}}$$

On sait que $\int_0^1 \frac{1}{t^{1-x}} \mathrm{d}t$ converge si et seulement si $1-x<1$ (intégrale de Riemann convergente) ce qui est vrai si et seulement si x est strictement positif. Par critère de comparaison pour des fonctions continues et positives, on en déduit que $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t} \mathrm{d}t$ converge si et seulement si x est strictement positif. Remarquons maintenant que :

$$t^{x-1}e^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

car

$$\lim_{t\to+\infty} t^{x+1}e^{-t} = 0$$

par croissances comparées si $x+1>0$ et par produit sinon. On sait que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} \mathrm{d}t$ converge (intégrale de Riemann convergente) donc par critère de comparaison, on en déduit que $\int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t} \mathrm{d}t$ converge.

On a donc montré que $\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t} \mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x>0$.

Montrer qu'une fonction est (ou n'est pas) intégrable

69

Quand on ne sait pas !

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'extrémités a et b (nombres réels ou $\pm\infty$).

Une fonction $f : I \to \mathbb{K}$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est dite intégrable si elle est continue par morceaux sur I et si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ est absolument convergente, c'est-à-dire si $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$ converge.

Soit $f : [a, b[\to \mathbb{K}$ et $g : [a, b[\to \mathbb{K}$ deux fonctions continues par morceaux.

- Si $|f| \leq |g|$ sur $[a, b[$ et si g est intégrable sur $[a, b[$ alors f est intégrable sur $[a, b[$.
- Si $f(t) \underset{t\to b^-}{=} O(g(t))$ et si g est intégrable sur $[a, b[$ alors f est intégrable sur $[a, b[$.
- Si $f(t) \underset{t\to b^-}{=} o(g(t))$ et si g est intégrable sur $[a, b[$ alors f est intégrable sur $[a, b[$.
- Si $f(t) \underset{t\to b^-}{\sim} g(t)$ alors f est intégrable sur $[a, b[$ si et seulement si g est intégrable sur $[a, b[$.

On adapte le résultat dans le cas d'un intervalle de la forme $]a, b]$.

Que faire ?

- On commence par justifier que la fonction est continue par morceaux.
- Dans de nombreux cas, il suffit d'utiliser l'un des critères précédents mais on peut aussi parfois revenir à la définition de la convergence d'une intégrale.
- Si la fonction $f : [a, b[\to \mathbb{K}$, continue par morceaux, est prolongeable par continuité en b alors elle est intégrable sur $[a, b[$. Il ne faut donc pas hésiter à étudier la limite de f en b.

Conseils

- Si il y a une double impropreté (intervalle de la forme $]a, b[$), on vérifie l'intégrabilité sur $]a, c]$ et sur $[c, b[$ pour $c \in]a, b[$ fixé, ce qui implique l'intégrabilité de la fonction sur $]a, b[$.

- Connaitre parfaitement l'intégrabilité des fonctions usuelles :
  - Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$ et est intégrable sur $]0, 1]$ si et seulement si $\alpha < 1$.
  - La fonction logarithme népérien est intégrable sur $]0, 1]$.
  - Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{-\lambda x}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ si et seulement si $\lambda > 0$.

Exemple traité

Étudier l'intégrabilité sur $[1, +\infty[$ de la fonction f définie par :

$$\forall x \in [1, +\infty[, \quad f(x) = \frac{\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1}}{x}$$

SOLUTION

Pour tout réel $x \geq 1$, $x^2+x+1 > 0$ et $x^2-x+1 = x(x-1)+1 > 0$ donc f est continue sur $[1, +\infty[$. Utilisons la quantité conjuguée pour montrer l'intégrabilité : pour tout réel $x \geq 1$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1}}{x} \\ &= \frac{x^2+x+1-(x^2-x+1)}{x(\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+1})} \\ &= \frac{2x}{x(\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+1})} \\ &= \frac{2}{x(\sqrt{1+1/x+1/x^2} + \sqrt{1-1/x+1/x^2})} \\ &\underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{2x} = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$ (fonction de référence) donc par critère de comparaison, f non plus.

Exercices

EXERCICE 69.1

Étudier l'intégrabilité sur $]0, 1[$ de la fonction f définie par :

$$\forall x \in]0, 1[, \quad f(x) = \frac{\ln(x)\ln(1-x)}{x}$$

EXERCICE 69.2

Étudier l'intégrabilité sur $[1, +\infty[$ de la fonction f définie par :

$$\forall x \geq 1, \quad f(x) = \frac{\ln^2(x)}{\sqrt{x^3 + x}}$$

EXERCICE 69.3

Étudier, suivant les valeurs du réel α, l'intégrabilité sur $]0, 1]$ de la fonction f définie par :

$$\forall x \in]0, 1], \quad f(x) = \frac{1 - \mathrm{ch}(x)}{x^\alpha}$$

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 69.1 Remarquer une fausse impropreté en 1.

EXERCICE 69.2 Déterminer un réel $\alpha > 1$ tel que :

$$f(x) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$$

EXERCICE 69.3 Utiliser un un développement limité de $\mathrm{ch}(x)$ à l'ordre 2 en 0.

Solutions des exercices

EXERCICE 69.1

La fonction f est continue sur $]0, 1[$. On a :

$$f(x) \underset{0}{\sim} \frac{-\ln(x)x}{x} = -\ln(x)$$

La fonction $x \mapsto -\ln(x)$ est intégrable sur $]0, 1/2[$ (fonction de référence) donc par critère de comparaison, f l'est aussi. Comme $\ln(x) \underset{1}{\sim} x - 1$, on a maintenant :

$$f(x) \underset{1}{\sim} (x-1)\ln(1-x) = -(1-x)\ln(1-x)$$

La fonction $x \mapsto -(1-x)\ln(1-x)$ est intégrable sur $]1/2, 1[$ car elle est prolongeable par continuité en 1 d'après le théorème des croissances comparées. Par critère de comparaison, on en déduit que f l'est aussi et finalement, f est intégrable sur $]0, 1[$.

EXERCICE 69.2

Pour tout réel $x \geq 1$, $x^3 + x > 0$ donc f est continue sur $[1, +\infty[$. On a :

$$f(x) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^{1,2}}\right)$$

car

$$x^{1,2} f(x) = \frac{x^{1,2} \ln(x)^2}{\sqrt{x^3 + x}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(x)^2}{x^{0,3}}$$

et

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)^2}{x^{0,3}} = 0$$

d'après le théorème des croissances comparées. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^{1,2}}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ (fonction de référence) donc par critère de comparaison, f l'est aussi.

EXERCICE 69.3

La fonction f est continue sur $]0, 1]$. On sait que :

$$\operatorname{ch}(x) \underset{0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

donc :

$$1 - \operatorname{ch}(x) \underset{0}{=} -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

On en déduit que :

$$1 - \operatorname{ch}(x) \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$$

et ainsi :

$$f(x) \underset{0}{\sim} -\frac{1}{2x^{\alpha-2}}$$

La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^{\alpha-2}}$ est intégrable sur $]0, 1]$ si et seulement si $\alpha - 2 < 1$ (fonction de référence), c'est-à dire si et seulement si $\alpha < 3$. Par critère de comparaison, on en déduit que f est intégrable sur $]0, 1]$ si et seulement si $\alpha < 3$.

Calculer une intégrale impropre à l'aide d'une intégration par parties

Quand on ne sait pas !

Soient f et g deux fonctions de classe C^1 sur un intervalle I d'extrémités a et b telles que $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$.
Si le produit fg admet des limites finies en a et en b alors les intégrales $\int_a^b f(t)g'(t)\mathrm{d}t$ et $\int_a^b f'(t)g(t)\mathrm{d}t$ sont de même nature. En cas de convergence, on a :

$$\int_a^b f(t)g'(t)\,dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\mathrm{d}t \tag{70.1}$$

où on a posé $[f(t)g(t)]_a^b = \lim\limits_{t\to b} f(t)g(t) - \lim\limits_{t\to a} f(t)g(t)$.

Que faire ?

- Pour appliquer le théorème d'intégration par parties, on identifie une fonction f et une fonction g', il convient donc de bien préciser à l'écrit qui sont les fonctions f et g ainsi que l'intervalle considéré.
- Il faut toujours vérifier la convergence du crochet et celle de l'une des deux intégrales avant d'appliquer la formule (70.1).
- Lorsque le crochet ne converge pas en a (respectivement en b), on peut choisir $\alpha \in]a, b[$ (respectivement $\beta \in]a, b[$) et travailler sur l'intervalle $[\alpha, b[$ (respectivement $]a, \beta]$) ou même sur un segment $[\alpha, \beta]$ puis passer à la limite.

Conseils

- On choisit comme fonction f à dériver celle dont la forme de départ semble difficile à primitiver et dont la dérivée devrait simplifier l'expression.
- Parfois, on peut poser $g' = 1$ lorsque la forme fg' n'est pas apparente.
- On dispose d'une certaine latitude dans le choix de la primitive de g' puisqu'elles diffèrent d'une constante. Cela peut éviter à certaines intégrales de diverger comme dans l'exemple suivant.

Exemple traité

Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$$

est convergente.

SOLUTION

Commentaire préliminaire sur cette question : la fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ est continue sur $]0, +\infty[$, prolongeable par continuité en 0 par la valeur 1 comme on peut le voir avec un équivalent. Toutefois, la convergence est difficile à prouver car elle n'est comparable à aucune fonction de référence. Il s'agit d'une intégrale convergente mais la fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ n'est pas intégrable ; c'est l'analogue des séries convergentes non absolument convergentes. Pour prouver la convergence, nous allons utiliser le théorème d'intégration par parties.
La fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ s'écrit naturellement sous la forme $\sin(t) \times \frac{1}{t}$, il ne serait pas judicieux d'intégrer la partie $t \mapsto \frac{1}{t}$ car elle ferait apparaitre une fonction du type $t \mapsto \ln(t) + \mu$ qui ne serait pas plus simple à primitiver ou à comparer. En revanche, sa dérivée $t \mapsto \frac{-1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$. Nous allons dont poser $f(t) = \frac{1}{t}$ et, par conséquent, $g'(t) = \sin(t)$. Les primitives de g' sont de la forme $\lambda - \cos(t)$ où λ est une constante réelle. Comme $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ n'est pas intégrable au voisinage de 0, nous allons poser $g(t) = 1 - \cos(t)$ car, au voisinage de 0, $g(t) \sim \frac{t^2}{2}$ ce qui permettra de prolonger par continuité en 0 les produits $t \mapsto f(t)g(t)$ et $t \mapsto f'(t)g(t)$.
En définitive, on pose $f : t \in]0, +\infty[\mapsto \frac{1}{t}$ et $g : t \in]0, +\infty[\mapsto 1 - \cos(t)$; f et g sont de classe C^1 sur $]0, +\infty[$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{1-\cos(t)}{t} = 0$ car $\left|\frac{1-\cos(t)}{t}\right| \leqslant \frac{2}{t}$ et comme $1 - \cos(t) \sim \frac{t^2}{2}$ au voisinage de 0, $\lim\limits_{t \to 0} \frac{1-\cos(t)}{t} = 0$. On peut appliquer le théorème d'intégration par parties dont on déduit que les intégrales

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} \mathrm{d}t$$

sont de même nature. Dès lors, $t \mapsto \frac{1-\cos(t)}{t^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$, prolongeable par continuité en 0 par la valeur $\frac{1}{2}$ donc intégrable sur $]0, 1]$. D'autre part, pour tout $t \in]0, +\infty[$,

$$\left|\frac{1 - \cos(t)}{t^2}\right| \leqslant \frac{2}{t^2}$$

or $t \mapsto \frac{2}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ d'après le critère de Riemann.
En conclusion, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2} \mathrm{d}t$ est convergente, donc $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$ converge également.

Exercices

EXERCICE 70.1

Existence et calcul de $\int_1^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(x)}{x^2}\mathrm{d}x$.

⊃ Source : CCP PC

EXERCICE 70.2

Soit $n \in \mathbb{N}$, établir la convergence de

$$\int_0^1 t^n \ln^2(t)\mathrm{d}t$$

et en calculer la valeur.

⊃ Source : IMT PSI

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 70.1 On effectue une intégration par parties pour faire disparaitre la partie en $x \mapsto \text{Arctan}(x)$ puis on fait une décomposition en éléments simples pour primitiver la partie restante.

EXERCICE 70.2 Il faut effectuer deux intégrations par parties pour faire «disparaitre» la fonction $t \mapsto \ln(t)$.

Solutions des exercices

EXERCICE 70.1

La fonction $x \mapsto \frac{\text{Arctan}(x)}{x^2}$ est continue sur l'intervalle $[1, +\infty[$ et, pour tout $x \in [1, +\infty[$, on a :

$$\left|\frac{\text{Arctan}(x)}{x^2}\right| \leqslant \frac{\pi}{2x^2}$$

or $x \mapsto \frac{\pi}{2x^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ d'après le critère de Riemann.

En conclusion, $\int_1^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(x)}{x^2}\mathrm{d}x$ est convergente.

On pose $f : x \mapsto \text{Arctan}(x)$ et $g : x \mapsto -\frac{1}{x}$ définies et de classe C^1 sur $[1, +\infty[$, comme $\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{\text{Arctan}(x)}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 1} -\frac{\text{Arctan}(x)}{x} = -\frac{\pi}{4}$ et que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(x)}{x^2}\mathrm{d}x$ converge, on peut effectuer une intégration par parties et on a :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(x)}{x^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(1+x^2)}$$

Enfin, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{1+x^2-x^2}{x(1+x^2)} &= \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} \\ &= (\ln(x))' - \left(\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right)' \\ &= \left(\ln\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\right)'\end{aligned}$$

d'où, en prêtant attention à ne pas séparer les deux termes en ln qui sont divergents séparément mais convergents ensemble :

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(x)}{x^2}\mathrm{d}x &= \frac{\pi}{4} + \left[\ln\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\right]_1^{+\infty} \\ &= \frac{\pi}{4} - \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln(2)\end{aligned}$$

car $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \ln 1 = 0$.

EXERCICE 70.2

Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $t \mapsto t^n \ln^2(t)$ est continue sur $]0,1]$ et prolongeable par continuité en 0 par la valeur 0 par croissances comparées. Dès lors, $\int_0^1 t^n \ln^2(t)\mathrm{d}t$ est convergente. Pour en calculer la valeur, on va effectuer deux intégrations par parties successives. L'objectif est de faire «disparaitre» les $\ln(t)$. On pose donc $f : t \mapsto \ln^2(t)$ et $g : t \mapsto \frac{t^{n+1}}{n+1}$ définies et de classe C^1 sur $]0,1]$. De plus, comme $\lim\limits_{t\to0^+} \frac{t^{n+1}}{n+1}\ln^2(t) = 0$ et que l'intégrale est convergente, on peut effectuer une intégration par parties et on a :

$$\begin{aligned}\int_0^1 t^n \ln^2(t)\mathrm{d}t &= \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\ln^2(t)\right]_0^1 - \int_0^1 2\frac{t^n}{n+1}\ln(t)\mathrm{d}t \\ &= -\frac{2}{n+1}\int_0^1 t^n \ln(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Cette nouvelle intégrale présente toujours un terme en $\ln(t)$, on va donc effectuer la seconde intégration par parties. On pose donc $f : t \mapsto \ln(t)$ et $g : t \mapsto \frac{t^{n+1}}{n+1}$ définies et de classe C^1 sur $]0,1]$ et comme $\lim\limits_{t\to0^+} \frac{t^{n+1}}{n+1}\ln(t) = 0$ et que l'intégrale $\int_0^1 t^n \ln(t)$ est convergente, on peut effectuer une intégration par parties et on a :

$$\begin{aligned}\int_0^1 t^n \ln(t)\mathrm{d}t &= \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\ln(t)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^n}{n+1}\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{(n+1)^2}\end{aligned}$$

En conclusion, $\int_0^1 t^n \ln^2(t)\mathrm{d}t = \frac{2}{(n+1)^3}$.

Calculer une intégrale impropre à l'aide d'un changement de variables

Quand on ne sait pas !

Si $\varphi :]\alpha, \beta[\to]a, b[$ est une bijection strictement croissante de classe C^1 et si $f :]a, b[\to \mathbb{C}$ est continue par morceaux, alors $\int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t$ est convergente si, et seulement si, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ l'est et, dans ce cas :

$$\int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Si $\varphi :]\alpha, \beta[\to]a, b[$ est une bijection strictement décroissante de classe C^1, on remplace $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ par $\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ dans l'énoncé précédent.

Que faire ?

Il faut toujours bien préciser explicitement les hypothèses :

- le caractère au moins continue par morceaux de f ;
- la bijectivité et le caractère de classe C^1 de la fonction φ ainsi que le domaine J (I est imposé par l'intégrale).

Conseils

- Lorsque la fonction à intégrer est une fraction rationnelle en e^t, il peut être judicieux d'effectuer un changement de variable en $t \mapsto e^t$ ou $t \mapsto e^{-t}$.
- Lorsque la fonction à intégrer est une fraction rationnelle en $\cos(t)$, $\sin(t)$ ou encore $\tan(t)$, les règles de Bioche indique quel changement de variable peut être judicieux (attention toutefois, ce n'est pas un théorème, c'est une simple règle).
- Lorsque la fonction à intégrer présente du $\ln(t)$ et des puissances de t, il peut être judicieux d'effectuer le changement de variable $t \mapsto \frac{1}{t}$

Exemple traité

Soit $a > 0$.

1 Montrer que $t \mapsto \frac{\ln t}{a^2+t^2}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$, puis que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{a^2+t^2}\mathrm{d}t = \frac{\pi \ln a}{2a} + \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

2 Montrer, à l'aide d'un changement de variable que $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x = 0$.

3 En déduire $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{a^2+t^2}\mathrm{d}t$.

SOLUTION

1 La fonction $t \mapsto \frac{\ln t}{a^2+t^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$ et comme, d'une part, $\frac{\ln t}{a^2+t^2} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{\ln t}{a^2}$ et que, d'autre part, $\frac{\ln t}{a^2+t^2} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$ cette fonction est intégrable sur $]0, +\infty[$.

La fonction $x \mapsto t = ax$ est bijective et de classe C^1 de $\mathbb{R}_+^*$ dans lui-même :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{a^2+t^2}\mathrm{d}t &= \int_0^{+\infty} \frac{\ln(ax)}{a^2(1+x^2)}a\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\ln(a)}{a(1+x^2)}\mathrm{d}x + \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{a(1+x^2)}\mathrm{d}x \\ &= \frac{\ln(a)}{a}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} + \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{(1+x^2)}\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi \ln a}{2a} + \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

2 La fonction $t \mapsto x = \frac{1}{t}$ est bijective et de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ à valeurs dans $]0, +\infty[$, on peut donc effectuer un changement de variable :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2}\mathrm{d}x &= \int_{+\infty}^0 \frac{\ln\left(\frac{1}{t}\right)}{1+\frac{1}{t^2}}\left(-\frac{dt}{t^2}\right) \\ &= \int_0^{+\infty} -\frac{\ln(t)}{1+t^2}\mathrm{d}t = -\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Par suite, on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2}\mathrm{d}x = 0$$

car x et t sont des variables muettes dans l'intégrale.

3 On déduit finalement que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{a^2+t^2}\mathrm{d}t = \frac{\pi \ln a}{2a}$$

Exercices

EXERCICE 71.1

Soit $a > 0$. Calculer :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1+a\cos^2(x)}$$

EXERCICE 71.2

Soit $f : t \in]0,+\infty[\mapsto \frac{\ln^2(t)}{1+t^2}$.

1 Montrer que f est intégrable sur $]0,+\infty[$.

2 Établir que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln^2(t)}{1+t^2}\mathrm{d}t = 2\int_0^1 \frac{\ln^2(t)}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

⊃ Source : D'après IMT PSI

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 71.1 On posera le changement de variable $t = \tan x$.

EXERCICE 71.2

1 L'intégrabilité de f se prouve par domination en 0 et $+\infty$ par des fonctions de la forme $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$.

2 Calculer l'intégrale de 1 à $+\infty$ à l'aide du changement de variable $t \mapsto \frac{1}{t}$.

EXERCICE 71.1

La fonction $x \mapsto \frac{1}{1+a\cos^2(x)}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc l'intégrale ne pose aucun problème de convergence. La fonction $\varphi\colon x \in [0,\pi/2[\mapsto t = \tan(x)$ est une fonction de classe C^1 bijective de $[0,\pi/2[$ vers $[0,\infty[$ donc on peut effectuer le changement de variable. Pour cela, on va utiliser le fait que, pour $x \in [0,\pi/2[$, $\frac{1}{\cos^2(x)} = 1+\tan^2(x)$, on a donc :

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1+a\cos^2(x)} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}+a} \times \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2(x)} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\tan^2(x)+a} \times \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2(x)} \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+a+t^2}\end{aligned}$$

cette dernière intégrale est nécessairement convergente car l'intégrale de départ l'était et que le changement de variable est valide. Par suite :

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1+a\cos^2(x)} &= \frac{1}{\sqrt{1+a}^2} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{1+a}}\right)^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+a}} \left[\operatorname{Arctan}\left(\frac{t}{\sqrt{1+a}}\right)\right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{1+a}}\end{aligned}$$

EXERCICE 71.2

1 La fonction f est continue sur l'intervalle $]0,+\infty[$. De $\lim\limits_{t\to 0^+} \sqrt{t}\frac{\ln(t)}{1+t^2} = 0$, on déduit que $f(t) = o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ or $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ d'après le critère de Riemann. De façon analogue, $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{3/2}\frac{\ln(t)}{1+t^2} = 0$ donc $f(t) = o\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$ or $t \mapsto \frac{1}{t^{3/2}}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ d'après le critère de Riemann. En conclusion, f est intégrable sur $]0,+\infty[$.

2 On considère l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$. La fonction f est continue sur $[1, +\infty[$. On pose alors $\varphi : t \in [1, +\infty[\mapsto x = \frac{1}{t}$ qui est de classe C^1 sur $[1, +\infty[$ et bijective décroissante de $[1, +\infty[$ à valeurs dans $]0, 1]$, on peut donc effectuer un changement de variable :

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t &= \int_1^0 \frac{\ln^2\left(\frac{1}{x}\right)}{1+\frac{1}{x^2}}\left(-\frac{dx}{x^2}\right)\\ &= \int_0^1 \frac{\ln^2(x)}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Par suite, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{\ln^2(t)}{1+t^2}\mathrm{d}t &= \int_0^1 \frac{\ln^2(t)}{1+t^2}\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} \frac{\ln^2(t)}{1+t^2}\mathrm{d}t\\ &= 2\int_0^1 \frac{\ln^2(t)}{1+t^2}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

72 Utiliser l'intégration des relations de comparaison

Quand on ne sait pas !

Soit $f \in \mathcal{CM}([a,b[,\mathbb{C})$ et $g \in \mathcal{CM}([a,b[,\mathbb{R}_+)$.

- Si $\displaystyle\int_a^b g$ diverge
  - si $f \underset{b}{=} O(g)$ alors $\displaystyle\int_a^x f \underset{x\to b}{=} O\left(\int_a^x g\right)$
  - si $f \underset{b}{=} o(g)$ alors $\displaystyle\int_a^x f \underset{x\to b}{=} o\left(\int_a^x g\right)$
  - si $f \underset{b}{\sim} g$ alors $\displaystyle\int_a^x f \underset{x\to b}{\sim} \int_a^x g$
- Si $\displaystyle\int_a^b g$ converge
  - si $f \underset{b}{=} O(g)$ alors $\displaystyle\int_x^b f \underset{x\to b}{=} O\left(\int_x^b g\right)$
  - si $f \underset{b}{=} o(g)$ alors $\displaystyle\int_x^b f \underset{x\to b}{=} o\left(\int_x^b g\right)$
  - si $f \underset{b}{\sim} g$ alors $\displaystyle\int_x^b f \underset{x\to b}{\sim} \int_x^b g$

Que faire ?

Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle de la forme $[a,b[$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.

- Dans le cas où l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ diverge, on veut étudier le comportement de la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f$ quand x tend vers b. On détermine alors une fonction g **positive** de référence. Selon que f soit dominée, négligeable ou équivalente à g au voisinage de b on

obtient une information sur le comportement asymptotique de F au voisinage de b. Ce cas est un analogue de l'étude des sommes partielles dans le cas des séries numériques divergentes.

- Dans le cas où l'intégrale $\int_a^b f$ converge, le comportement de la fonction $F : x \mapsto \int_a^x f$ quand x tend vers b n'est pas intéressant : elle tend vers l'intégrale $\int_a^b f$. On veut plutôt étudier le comportement de $R : x \mapsto \int_x^b f$ au voisinage de b. Par la relation de Chasles, la fonction tend vers 0 mais on peut obtenir des informations sur cette convergence. On détermine alors une fonction g **positive** de référence. Selon que f soit dominée, négligeable ou équivalente à g au voisinage de b on obtient une information sur le comportement asymptotique de R au voisinage de b. Ce cas est un analogue de l'étude de la suite des restes dans le cas des séries numériques convergentes.

Conseils

- Bien penser à vérifier et à écrire / dire que la fonction de référence est positive.
- Il est important de faire la différence entre les deux cas. Dans le cas des intégrales divergentes on étudie $F : x \mapsto \int_a^x f$; dans le cas des intégrales convergentes on étudie $R : x \mapsto \int_x^b f$.
- Noter que ce théorème ne donne que des informations asymptotiques. On **ne peut pas** l'utiliser pour calculer la valeur d'une intégrale convergente.
- Il est fréquent d'utiliser ce théorème après un changement de variables ou une intégration par parties.

Exemple traité

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f : x \mapsto \int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

1 Justifier que cette fonction est bien définie.

2 Montrer que pour tout réel x strictement positif,

$$f(x) = \frac{e^{-x^2}}{2x} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{2t^2}\,\mathrm{d}t$$

3 En déduire un équivalent simple de f en $+\infty$.

SOLUTION

1 La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$. De plus, pour $t \geq 1$, $0 \leq e^{-t^2} \leq e^{-t}$. On sait que $t \mapsto e^{-t}$ est intégrale sur $[0, +\infty[$ donc, par comparaison pour les fonctions positives, $t \mapsto e^{-t^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$. Cela implique que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$ est une intégrale convergente donc $f(x)$ est bien défini.

2 Soit $x > 0$, on remarque que pour $t \geq x$, $e^{-t^2} = \frac{2te^{-t^2}}{2t}$. On peut alors procéder à une intégration par parties. Comme $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{e^{-t^2}}{2t} = 0$ et que $f(x)$ est défini par une intégrale convergente,

$$f(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \left[-\frac{e^{-t^2}}{2t}\right]_x^{+\infty} + \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{2t^2}\mathrm{d}t$$

Finalement,

$$f(x) = \frac{e^{-x^2}}{2x} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{2t^2}\mathrm{d}t$$

3 La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est une fonction positive sur $[0, +\infty[$ et $\dfrac{e^{-t^2}}{2t^2}$ est négligeable devant e^{-t^2} quand t tend vers $+\infty$. Par intégration des relations de comparaison pour les intégrales convergentes, on sait que

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{2t^2}\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t\right)$$

On en déduit que

$$\frac{e^{-x^2}}{2x} = f(x) + \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{2t^2}\mathrm{d}t = f(x) + \underset{x\to+\infty}{o}(f(x))$$

et ainsi $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^{-x^2}}{2x}$.

Exercices

EXERCICE 72.1

1 Montrer que

$$\frac{\tan t}{t^2} \underset{0}{=} \frac{1}{t} + O(t)$$

2 En déduire $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \int_x^{3x} \frac{\tan t}{t^2}\mathrm{d}t$.

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 72.1

1 Commencer en déterminant un développement limité de $\tan t$ en 0 à l'ordre 3.

2 Utiliser la relation de Chasles.

Solutions des exercices

EXERCICE 72.1

1 La fonction tan est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Elle admet donc un développement limité à tout ordre en 0. De plus $\tan t \underset{0}{\sim} t$ car $\sin t \underset{0}{\sim} t$ et $\cos t \underset{0}{\sim} 1$. On utilise alors le fait que

$$\tan' t \underset{0}{=} 1 + \tan^2 t = 1 + t^2 + o(t^2)$$

En intégrant et en tenant compte que $\tan(0) = 0$ on obtient :

$$\tan t \underset{0}{=} t + O(t^3)$$

Il ne reste plus qu'à diviser par t^2 :

$$\frac{\tan t}{t^2} \underset{0}{=} \frac{1}{t} + O(t)$$

2 Soit $x > 0$

$$\int_x^{3x} \frac{\tan t}{t^2}\mathrm{d}t = \int_x^1 \frac{\tan t}{t^2}\mathrm{d}t - \int_{3x}^1 \frac{\tan t}{t^2}\mathrm{d}t = H(x) - H(3x)$$

en posant $H : x \mapsto \displaystyle\int_x^1 \frac{\tan t}{t^2}\mathrm{d}t$. En utilisant le résultat précédent, pour $x > 0$,

$$\begin{aligned} H(x) &\underset{0}{=} \int_x^1 \left(\frac{1}{t} + O(t)\right)\mathrm{d}t \\ &\underset{0}{=} [\ln t]_x^1 + \int_x^1 O(t)\mathrm{d}t \\ &\underset{0}{=} -\ln x + \int_x^1 O(t)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Cela implique que $H(x) + \ln(x)$ a une limite finie quand x tend vers 0 car l'intégrale $\int_0^1 t\mathrm{d}t$ est convergente. En écrivant alors

$$\begin{aligned}\int_x^{3x} \frac{\tan t}{t^2}\mathrm{d}t &= H(x) - H(3x) \\ &= H(x) - H(3x) + \ln(3x) - \ln(3x) \\ &= (H(x) + \ln x) - (H(3x) + \ln(3x)) + \ln 3\end{aligned}$$

on obtient, $\lim\limits_{x\to 0^+} \int_x^{3x} \frac{\tan t}{t^2}\mathrm{d}t = \ln 3$.

Remarque : En voyant que $\frac{\tan t}{t^2} \underset{0}{\sim} \frac{1}{t}$, par intégration des équivalents pour les intégrales divergentes, on obtient que $H(x) \underset{0}{\sim} \ln x$ mais on ne peut pas conclure directement car on ne peut pas, dans ce cas, soustraire les deux équivalents.

Utiliser le théorème de convergence dominée

Quand on ne sait pas !

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$ telles que

- (hypothèse de convergence) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f continue par morceaux ;
- (hypothèse de domination) il existe une fonction φ continue par morceaux, positive et intégrable sur I telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |f_n| \leqslant \varphi$$

alors, d'une part les applications $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et f sont intégrables, d'autre part on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n = \int_I \lim_{n\to+\infty} f_n = \int_I f$$

Que faire ?

- Déterminer la limite simple f en prenant bien garde aux éventuels points où elle n'est pas continue.
- Si la limite simple fait apparaitre plusieurs intervalles on peut chercher une fonction dominante par intervalle.

EXEMPLE 1

Pour $n \geqslant 2$, on pose $t \in [0, +\infty[\mapsto f_n(t) = \frac{1+t^n}{\sqrt{t}+t^{2n}}$. La limite simple dépend de la valeur de t considérée :

- Si $t \in [0, 1[$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$;
- Si $t = 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(1) = 1$;
- Si $t > 1$ alors $f_n(t) \sim_\infty \frac{t^n}{t^{2n}}$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t) = 0$.

en conclusion, la limite simple de la suite est

$$f : t \in [0, +\infty[\mapsto \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{t}} & \text{si } t \in [0,1] \\ 0 & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

Pour trouver la majoration, on va ainsi différencier les valeurs de t :

- Si $t \in [0,1]$, $|f_n(t)| \leqslant \frac{2}{\sqrt{t}}$;
- Si $t > 1$, $|f_n(t)| \leqslant \frac{2t^n}{t^{2n}} = \frac{2}{t^n}$

ainsi, on peut poser

$$\varphi : t \in [0, +\infty[\mapsto \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{t}} & \text{si } t \in [0,1] \\ \frac{2}{t^n} & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

qui est bien une fonction intégrable par application du critère de Riemann ($n \geqslant 2$). Dès lors, le théorème de convergence dominée s'applique et on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t = 2$$

Conseils

- Lorsque la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, on peut parfois choisir $\varphi = f$.
- Lorsque la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, on peut choisir $\varphi = f_0$.
- Dans le cas de fonctions définies sur des segments, une constante peur servir de fonction majorante.

Exemple traité

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : t \in \mathbb{R}^+ \mapsto \frac{\sin(nt)}{1+nt+t^2}$.
Montrer que la fonction f_n est intégrable, puis calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) \mathrm{d}t$.

Source : IMT PC

SOLUTION

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, d'une part $f_n(0) = 0$ et pour $t > 0$ on a $|f_n(t)| \leqslant \frac{1}{nt}$ donc, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(t) = 0$.
D'autre part, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $|f_n(t)| \leqslant \frac{1}{1+t^2}$ or $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est la dérivée de $t \mapsto \mathrm{Arctan}(t)$ qui est une fonction bornée sur $\mathbb{R}^+$ donc $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
Ainsi, le théorème de convergence dominée s'applique :
$\forall n \in \mathbb{N}^*$, f_n est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) \mathrm{d}t = 0$.

Exercices

EXERCICE 73.1

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 \ln(x)\ln(1-x^n)\mathrm{d}x$

⊃ Source : CCP MP

EXERCICE 73.2

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}t^n}{n!}\mathrm{d}t$.

1 Justifier l'existence de I_n.

2 On rappelle la définition de la fonction Γ d'Euler :

$$\forall x \in]0,+\infty[\quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$$

et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n+1) = n!$ (voir la fiche 68).

Montrer alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = 1 - \int_0^1 \frac{t^n}{n!}e^{-t}\mathrm{d}t$. En déduire la limite de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

⊃ Source : TPE PSI

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 73.1 Il faut montrer que les fonctions $f_n(x) = \ln(x)\ln(1-x^n)$ sont décroissantes sur $]0,1[$ et convergent simplement vers la fonction nulle. La fonction f_1 peut alors servir de majorante, elle est prolongeable en une fonction continue sur $[0,1]$ dont intégrable sur $]0,1[$.

EXERCICE 73.2 Soit $n \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}^+$, on pose $f_n(t) = \frac{e^{-t}t^n}{n!}$.

1 Les fonctions f_n sont continues sur $[1,+\infty[$ et sont en $\circ\left(\frac{1}{t^2}\right)$ au voisinage de $+\infty$.

2 On applique le théorème de convergence dominée pour calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t$.

EXERCICE 73.1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : x \in]0,1[\mapsto \ln(x)\ln(1-x^n)$. Les fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont continues sur $]0,1[$. Soit $x \in]0,1[$,

$$x^n \geqslant x^{n+1} \Leftrightarrow 1-x^n \leqslant 1-x^{n+1} \Leftrightarrow \ln(1-x^n) \leqslant \ln(1-x^{n+1}) \Leftrightarrow f_n(x) \geqslant f_{n+1}(x)$$

car $\ln(x) < 0$ ainsi, la suite de fonctions (f_n) est décroissante d'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |f_n| \leqslant f_1$$

La fonction f_1 est continue sur $]0,1[$ et comme $\ln(1-x) \underset{x\to 0}{\sim} -x$, $\lim\limits_{x\to 0} f_1(x) = 0$ donc f_1 est prolongeable par continuité en 0 par la valeur 0.
De plus, avec $h > 0$, $f_1(1-h) = \ln(1-h)\ln(h) \underset{h\to 0}{\sim} -h\ln(h)$ or $\lim\limits_{x\to 1} h\ln(h) = 0$ donc f_1 est également prolongeable par continuité en 1 par la valeur 0. Ainsi, f_1 est prolongeable en une fonction continue sur $[0,1]$ donc intégrable sur $]0,1[$.
Enfin, pour $x \in]0,1[$, on a facilement que $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-x^n) = 1$ d'où (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $]0,1[$. Le théorème de convergence dominée s'applique :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \ln(x)\ln(1-x^n)\mathrm{d}x = 0$$

EXERCICE 73.2

Soit $n \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}^+$, on pose $f_n(t) = \frac{e^{-t}t^n}{n!}$.

1 Les fonctions f_n sont continues sur $[1,+\infty[$ et $f_n(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ or $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ d'après le critère de Riemann donc I_n existe.

2 On rappelle la propriété de la fonction gamma d'Euler, $\Gamma(n+1) = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\mathrm{d}t = n!$ d'où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = 1$, en d'autres termes, $1 = \int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t + I_n$.
On va donc appliquer le théorème de convergence dominée à $\int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t$.
Comme $t \in [0,1]$, $t^n \leqslant 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t) = 0$ et de plus,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |f_n(t)| \leqslant e^{-t}$$

La fonction $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $[0,1]$ ce qui prouve la domination. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t = 0$$

par suite,

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = 1$$

Utiliser le théorème d'intégration terme à terme

Quand on ne sait pas !

Soit $(f_n)_{n\in N}$ une suite de fonctions définies et continues par morceaux sur un intervalle I. Si

- la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge simplement sur I ;
- la fonction $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue par morceaux sur I ;
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est intégrable sur I ;
- la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_I |f_n(t)|\,\mathrm{d}t$ converge ;

alors S est intégrable et $\int_I S(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\mathrm{d}t$.

Que faire ?

- Il faut soigneusement vérifier les hypothèses en n'en omettant aucune, notamment l'intégrabilité des fonctions f_n.
- La dernière hypothèse est celle demandant le plus de travail. Il est rare que l'on puisse se contenter de majorer $\int_I |f_n(t)|\,\mathrm{d}t$, l'expression finale de cette intégrale étant très proche de la conclusion du théorème.

Conseils

- Très souvent les fonctions f_n sont positives il n'y a alors pas de différence entre la vérification de la dernière hypothèse du théorème et sa conclusion.
- Il arrive fréquemment que la série ne soit pas explicite et qu'il faille avoir recours à un développement en série entière ; il s'agit souvent de ceux de la série géométrique ou de l'exponentielle.

Exemple traité

On rappelle que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi}{6}$. Calculer $\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t} \mathrm{d}t$.

Source : Saint-Cyr MP

SOLUTION

Pour $t \in]-1, 1[$, $\ln(1+t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} t^n}{n}$, on a donc

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t} \mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} t^{n-1}}{n} \mathrm{d}t$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $t \in [0, 1]$, on pose alors $f_n(t) = \frac{(-1)^{n-1} t^{n-1}}{n}$.

- la série de fonctions $\sum_{n \geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $]0, 1[$ car on l'a obtenue à partir d'un développement en série entière de rayon de convergence égal à 1 ;
- la somme de cette série $S(t) = \frac{\ln(1+t)}{t}$ est continue sur $]0, 1[$;
- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est en réalité continue sur le segment $[0, 1]$ donc intégrable sur $]0, 1[$;
- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^1 |f_n(t)| \, \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t^{n-1}}{n} \mathrm{d}t = \left[\frac{t^n}{n^2}\right]_0^1 = \frac{1}{n^2}$$

donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 |f_n(t)| \, \mathrm{d}t$ converge.

Le théorème d'intégration terme à terme s'applique et

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t} \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$

Classiquement, comme $S = \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge, $S_P = \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{(2n)^2}$ et $S_I = \sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$ convergent également et on a $S = S_P + S_I$. Par ailleurs, $S_p = \frac{1}{4} S$ d'où $S_I = \frac{3}{4} S$ et comme $S = \frac{\pi^2}{6}$, on en déduit que :

$$S_P = \frac{\pi^2}{24} \quad \text{et} \quad S_I = \frac{\pi^2}{8}$$

Enfin, comme S_p et S_I convergent, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = -S_p + S_I = \frac{\pi^2}{12}$$

En conclusion :

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{12}$$

Exercices

EXERCICE 74.1

Soit $I = \int_0^1 \frac{t\ln^2(t)}{(1-t)^2}\mathrm{d}t$

1 Justifier l'existence de I.

2 Montrer que :

$$I = 2\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}\right)$$

➲ Source : CCP PSI

EXERCICE 74.2

1 Montrer que la fonction $t \mapsto e^t\ln(t)$ est intégrable sur $]0,1[$.

2 Établir :

$$\int_0^1 e^t\ln(t)\mathrm{d}t = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\times n!}$$

➲ Source : ICNA MP

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 74.1

1 La fonction $t \mapsto \frac{t\ln^2(t)}{(1-t)^2}$ est prolongeable en une fonction continue sur $[0,1]$.

2 On identifie $t \mapsto \frac{1}{(1-t)^2}$ comme la dérivée de $t \mapsto \frac{1}{1-t}$ qui est développable en série entière au voisinage de l'origine avec rayon de convergence égal à 1. On peut ainsi appliquer le théorème d'intégration terme à terme à $\sum_{n\geqslant 1} nt^n\ln^2(t)$.

Le calcul de $\int_0^1 \left|nt^n\ln^2(t)\right|\mathrm{d}t$ se fait à l'aide de deux intégrations par parties (voir exercice 2 de la fiche 70).

EXERCICE 74.2

1 La fonction $t \mapsto e^t \ln(t)$ est continue sur $]0,1]$ et équivalente à la fonction $t \mapsto \ln(t)$ au voisinage de 0 dont l'intégrale est une intégrale de référence.

2 On utilise le développement en série entière de $t \mapsto e^t$ et on applique le théorème d'intégration terme à terme à $\sum_{n\geqslant 0} \frac{t^n \ln(t)}{n!}$.

Solutions des exercices

EXERCICE 74.1

1 $t \mapsto \frac{t\ln^2(t)}{(1-t)^2}$ est continue sur $]0,1[$, prolongeable par continuité (à gauche) en 0 par la valeur 0 (croissances comparées).

La fonction $t \mapsto \frac{\ln(1)-\ln(t)}{1-t}$ s'interprète comme le taux d'accroissement de la fonction $t \mapsto \ln(t)$ en 1, il tend donc vers 1 en 1. Dès lors $\lim\limits_{t\to 1} \frac{t(\ln(t))^2}{(1-t)^2} = \lim\limits_{t\to 1} t\left(\frac{\ln(t)}{1-t}\right)^2 = 1$.

Ainsi, $t \mapsto \frac{t\ln^2(t)}{(1-t)^2}$ est prolongeable en une fonction continue sur $[0,1]$, par suite I existe.

2 La fonction $t \mapsto \frac{1}{(1-t)^2}$ est la dérivée de $t \mapsto \frac{1}{1-t}$ qui est développable en série entière au voisinage de 0 avec un rayon de convergence égal à 1, donc $t \mapsto \frac{1}{(1-t)^2}$ l'est également et on a, pour tout $t \in [0,1[$, $\frac{1}{(1-t)^2} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} nt^{n-1}$. Dès lors, pour tout $t \in]0,1[$, $\frac{t\ln^2(t)}{(1-t)^2} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} nt^n \ln^2(t)$.

On vérifie alors les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme.

- la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} nt^n \ln^2(t)$ converge simplement sur $]0,1[$ car on l'a obtenue à partir d'un développement en série entière de rayon de convergence égal à 1 ;
- la somme de cette série $S(t) = \frac{t\ln^2(t)}{(1-t)^2}$ est continue sur $]0,1[$;
- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $t \mapsto nt^n \ln^2(t)$ est intégrable sur $]0,1[$ car prolongeable par continuité sur le segment $[0,1]$;
- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le calcul de $\int_0^1 \left|nt^n \ln^2(t)\right| \mathrm{d}t$ se déduit de celui de $\int_0^1 t^n \ln^2(t)\mathrm{d}t$ qui se fait à l'aide de deux intégrations par parties successives (voir exercice 2 de la fiche 70). On a alors,

$$\int_0^1 \left|nt^n \ln^2(t)\right| \mathrm{d}t = \frac{2n}{(n+1)^3} = \frac{2(n+1-1)}{(n+1)^3} = 2\left(\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{(n+1)^3}\right)$$

qui est la différence de deux termes généraux de séries de Riemann convergentes, donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} \int_0^1 \left|nt^n \ln^2(t)\right| \mathrm{d}t$ converge.

Le théorème d'intégration terme à terme s'applique, on a :

$$\begin{aligned} I &= 2\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^2}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^3}\right)\\ &= 2\left(\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^2}-\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^3}\right)\\ &= 2\left(\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}-1\right)-\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}-1\right)\right)\\ &= 2\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}\right) \end{aligned}$$

en ré-indiçant et en ajoutant/retranchant le premier terme de chacune des sommes pour obtenir la formule demandée par l'énoncé.

EXERCICE 74.2

1 La fonction $t \mapsto e^t \ln(t)$ est continue sur $]0,1]$ et $e^t \ln(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} \ln(t)$ or $t \mapsto \ln t$ est intégrable sur $]0,1]$ en tant qu'intégrale de référence. Ainsi, $t \mapsto e^t \ln(t)$ est intégrable sur $]0,1]$.

2 On utilise le développement en série entière de $t \mapsto e^t$ dont le rayon de convergence est infini, d'où, pour tout $t \in]0,1]$, $e^t \ln(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n \ln(t)}{n!}$. On pose alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in]0,1]$, $f_n(t) = \frac{t^n \ln(t)}{n!}$.
On vérifie alors les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :

- la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0,1]$ car on l'a obtenue à partir d'un développement en série entière de rayon de convergence égal à $+\infty$;
- la somme de cette série $S(t) = e^t \ln(t)$ est continue sur $]0,1]$;
- $f_0(t) = \ln(t)$ est intégrable sur $]0,1]$ en tant qu'intégrale de référence et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est en réalité continue sur le segment $[0,1]$ car prolongeable par continuité en 0 par la valeur 0 donc en particulier intégrable sur $]0,1]$;
- pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^1 |f_n(t)|\,\mathrm{d}t = -\int_0^1 \frac{t^n}{n!}\ln(t)\mathrm{d}t$$

dès lors, comme $t \mapsto \frac{t^{n+1}}{(n+1)\times n!}$ et $t \mapsto \ln(t)$ sont de classe C^1 sur $]0,1]$ et que

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{t^{n+1}}{(n+1)\times n!}\ln(t) = 0 = \lim_{t\to 1^-} \frac{t^{n+1}}{(n+1)\times n!}\ln(t)$$

on peut effectuer une intégration par parties. On a alors

$$\int_0^1 |f_n(t)|\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t^n}{(n+1)\times n!}\mathrm{d}t = \frac{1}{(n+1)^2\times n!}$$

qui est le terme général d'une série convergente (car $\circ\left(\frac{1}{n^2}\right)$ par exemple), on en déduit donc $\sum\limits_{n\geqslant 0}\int_0^1 |f_n(t)|\,\mathrm{d}t = \sum\limits_{n\geqslant 0}\frac{1}{(n+1)^2\times n!}$ est convergente.

Le théorème d'intégration terme à terme s'applique, on a donc

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^t\ln(t)\mathrm{d}t &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n}{n!}\ln(t)\mathrm{d}t\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{1}{(n+1)^2\times n!}\\ &= -\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)\times(n+1)!} = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\times n!}\end{aligned}$$

en procédant comme précédemment tout en prenant bien garde au signe. Le ré-indiçage de l'étape finale permet d'obtenir la forme demandée par l'énoncé.

Étudier la continuité et la dérivabilité d'une intégrale à paramètre

Quand on ne sait pas !

On désigne par I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et par f une fonction définie sur $I \times J$ à valeurs réelles ou complexes. Il s'agit d'étudier la régularité sur l'intervalle I de la fonction :

$$F(x) = \int_J f(x,t)\mathrm{d}t$$

On prouve la continuité ou le caractère C^1 de F à l'aide de deux théorèmes :

- Théorème de continuité sous le signe intégrale :
  Si :
  - Hypothèse d'intégrabilité : $\forall x \in I$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur J ;
  - Hypothèse de continuité : $\forall t \in J$, l'application $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur I ;
  - Hypothèse de domination : il existe une fonction $g(t)$, intégrable sur J telle que :

$$\forall t \in I \quad \forall x \in J \quad |f(x,t)| \leqslant g(t)$$

  alors, pour tout $x \in I$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable et l'application F est continue sur I.
- Théorème de dérivation sous le signe intégrale :
  Si :
  - Hypothèse d'intégrabilité : $\forall x \in I$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur J ;
  - Hypothèse de dérivabilité : $\forall t \in J$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^1 sur J et la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur J ;
  - Hypothèse de domination : il existe une fonction g intégrable sur I telle que

$$\forall x \in J \quad \forall t \in I \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant g(t)$$

  alors la fonction F est de classe C^1 sur I et on a :

$$F'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$$

Que faire ?

- Il faut consciencieusement vérifier les hypothèses qui sont nombreuses et techniques.
- Il y a deux variables, désignées par t et x ici, il faut systématiquement indiquer de quelle variable on parle et préciser les intervalles I et J (qui sont parfois les mêmes).
- Il arrive qu'il ne soit pas possible de prouver la continuité ou la dérivabilité sur I entier. En revanche, la continuité et la dérivabilité étant des notions locales, on peut se contenter de prouver la domination sur tous segments de I (voir l'exemple traité).

Conseils

- Lorsque l'intervalle I est un segment, la continuité de $x \mapsto f(x,t)$ permet de vérifier l'hypothèse de majoration plus facilement puisque la fonction est bornée par rapport à x. Il en va de même lorsque $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^1 par rapport à x en ce qui concerne la majoration de $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$;
- Lorsque I et J sont tous les deux des segments et que f est continue par rapport aux deux variables, les hypothèses se vérifient facilement ;
- Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Lorsque $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^k sur I, on peut prouver que la fonction définie par l'intégrale est de classe C^k en modifiant l'hypothèse de domination dans le théorème de dérivabilité sous le signe intégrale. Pour cela, il faut trouver une famille de fonctions $g_0, \dots, g_k$ continues par morceaux, positives et intégrables sur J telles que, pour tout $i \in [\![0,k]\!]$:

$$\forall x \in J \quad \forall t \in I \qquad \left|\frac{\partial^i f}{\partial x^i}(x,t)\right| \leqslant g_i(t)$$

La fonction $F : x \mapsto \int_J f(x,t)$ est alors de classe C^k sur I et, pour tout $i \in [\![0,k]\!]$, on a

$$\forall x \in I \qquad F^{(i)}(x) = \int_J \frac{\partial^i f}{\partial x^i}(x,t)$$

On parle parfois de théorème généralisé de dérivation sous le signe intégrale (voir l'exercice 2 de cette fiche).

Exemple traité

Soit $x \in \mathbb{R}^+$. On définit la fonction F par :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}^+$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$.

⊃ Source : D'après TPE MP

SOLUTION

Posons, pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, $f(x,t) = \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}$. On montre tout d'abord la continuité de F :

- Soit $x \in \mathbb{R}^+$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ d'après les théorèmes usuels ;
- Soit $t \in \mathbb{R}^+$, $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ d'après les théorèmes usuels ;
- $\forall x \in \mathbb{R}^+$, on a

$$\forall t \in \mathbb{R}^+ \qquad |f(x,t)| \leqslant \frac{1}{1+t^2}$$

car la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est décroissante par rapport à sa variable x. De plus, la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est positive, continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$. En effet, il s'agit de la dérivée de $t \mapsto \text{Arctan}(t)$ qui est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

Les conditions du théorème de continuité sous le signe intégrale étant vérifiées, il s'applique et la fonction F est donc continue sur $\mathbb{R}^+$.

Nous allons maintenant démontrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$. Le fait que F soit continue sur $\mathbb{R}^+$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ nous montre qu'il doit y avoir un problème en 0 et qu'il va surement falloir localiser, c'est-à-dire travailler sur un intervalle strictement inclus dans $\mathbb{R}^{+*}$.

- Soit $x \in \mathbb{R}^+$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue et intégrable car on a démontré que F est continue ;
- Soit $t \in \mathbb{R}^+$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ d'après les théorèmes usuels et on a $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{-t^2 e^{-xt^2}}{1+t^2}$. Soit $x \in \mathbb{R}^+$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ d'après les théorèmes usuels ;
- Il faut maintenant trouver une majorante pour $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ valable pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$ or il ne nous est pas possible de majorer par la valeur en $x = 0$ comme dans le cas de la continuité car la fonction $t \mapsto \frac{t^2}{1+t^2}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Dès lors, on considère $a > 0$ et, pour tout $x \in [a, +\infty[$, on a :

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \frac{t^2 e^{-at^2}}{1+t^2} = g_a(t)$$

car $x \mapsto \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right|$ est décroissante. De plus, $t \mapsto g_a(t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et comme $\lim\limits_{t\to+\infty} (1+t^2) g_a(t) = 0$, on a $g_a(t) = o\left(\frac{1}{1+t^2}\right)$ au voisinage de $+\infty$. Or, on a déjà vu que $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Ainsi, les hypothèses du théorème de dérivation sous le signe intégrale sont vérifiées pour tout $x \in [a, +\infty[$ donc $F \in \mathrm{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ or, a étant arbitraire strictement positif, F est de classe C^1 sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}^{+*}$ donc F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Exercices

EXERCICE 75.1

Soit $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(2xt)\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer f'.
3. On admet que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Exprimer f à l'aide des fonctions usuelles.

➲ Source : CCP PSI

EXERCICE 75.2

Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $f(x) = \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\cos(xt)\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est solution de l'équation $xy'' + 3y' + xy = 0$.

➲ Source : ENSAM PSI

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 75.1

1. On vérifie les hypothèses de la continuité sous le signe intégrale. La majoration s'obtient car l'application cosinus est bornée sur $\mathbb{R}$ et la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est intégrable.
2. On vérifie les hypothèses de la dérivabilité sous le signe intégrale. La majoration s'obtient car l'application sinus est bornée sur $\mathbb{R}$ et la fonction $h\colon t \mapsto 2te^{-t^2}$ est la dérivée d'une fonction bornée sur $\mathbb{R}^+$ donc h est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
3. En effectuant une intégration par parties, on montre que f vérifie une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 à coefficients non constants. On sait résoudre une telle équation et l'indication fournie donne la condition initiale qui permet de définir f.

EXERCICE 75.2

1. Pour montrer que f est de classe C^2, il faut utiliser le théorème généralisé d'intégration sous le signe intégrale pour lequel il faut trouver une majorante pour la fonction $t \mapsto \sqrt{1-t^2}\cos(xt)$, une pour sa dérivée première par rapport à x et une dernière pour sa dérivée seconde toujours par rapport à x. La convergence des intégrales ne pose pas de problème car toutes les fonctions sont continues sur un segment.
2. Pour vérifier l'équation différentielle, on procède par intégration par parties sur f'.

EXERCICE 75.1

Soit $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$. On pose $g(x,t) = e^{-t^2}\cos(2xt)$.

1 On vérifie les hypothèses du théorème de continuité sous le signe intégrale :

- Soit $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto g(x,t)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$ d'après les théorèmes usuels ;
- Soit $t \in \mathbb{R}^*$, $x \mapsto g(x,t)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$ d'après les théorèmes usuels ;
- Comme l'application cosinus est bornée sur $\mathbb{R}$, on a :

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \qquad |g(x,t)| \leqslant e^{-t^2}$$

or $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $\lim\limits_{t\to+\infty}(1+t^2)e^{-t^2} = 0$ donc $e^{-t^2} = o\left(\frac{1}{1+t^2}\right)$ au voisinage de $+\infty$ et comme $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est la dérivée de $t \mapsto \text{Arctan}(t)$ qui est bornée sur $\mathbb{R}^+$, c'est une fonction intégrable. Donc $t \mapsto e^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Le théorème de continuité sous le signe intégrale s'applique, f est donc continue sur $\mathbb{R}$.

2 On vérifie les hypothèses du théorème de dérivabilité sous le signe intégrale :

- Soit $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto g(x,t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$ d'après la question précédente ;
- Soit $t \in \mathbb{R}$, $x \mapsto g(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et on a $\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = -2t\sin(xt)e^{-t^2}$. Soit $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial t}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$;
- Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+ \qquad \left|\frac{\partial g}{\partial t}(x,t)\right| \leqslant 2te^{-t^2}$$

or la fonction $h : t \mapsto 2te^{-t^2}$ est la dérivée de la fonction $t \mapsto -e^{-t^2}$ qui est bornée sur $\mathbb{R}^+$ donc h est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Le théorème de dérivabilité sous le signe intégrale s'applique donc f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} -2t\sin(2xt)e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

3 On considère f'. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé, les fonctions $t \mapsto e^{-t^2}$ et $t \mapsto \sin(2xt)$ sont de classe C^1 sur $[0, \infty[$ et comme $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-t^2}\sin(2xt) = 0$, on peut effectuer une intégration par parties :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[e^{-t^2}\sin(2xt)\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-t^2}2x\cos(2xt)\mathrm{d}x \\ &= -2x\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(2xt)\mathrm{d}x = -2xf(x) \end{aligned}$$

donc f vérifie une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 à coefficients non constants. Il existe donc une constante $k \in \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ke^{-x^2}$. D'après l'indication de l'énoncé, $f(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ d'où :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-x^2}$$

EXERCICE 75.2

1 Soit $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,1]$, on pose $g(x,t) = \sqrt{1-t^2}\cos(xt)$.
On vérifie directement les hypothèses de dérivation sous le signe intégrale en trouvant une majorante pour $g(x,t)$ et $\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)$ une fois que nous aurons prouvé que ces fonctions existent.

- Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto g(x,t)$ est définie et continue sur $[0,1]$, de plus, on a

$$\forall t \in [0,1], \quad |g(x,t)| \leqslant \sqrt{1-t^2} = h_0(t)$$

  or $t \mapsto h_0(t)$ est définie et continue sur $[0,1]$ donc intégrable, par suite $f(x)$ existe.
- Soit $t \in [0,1]$. L'application $x \mapsto g(x,t)$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ d'après les théorèmes usuels et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = -t\sqrt{1-t^2}\sin(xt)$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t) = -t^2\sqrt{1-t^2}\cos(xt)$$

  De plus, pour $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ et $t \mapsto \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)$ sont des fonctions continues sur $[0,1]$.
- On pose $h_1 : t \in [0,1] \mapsto t\sqrt{1-t^2}$ et $h_2 : t \in [0,1] \mapsto t^2\sqrt{1-t^2}$ deux fonctions continues sur $[0,1]$ donc intégrables qui vérifient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant h_1(t)$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left|\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)\right| \leqslant h_2(t)$$

et comme on a déjà vu que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|g(x,t)| \leqslant h_0(t)$, les hypothèses de la généralisation du théorème de dérivation sous le signe intégrale sont vérifiées donc f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \int_0^1 -t\sqrt{1-t^2}\sin(xt)\mathrm{d}t$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) = \int_0^1 -t^2\sqrt{1-t^2}\cos(xt)\mathrm{d}t$$

2 Parmi $f(x)$, $f'(x)$ et $f''(x)$, seul $f'(x)$ contient un sinus, ce qui donne l'idée de l'intégrer par parties pour changer ce sinus en cosinus. On a

$$3f'(x) = \int_0^1 -3t\sqrt{1-t^2}\sin(xt)\mathrm{d}t$$

or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \left(1-t^2\right)^{\frac{3}{2}}$ et $t \mapsto \sin(xt)$ sont de classe C^1 sur $[0,1]$ (il n'y pas de problème de convergence puisqu'il s'agit de fonctions continues sur un segment) d'où, par intégration par parties :

$$\begin{aligned}
3f'(x) &= \left[\left(1-t^2\right)^{\frac{3}{2}}\sin(xt)\right]_0^1 - \int_0^1 \left(1-t^2\right)^{\frac{3}{2}} x\cos(xt)\mathrm{d}t \\
&= -\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\left(1-t^2\right) x\cos(xt)\mathrm{d}t \\
&= -x\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\cos(xt)\mathrm{d}t + x\int_0^1 t^2\sqrt{1-t^2}\cos(xt)\mathrm{d}t \\
&= -xf(x) - xf''(x)
\end{aligned}$$

ce qui prouve donc que f vérifie l'équation différentielle proposée par l'énoncé.

Compléments de probabilité

Montrer qu'un ensemble est un événement

Quand on ne sait pas !

L'ensemble des événements associés à une expérience aléatoire sur un univers Ω est appelé la tribu des événements. C'est un sous-ensemble $\mathcal{A}$ de l'ensemble des parties de Ω, vérifiant par définition les propriétés suivantes :

- $\Omega \in \mathcal{A}$
- $\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire : pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\overline{A} \in \mathcal{A}$.
- Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements de $\mathcal{A}$, $\bigcup_{n\geq 0} A_n \in \mathcal{A}$.

Ces trois propriétés suffisent à montrer que pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements de $\mathcal{A}$, $\bigcap_{n\geq 0} A_n \in \mathcal{A}$.

Que faire ?

- Pour montrer qu'un ensemble est un événement, on peut montrer que c'est le complémentaire d'un événement ou alors l'union ou l'intersection (finie ou dénombrable) d'événements.
- Si X est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ alors pour tout réel x, les ensembles $(X \leq x)$, $(X < x)$, $(X = x)$, $(X > x)$ et $(X \geq x)$ sont des événements. D'une manière générale, pour tout sous-ensemble U de $X(\Omega)$, $X^{-1}(U)$ est un événement.

Conseils

- Il suffit souvent de décomposer l'ensemble comme une union ou une intersection d'événements bien choisis.

Exemple traité

Soit X une variable aléatoire discrète positive définie sur un espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$. Montrer que l'ensemble :

$$A = \{w \in \Omega,\ X(\omega) \text{ est divisible par } 3\}$$

est un événement.

SOLUTION

La variable X étant positive, l'ensemble A se réécrit :

$$A = \bigcup_{k=0}^{+\infty} \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) = 3k\} = \bigcup_{k=0}^{+\infty} (X = 3k)$$

Pour tout entier $k \geq 0$, $(X = 3k)$ est un événement donc par réunion dénombrable, on en déduit que A est un événement.

Exercices

EXERCICE 76.1

Soit $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite d'événements d'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$. Justifier que :

$$A = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k$$

est un événement.

EXERCICE 76.2

Soit X une variable aléatoire discrète sur un espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$. Montrer que pour tout réel $\varepsilon > 0$, l'ensemble A_ε défini par :

$$A_\varepsilon = \{\omega \in \Omega,\ |X(\omega)| > \varepsilon\}$$

est un événement.

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 76.1 Commencer par étudier les ensembles $\bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k$.

EXERCICE 76.2 Pour tout réel x et pour tout réel $\varepsilon > 0$, $|x| \geq \varepsilon$ si et seulement si $x \leq -\varepsilon$ ou $x \geq \varepsilon$.

EXERCICE 76.1

Pour tout entier $n \geq 0$, l'ensemble B_n défini par :

$$B_n = \bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k$$

est un événement car c'est une intersection dénombrable d'événements. Ainsi,

$$\bigcup_{n=0}^{+\infty} \bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k = \bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n$$

est un événement car c'est une réunion dénombrable d'événements.

EXERCICE 76.2

Pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$\begin{aligned} A_\varepsilon &= \{\omega \in \Omega,\ |X(\omega)| > \varepsilon\} \\ &= \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) < -\varepsilon\} \cup \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) > \varepsilon\} \\ &= (X < -\varepsilon) \cup (X > \varepsilon) \end{aligned}$$

X est une variable aléatoire discrète donc $(X < -\varepsilon)$ et $(X > \varepsilon)$ sont des événements et ainsi par réunion, A_ε est un événement.

77 Utiliser la continuité d'une probabilité ; événements négligeables ou presque sûrs

Quand on ne sait pas !

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

Enonçons les théorèmes de continuité croissante et de continuité décroissante.

- Si $(A_n)_{n\geq 0}$ est une suite croisante d'événements c'est-à-dire que pour tout entier naturel n, $A_n \subset A_{n+1}$, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} P(A_n) = P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$$

- Si $(A_n)_{n\geq 0}$ est une suite décroisante d'événements c'est-à-dire que pour tout entier naturel n, $A_{n+1} \subset A_n$, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} P(A_n) = P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$$

Rappelons aussi la définition d'événements négligeables et presque sûrs.

Soit A un événement.
Il est dit négligeable si $P(A) = 0$ et il est dit presque sûr si $P(A) = 1$.

Que faire ?

Les théorèmes de continuité croissante et décroissante servent à calculer la probabilité d'événements qui sont définis comme une intersection ou une union d'une infinité d'événements.
Soit $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite d'événements.

- si on veut calculer $P\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n\right)$, on considère les événements $B_N = \bigcap_{n=0}^{N} A_n$. La suite $(B_N)_{N\geq 0}$ est alors décroissante et on a : $\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n = \bigcap_{N=0}^{\infty} B_N$.
- si on veut calculer $P\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right)$, on considère les événements $C_N = \bigcup_{n=0}^{N} A_n$. La suite $(C_N)_{N\geq 0}$ est alors croissante et on a : $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = \bigcup_{N=0}^{\infty} C_N$.

EXEMPLE 1 On procède à une suite infinie de lancers à pile ou face d'une pièce équilibrée. On note Ω l'univers décrivant cette expérience. On pose pour tout entier $n \geq 1$, A_n l'événement « le n-ième lancer a donné pile ». On peut alors considérer, pour tout entier N, l'événement

$$B_N = \bigcap_{n=1}^{N} A_n = \text{« les } N \text{ premiers lancers ont donné pile »}$$

On note alors B_∞ l'événement « tous les tirages ont donné pile ». On veut calculer la probabilité de B_∞.
On remarque que la suite $(B_N)_{N\geq 1}$ est décroissante puisque, pour tout entier N,
$B_{N+1} = (B_N \cap A_{N+1}) \subset B_N$, de plus, l'événement B_∞ est égal à $\bigcap_{N=1}^{+\infty} B_N$.
Les tirages étant indépendants, pour tout entier N,

$$P(B_N) = \prod_{n=1}^{N} P(A_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^N$$

Finalement,

$$P(B_\infty) = P\left(\bigcap_{N=1}^{+\infty} B_N\right) = \lim_{N\to+\infty} P(B_N) = \lim_{N\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^N = 0$$

Conseils

Il est important de vérifier si la suite d'événements que l'on considère est croissante ou décroissante.

Exemple traité

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. On considère une suite infinie d'événements (A_n).
Pour tout entier $N \geq 1$, on note $B_N = \bigcup_{n\geq N} A_n$ et $B_* = \bigcap_{N\geq 1} B_N$.
On considère l'ensemble C des éventualités $\omega \in \Omega$ qui appartiennent à une infinité d'événements A_n.

1 Justifier, par double inclusion, que $B_* = C$.

2 On suppose que $\sum_{n\geq 0} P(A_n)$ converge.

a. Justifier que pour tout entier $N \geq 1$, $P(B_N) \leq \sum_{n=N}^{+\infty} P(A_n)$.

b. En déduire que B_* est négligeable.

SOLUTION

1 ■ Soit $\omega \in C$. Montrons que $\omega \in B_*$. Soit $N \geq 1$, comme l'ensemble des entiers n tels que ω appartienne à A_n est infini, il existe $n_0 \geq N$ tel que $\omega \in A_{n_0}$. On en déduit que $\omega \in B_N = \bigcup_{n \geq N} A_n$. Ceci étant vrai pour tout entier $N \geq 1$, ω appartient à $B_* = \bigcap_{N \geq 1} B_N$.

■ On veut montrer que $B_* \subset C$, c'est-à-dire que pour tout événement $\omega \in \Omega$, $(\omega \in B_*) \Rightarrow (\omega \in C)$. Par contraposée, on montre que $(\omega \notin C) \Rightarrow (\omega \notin B_*)$. Considérons donc une éventualité $\omega \in \Omega$ qui n'appartient pas à C. On en déduit que l'ensemble des entiers n tels que ω appartient à A_n est fini. Il est donc majoré. Soit N tel que pour tout $n \geq N$, $\omega \notin A_n$, on obtient que $\omega \notin B_N$ et donc $\omega \notin B_*$. C'est ce que l'on voulait.

2 **a.** Soit $N \in \mathbb{N}$, considérons pour tout $p \geq N$ les événements $B_{N,p} = \bigcup_{n=N}^{p} A_n$. On sait que $P(B_{N,p}) \leq \sum_{n=N}^{p} P(A_n)$.

Comme de plus, la suite $(B_{N,p})_{p \geq N}$ est croissante, par continuité croissante,

$$P(B_N) = P\left(\bigcup_{p=N}^{+\infty} B_{N,p}\right) = \lim_{p \to +\infty} P(B_{N,p})$$

Par passage à la limite dans l'inégalité ci-dessus on obtient donc

$$P(B_N) \leq \sum_{n=N}^{+\infty} P(A_n)$$

b. La suite $(B_N)_{N \geq 1}$ est décroissante car pour tout entier N strictement positif,

$$B_N = \bigcup_{n \geq N} A_n = A_N \cup B_{N+1}$$

Par continuité décroissante,

$$P(B_*) = P\left(\bigcap_{N=1}^{+\infty} B_N\right) = \lim_{N \to +\infty} P(B_N)$$

Or, d'après la question précédente, pour tout entier $N \geq 1$, $P(B_N) \leq \sum_{n=N}^{+\infty} P(A_n)$ donc

$$P(B_*) \leq \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=N}^{+\infty} P(A_n)$$

Le terme de droite étant le reste d'une série convergente, on obtient que $P(B_*) = 0$ ce qui signifie que B_* est négligeable.

Exercices

EXERCICE 77.1

Alice et Bob dispose d'un dé à 6 faces équilibré. Ils jouent au jeu dont les règles sont les suivantes :

- Alice commence à jouer.
- À chaque tour, un joueur lance le dé. S'il fait 1 ou 2 il rejoue au tour suivant, s'il fait 3 ou 4 l'autre joueur jouera au tour suivant et s'il fait 5 ou 6, il est déclaré vainqueur et le jeu s'arrête.

Pour modéliser ce jeu, on considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et les événements suivants.

- Pour tout entier $n \geq 1$, A_n : « le jeu n'est pas fini avant le tour n et Alice joue au tour n ».
- Pour tout entier $n \geq 1$, B_n : « le jeu n'est pas fini avant le tour n et Bob joue au tour n ».
- Pour tout entier $n \geq 1$, G_n : « le jeu n'est pas fini avant le tour n et le joueur qui joue le tour n gagne ».

On note alors pour tout entier $n \geq 1$, $J_n = A_n \cup B_n$ qui correspond au fait que le jeu n'est pas fini avant le tour n.

On note $G = \bigcup_{n=1}^{+\infty} G_n$ l'événement « le jeu se termine ». On considère aussi les événements GA : « Alice gagne » et GB : « Bob gagne ».

1. Soit $n \geq 1$. Justifier que $P(J_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ et en déduire la probabilité de G_n.
2. En déduire que G est presque sûr.
3. Calculer les probabilités $P(GA)$ et $P(GB)$.

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 77.1

1. On pourra utiliser la formule des probabilités composées.
2. On pourra considérer pour $N \geq 1$, l'événement $T_N = \bigcup_{n=1}^{N} G_n$.
3. Commencer en calculant, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $P(A_n)$.

EXERCICE 77.1

1 Soit $n \geq 1$, d'après les probabilités composées :

$$P(J_n) = P(J_1) \times P(J_2|J_1) \times P(J_3|J_2 \cap J_1) \times \cdots \times P(J_n|J_{n-1} \cap \cdots \cap J_1)$$

Or, $J_{n-1} \subset J_{n-2} \subset \cdots \subset J_1$ et, d'après la modélisation, pour tout $k < n$, $P(J_{k+1}|J_k) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. On en déduit que

$$P(J_n) = P(J_1) \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

Maintenant,

$$P(G_n) = P(J_n) \times P(G_n|J_n) = \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{2^{n-1}}{3^n}$$

2 Notons pour $N \geq 1$, $T_N = \bigcup_{n=1}^{N} G_n$ qui est l'événement qui peut s'interpréter comme « il y a un gagnant dans l'un des N premiers tours ». La suite $(T_N)_{N\geq 1}$ est croissante. On en déduit par continuité croissante que

$$P(G) = P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} G_n\right) = P\left(\bigcup_{N=1}^{+\infty} T_N\right) = \lim_{N\to+\infty} P(T_N)$$

Maintenant, comme les événements $G_1, G_2, \ldots, G_N$ sont deux à deux incompatibles,

$$P(T_N) = \sum_{n=1}^{N} P(G_n) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{3} \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^N}{1 - \frac{2}{3}} = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^N$$

Finalement,

$$P(G) = \lim_{N\to+\infty} 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^N = 1$$

L'événement G est bien presque sûr.

3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la modélisation et en utilisant la formule des probabilités totales pour le système complet d'événement $(A_n, B_n, \overline{J_n})$:

$$\begin{aligned} P(A_{n+1}) &= P(A_n)P(A_{n+1}|A_n) + P(B_n)P(A_{n+1}|B_n) + P(\overline{J_n})P(A_{n+1}|\overline{J_n}) \\ &= \frac{1}{3}P(A_n) + \frac{1}{3}P(B_n) + 0 \\ &= \frac{1}{3}P(J_n) \\ &= \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

Notons que cette formule n'est pas vraie pour $n = 0$ car $P(A_1) = 1$.
On remarque alors que si on note $GA_n = A_n \cap G_n$ qui correspond au fait qu'Alice gagne au n-ième tour, pour $n \geq 2$,

$$P(GA_n) = P(A_n) \times P(G_n|A_n) = \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$$

et $P(GA_1) = \frac{1}{3}$.
On remarque que les événements GA_n sont deux à deux incompatibles donc

$$P(GA) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(GA_n) = \frac{1}{3} + \frac{1}{9}\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} \times \frac{1}{1-\frac{2}{3}}$$

Finalement $P(GA) = \dfrac{2}{3}$.

Comme $G = GA \cup GB$, on a $P(GB) = P(G) - P(GA) = 1 - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$.

78 Utiliser un système complet d'événements et la formule des probabilités totales

Quand on ne sait pas !

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

- Un **système complet** dénombrable **d'événements** est une famille $(E_n)_{n\geqslant 0}$ d'événements deux à deux incompatibles et dont l'union est égale à l'univers Ω.

$$\forall n \neq m \implies E_n \cap E_m = \varnothing$$
$$\bigcup_{n=0}^{+\infty} E_n = \Omega$$

en particulier il y a toujours un seul E_n qui se réalise ; dit autrement : les événements s'excluent les uns des autres.

- Si $(E_n)_{n\geqslant 0}$ est un système complet d'événements de l'univers Ω, on a alors les **formules des probabilités totales** : pour tout événement $A \in \mathcal{A}$

$$P(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A \cap E_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A\,|E_n)P(E_n)$$

La seconde égalité n'étant valable que si les événements E_n ne sont pas quasi-impossibles, c'est-à-dire que si $P(E_n) \neq 0$.

Que faire ?

- On remarque que la formule des probabilités totales se présente sous deux formes. La seconde s'utilise lorsque l'on connait les probabilités conditionnelles selon les événements du système complet.
- Il faut soigneusement vérifier que la famille $(E_n)_{n\geqslant 0}$ est bien composée d'événements deux à deux incompatibles et que tous les cas possibles sont bien contenus dans la réunion des éléments de cette famille.

- Une fois la famille $(E_n)_{n\geqslant 0}$ identifiée, il faut, suivant les cas, déterminer les probabilités $P(A \cap E_n)$ ou $P(A|E_n)$.

Conseils

- Souvent le système complet d'événements est implicite dans l'énoncé. Il se déduit de la description de l'expérience aléatoire. Par exemple, la probabilité de tirer une boule d'une couleur donnée peut dépendre de l'urne dans laquelle elle est tirée.
- On rappelle qu'on a un système complet d'événements lorsque, lors de la réalisation de l'expérience, un et un seul des événements de la famille est réalisé.
- Cette formule s'utilise parfois en lien avec la formule de Bayes (voir fiche 79).

Exemple traité

Une particule se déplace entre trois points A, B et C. À l'instant 0, elle est en A. Si à l'instant n elle se trouve en A (respectivement B, C) alors elle reste en A (respectivement B, C) avec probabilité $p \in]0, 1[$ ou se déplace en B (respectivement C, A) avec probabilité $q = 1 - p$. On note a_n, b_n, c_n la probabilité que la particule soit en A, B, C à l'instant n et on pose $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.
Déterminer une matrice M telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = MU_n$.

➲ Source : d'après CCP PC

SOLUTION

Soit $n \in \mathbb{N}$, on désigne par A_n (respectivement B_n, C_n) l'événement «la particule se trouve au point A» (respectivement B, C) à l'instant n. On a donc, par exemple, $a_n = P(A_n)$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les événements A_n, B_n et C_n forment un système complet d'événements, chacun étant de probabilité non nulle car la particule ne peut occuper que l'une de ces trois positions et ne peut pas en occuper deux en même temps. On a donc, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= P(A_{n+1}|A_n)P(A_n) + P(A_{n+1}|B_n)P(B_n) + P(A_{n+1}|C_n)P(C_n) \\ &= pP(A_n) + 0P(B_n) + qP(C_n) \\ &= pa_n + 0b_n + qc_n \end{aligned}$$

En procédant de la même manière, on trouve

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= qa_n + pb_n + 0c_n \\ c_{n+1} &= 0a_n + qb_n + pc_n \end{aligned}$$

en écrivant ceci sous forme matricielle, il vient

$$\begin{aligned} U_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} pa_n + 0b_n + qc_n \\ qa_n + pb_n + 0c_n \\ 0a_n + qb_n + pc_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p & 0 & q \\ q & p & 0 \\ 0 & q & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} \\ &= MU_n \end{aligned}$$

d'où l'expression de M recherchée.

Exercices

EXERCICE 78.1

On dispose de $p+1$ urnes notées $U_0, \ldots, U_p$ contenant chacune p boules. Soit $i \in [\![0, p]\!]$, l'urne numéroté i contient i boules blanches et $p-i$ boules rouges.
Soit $n \in \mathbb{N}$, on choisit une urne aléatoirement, et on en tire successivement n boules avec remise. On note alors N_p la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.
Soit $k \in \mathbb{N}$, déterminer la probabilité $P(N_p = k)$. ➲ Source : Mines-Pont PSI

EXERCICE 78.2

La probabilité qu'une mère de famille, prénommée Isabelle, ait k enfants est le nombre p_k défini par

$$p_0 = p_1 = \alpha \in]0, 1[$$
$$\text{et} \quad \forall k \geqslant 2, \quad p_k = \frac{1-2\alpha}{2^{k-1}}$$

On suppose que les naissances donnent indépendamment les unes des autres, soit un garçon, soit une fille et que la probabilité d'avoir, à chaque naissance, un garçon ou une fille est la même.

1. Quelle est la probabilité qu'Isabelle ait exactement deux garçons parmi ses enfants ?
2. Quelle est la probabilité qu'Isabelle ait deux enfants exactement sachant qu'elle a deux garçons parmi ses enfants ?
3. Quelle est la probabilité qu'Isabelle ait deux filles sachant qu'elle a exactement deux garçons ?

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 78.1 Les urnes déterminent le système complet d'événements. Le choix de l'urne suit une loi uniforme et, une fois l'urne choisie, l'expérience de piocher une boule rouge suit une loi binomiale.

EXERCICE 78.2 Le système complet d'événements est donné par le nombre d'enfants constituant la famille d'Isabelle. Il s'agit ensuite d'appliquer la formule de Bayes (voir fiche 79).

Solutions des exercices

EXERCICE 78.1

Soit $i \in [\![1, p]\!]$, on désigne, par abus d'écriture, U_i l'événement « l'urne i a été choisie ».
Les événements $(U_i)_{i\in[\![0,p]\!]}$ forment un système complet d'événements car on tire une boule nécessairement dans une urne et dans une seule à la fois. En appliquant la formule des probabilités totales, on a

$$\begin{aligned} P(N_p = k) &= \sum_{i=0}^{p} P(N_p = k \,|U_i) P(U_i) \\ &= \frac{1}{p+1} \sum_{i=0}^{p} P(N_p = k \,|U_i) \end{aligned}$$

car le choix de l'urne suit une loi uniforme sur $[\![0, p]\!]$.
Par ailleurs, si l'on pioche les boules dans l'urne U_i, la probabilité de tirer une boule blanche vaut $\dfrac{i}{p}$, en piochant n fois successivement et avec remise, on effectue n expériences indépendantes de Bernoulli, donc la loi de N_p, conditionnellement à l'événement U_i, est la loi binomiale de paramètres n et $\dfrac{i}{p}$, d'où

$$P(N_p = k \,|U_i) = \binom{n}{k} \left(\frac{i}{p}\right)^k \left(1 - \frac{i}{p}\right)^{n-k} = \frac{\binom{n}{k}}{p^n} i^k (p-i)^{n-k}$$

Ainsi, on trouve que

$$P(N_p = k) = \frac{\binom{n}{k}}{(p+1)p^n} \sum_{i=0}^{p} i^k (p-i)^{n-k}$$

EXERCICE 78.2

Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose E_n l'événement « la famille d'Isabelle se compose de n enfants », F_n « Isabelle a exactement n filles parmi ses enfants » et G_n « Isabelle a exactement n garçons parmi ses enfants ».
Sous ces conditions, $P(E_n) = p_n$. Les événements $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment un système complet d'événements car la famille d'Isabelle est constituée d'un nombre déterminé d'enfants.

1 On demande de calculer $P(G_2)$. Comme la famille d'événements $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements, on peut appliquer la formule des probabilités totales :

$$P(G_2) = \sum_{n=0}^{\infty} P(E_n)P(G_2|E_n)$$

et comme $P(G_2|E_n) = 0$ si $n = 0$ ou 1, on a

$$P(G_2) = \sum_{n=2}^{\infty} p_n \binom{n}{2} \frac{1}{2^n} = \frac{1-2\alpha}{4^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n-1)}{4^{n-2}}$$

On reconnait ici la série entière $\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2}$ de rayon de convergence 1 évaluée en $x = \dfrac{1}{4}$. Comme cette série est la dérivée seconde de $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$, on a pour $x \in]-1, 1[$,

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)'' = \left(\frac{1}{1-x}\right)'' = \frac{2}{(1-x)^3}$$

d'où $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n-1)}{4^{n-2}} = \dfrac{2 \times 4^3}{27}$ ce qui permet d'obtenir $P(G_2) = \frac{8(1-2\alpha)}{27}$.

2 On demande de calculer $P(E_2|G_2)$ ce que l'on peut faire avec la formule de Bayes (voir fiche 79) :

$$P(E_2|G_2) = \frac{P(E_2)P(G_2|E_2)}{P(G_2)}$$

Or $P(G_2|E_n) = \binom{n}{2} \frac{1}{2^n}$ car la loi du nombre de garçons, conditionnellement à l'événement E_n, est la loi binomiale de paramètres n et $\dfrac{1}{2}$.

Comme $p_2 = \dfrac{1-2\alpha}{2}$, on obtient $P(E_2|G_2) = \dfrac{p_2\binom{2}{2}\frac{1}{2^2}}{8(1-2\alpha)} 27 = \frac{27}{64}$.

3 On cherche à calculer $P(F_2|G_2)$. Pour cela, on applique encore la formule de Bayes :

$$P(F_2|G_2) = \frac{P(F_2 \cap G_2)}{P(G_2)}$$

D'après la formule des probabilités totales, toujours avec le même système complet d'événements :

$$P(F_2 \cap G_2) = \sum_{n=0}^{\infty} P(E_n)P(F_2 \cap G_2|E_n)$$

Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{4\}$, $P(F_2 \cap G_2|E_n) = 0$, on a :

$$\begin{aligned} P(F_2 \cap G_2) &= P(E_4)P(F_2 \cap G_2|E_4) \\ &= P(E_4)P(G_2|E_4) = \frac{1-2\alpha}{2^3}\binom{4}{2}\frac{1}{2^4} = \frac{3(1-2\alpha)}{64}. \end{aligned}$$

en effet, $P(F_2 \cap G_2|E_4) = P(G_2|E_4)$ puisque la probabilité d'avoir 2 garçons dans une famille de 4 enfants est égale à la probabilité d'avoir 2 filles et 2 garçons dans une famille de 4 enfants.
D'où $P(F_2|G_2) = \frac{P(F_2 \cap G_2)}{P(G_2)} = \frac{81}{512}$.

79 Utiliser la formule de Bayes

Quand on ne sait pas !

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

On rappelle la formule proprement dite,

Soient A et B deux événements tels que $P(A) > 0$ et $P(B) > 0$ alors on a

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

et la formule de Bayes généralisée. Soit $I \subseteq \mathbb{N}$.

Soit $(B_j)_{j\in I}$ un système complet d'événements tel que, pour tout $j \in I$, $P(B_j) > 0$, alors pour tout $A \in \mathcal{A}$ et si $P(A) > 0$

$$\forall i \in I, \quad P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum\limits_{j\in I} P(A|B_j)P(B_j)}$$

Que faire ?

Pour appliquer la formule de Bayes il faut identifier les éléments de l'énoncé correspondant à des probabilités conditionnelles : $P(A|B)$, $P(B|A)$.

Pour appliquer la formule de Bayes généralisée il faut :

- identifier le système complet d'événements $(B_j)_{j\in I}$
- pour tout $i \in I$, déterminer les probabilités $P(B_i)$
- pour tout $i \in I$, déterminer les probabilités $P(A|B_i)$

Conseils

- Dans les exercices les plus simples, le système complet d'événements est souvent constitué d'un événement B et de l'événement complémentaire $\overline{B}$.

- Un système complet d'événements $(B_i)_{i\in I}$ étant donné, on applique la formule de Bayes lorsque l'on connait les $P(A|B_i)$ pour un certain événement A et que l'on souhaite calculer $P(B_i|A)$.
- Dans la formule générale, on a $\sum_{j\in I} P(A|B_j)P(B_j) = P(A)$ en vertu des formules des probabilités composées et des probabilités totales.

Exemple traité

Pour détecter une maladie, on dispose d'un test non complètement fiable. Lorsque le test est positif, la probabilité d'être atteint de la maladie est de $0,8$. Lorsque le test est négatif, la probabilité d'être sain est de $0,95$. Les statistiques établissent que 4% des personnes ont un test positif.
On choisit au hasard un individu. On définit les événements suivants :

M : « L'individu est porteur de la maladie »
T : « L'individu a un test positif »

1 **a.** Préciser $P(T)$, $P(M|T)$ et $P\left(\overline{M}|\overline{T}\right)$.

b. Que représente la probabilité $P\left(M|\overline{T}\right)$? La calculer.

2 Calculer $P(M)$.

3 **a.** Calculer $P(\overline{T}|M)$. Que représente cette probabilité ? Que penser du test ?

b. Les événements M et $\overline{T}$ sont-ils indépendants ?

SOLUTION

1 **a.** En traduisant l'énoncé : $P(T) = 0,04$; $P(M|T) = 0,8$ et $P\left(\overline{M}|\overline{T}\right) = 0,95$.

b. La probabilité $P\left(M|\overline{T}\right)$ correspond à celle qu'un individu soit malade sachant que le test ne l'a pas identifié. L'événement $\overline{M}$ étant l'événement contraire de M, on a $P\left(M|\overline{T}\right) + P\left(\overline{M}|\overline{T}\right) = 1$ d'où

$$P\left(M|\overline{T}\right) = 1 - 0,95 = 0,05$$

2 En appliquant la formule des probabilités totales, on a :

$$P(M) = P\left(M|\overline{T}\right)P\left(\overline{T}\right) + P(M|T)P(T) = 0,048 + 0,032 = 0,08$$

3 **a.** Les événements T et $\overline{T}$ forment un système complet d'événements et l'on connait $P(M|T)$ ainsi que $P\left(M|\overline{T}\right)$ on applique donc la formule de Bayes :

$$P(\overline{T}|M) = \frac{P(M|\overline{T})P(\overline{T})}{P\left(M|\overline{T}\right)P\left(\overline{T}\right) + P(M|T)P(T)} = \frac{P(M|\overline{T})P(\overline{T})}{P(M)}$$
$$= \frac{0,05 \times 0,96}{0,08} = 0,6$$

Cette probabilité est celle que le test soit négatif, c'est-à-dire que le patient soit annoncé sain sachant qu'il est malade. Ainsi, plus d'une personne sur deux qui est malade est déclarée saine.

b. Les calculs montrent que $P(\overline{T}|M) \neq P(\overline{T})$ ainsi $P(\overline{T} \cap M) \neq P(\overline{T}) \times P(M)$ et donc les événements ne sont pas indépendants.

Exercices

EXERCICE 79.1

Les Anglais et les Américains orthographient le mot *rigueur*, respectivement *rigour* et *rigor*. Un homme ayant pris une chambre dans un hôtel parisien a écrit ce mot sur un bout de papier et le dépose à la réception. Le réceptionniste découpe chaque lettre, les place dans un sac et en fait tirer une au hasard au standardiste : c'est une voyelle. Or 40% des anglophones de l'hôtel sont des Anglais et les 60% restants sont des Américains. Quelle est la probabilité que l'auteur du mot soit anglais ?

EXERCICE 79.2

Valentin a perdu sa balle en jouant au parc. Il pense que sa balle a autant de chance de se trouver dans n'importe laquelle de trois parties données du parc. On note $1-a_i$ la probabilité qu'il retrouve sa balle dans la partie i si elle y est effectivement.
Les valeurs a_i représentent donc les probabilités de rater la balle lors des recherches. On peut l'attribuer à diverses causes comme la végétation ou la lassitude de Valentin.
Quelle est la probabilité que la balle se trouve dans la $i-$ième partie ($i \in \{1, 2, 3\}$) si les recherches dans la première n'ont rien donné ?

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 79.1 Identifier le système complet d'événements et traduire l'énoncé.

EXERCICE 79.2 Il faut appliquer 3 fois la formule de Bayes.

Solutions des exercices

EXERCICE 79.1

On pose les événements :

U : « l'auteur est Américain »
$\overline{U}$: « l'auteur est Anglais »
V : « la lettre prélevée est une voyelle »

Les événements U et $\overline{U}$ forment un système complet d'événements puisque les clients parlant anglais dans l'hôtel sont soit Anglais, soit Américains. En traduisant l'énoncé on trouve que $P(V|U) = \frac{3}{5}$, $P(V|\overline{U}) = \frac{1}{2}$, $P(U) = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}$ et $P(\overline{U}) = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}$. On souhaite calculer $P(\overline{U}|V)$, on applique donc la formule de Bayes :

$$\begin{aligned} P(\overline{U}|V) = \frac{P(V|\overline{U})P(\overline{U})}{P(V|U)P(U) + P(V|\overline{U})P(\overline{U})} &= \frac{\frac{1}{2} \times \frac{2}{5}}{\frac{3}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{5}} \\ &= \frac{\frac{1}{5}}{\frac{14}{25}} \\ &= \frac{5}{14} \simeq 35.71\% \end{aligned}$$

EXERCICE 79.2

On pose, pour $i \in \{1, 2, 3\}$, les événements

Z_i : « la balle est dans la $i-$ième partie »
E : «les recherches dans la partie 1 n'ont rien donné »

L'hypothèse d'équiprobabilité émise par l'énoncé donne, pour $i \in \{1, 2, 3\}$, $P(Z_i) = \frac{1}{3}$, le reste de l'énoncé fournit $P(E|Z_1) = a_1$, $P(E|Z_2) = P(E|Z_3) = 1$
On applique alors la formule de Bayes :

$$\begin{aligned} P(Z_1|E) &= \frac{P(E|Z_1)P(Z_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(E|Z_i)P(Z_i)} \\ &= \frac{a_1 \times \frac{1}{3}}{a_1 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}} \\ &= \frac{a_1}{a_1 + 2} \end{aligned}$$

et pour $j \in \{2, 3\}$,

$$\begin{aligned} P(Z_j|E) &= \frac{P(E|Z_j)P(Z_j)}{\sum_{i=1}^{3} P(E|Z_i)P(Z_i)} \\ &= \frac{\frac{1}{3}}{a_1 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}} \\ &= \frac{1}{a_1 + 2} \end{aligned}$$

80 Utiliser les lois usuelles pour modéliser une expérience aléatoire

Quand on ne sait pas !

On rappelle la définition des lois usuelles ainsi qu'un modèle probabiliste les illustrant :

- Loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$; on dit qu'une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$ si

$$X(\Omega) = [\![1, n]\!] \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![1, n]\!], \quad P(X = i) = \frac{1}{n}$$

On note $X \sim \mathcal{U}([\![1, n]\!])$.

Les modèles probabilistes usuels : les lancers de dé équilibré, le tirage d'une boule au hasard dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n, plus généralement tout résultat d'expérience pour laquelle toutes les issues ont la même probabilité de se réaliser.

- Loi de Bernoulli ; soit $p \in [0, 1]$. On dit que X suit une loi de Bernoulli de paramètre p si

$$X(\Omega) = \{0, 1\} \qquad P(X = 0) = 1 - p \quad \text{et} \quad P(X = 1) = p$$

On note $X \sim \mathcal{B}(p)$.

Les modèles probabilistes usuels : les lancers d'une pièce, tirage d'une boule dans une urne composée de boules de deux couleurs, plus généralement tout résultat d'expérience pour laquelle seulement deux issues -un succès ou un échec- sont possibles.

- Loi binomiale ; on dit que X suit la loi binomiale de paramètres n et p si

$$X(\Omega) = [\![0, n]\!] \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![0, n]\!], \quad P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

On note $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

Les modèles probabilistes usuels : nombre de piles obtenus lors du lancer d'une pièce, nombre de boules d'une catégorie donnée obtenues après tirages d'une boule, avec remise à chaque fois de la boule tirée, dans une urne contenant des boules de plusieurs catégories, plus généralement : nombre de succès obtenus lors de la répétition d'une épreuve de Bernoulli.

- Loi géométrique ; soit $p \in]0,1[$ On dit que X suit la loi géométrique de paramètre p si

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = k) = (1-p)^{k-1}p$$

On note $X \sim \mathcal{G}(p)$.

Le modèle probabiliste usuel : nombre de tentatives nécessaires pour obtenir un résultat «pile» lorsqu'on lance une pièce de monnaie, plus généralement : le rang du premier succès dans une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre p.

- Loi de Poisson ; soit $\lambda \in \mathbb{R}^{*+}$. On dit que X suit la loi de Poisson de paramètre λ si

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad P\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

On note $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

Le modèle probabiliste usuel : la loi de Poisson peut-être vue comme un cas «limite» de lois binomiales. On peut interpréter la loi de Poisson comme la loi du nombre de succès lorsque l'on compte un nombre très élevé d'épreuves avec une probabilité de succès p très faible.

Que faire ?

- Il faut bien connaitre les lois au programme et avoir des exemples concrets en tête auxquels comparer la situation exposée par le sujet ou l'exercice.
- Il faut déterminer $X(\Omega)$ car les lois au programme ne sont pas toutes à valeurs dans le même espace.
- Lorsqu'on affirme que la situation proposée est modélisée par une variable aléatoire, il faut le justifier convenablement.

Conseils

Il est possible qu'après calcul, on identifie une loi connue. Il est alors possible d'en déduire immédiatement des résultats comme une espérance, une variance ou une fonction génératrice. Il est également intéressant d'en déduire une information concernant la situation probabiliste proposée.

Exemple traité

Une porte est verrouillée. On veut l'ouvrir au moyen d'une clé qui se trouve sur un trousseau avec quatre autres clés. Pour cela, on a deux méthodes :

- À chaque tentative, on prend une clé au hasard et on l'essaie. On laisse la clé sur le trousseau.
- À chaque tentative, on prend une clé au hasard et on l'essaie. Par contre, si la clé ne convient pas, on la retire du trousseau.

Dans les deux cas, décrire la variable aléatoire donnant le nombre moyen de tentatives avant d'ouvrir la porte.

SOLUTION

Dans le premier cas, chaque tentative est une expérience aléatoire du type succès-échec, il s'agit donc d'un schéma de Bernoulli et la probabilité de succès vaut $p = \frac{1}{4}$. Ainsi, on répète la même expérience de Bernoulli jusqu'à trouver la bonne clef, il s'agit donc d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p. Le nombre moyen de tentatives avant un succès est donc de $\frac{1}{p} = 4$.

Dans le second cas, si on pose X la variable aléatoire alors $X(\Omega) = [\![1, 4]\!]$. En effet, au quatrième essai on a forcément trouvé la bonne clef. La loi de X est donnée par le tableau suivant :

k	1	2	3	4
$P(X = k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$	$\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$	$\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{4}$

En effet, par exemple pour $(X = 3)$, on s'est trompé au premier essai (3 possibilités sur 4), au second essai (2 possibilités restantes sur 3) et on a trouvé la bonne au troisième (1 possibilité parmi les 2 clefs restantes). On constate donc que X suit une loi uniforme sur $[\![1, 4]\!]$ donc le nombre moyen de tentatives avant succès est ici de $5/2$.

Exercices

EXERCICE 80.1

Deux joueurs jouent avec des pièces équilibrées. Ils lancent chacun n fois une pièce. Celui qui gagne est celui qui obtient le plus grand nombre de fois pile. Quelle est la probabilité qu'il y ait un gagnant ?

⊃ Source : CCP PSI

EXERCICE 80.2

On a un QCM à n questions avec 4 choix possibles pour chaque question. Pour chaque question, Clément a une probabilité p de connaitre la réponse et quand il la connait il répond juste. Quand il ne connait pas la réponse, il répond au hasard.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de questions dont Clément connaît la réponse (c'est-à-dire le nombre de bonnes réponses données par Clément aux questions dont il connaissait la réponse), et Y la variable aléatoire qui compte le nombre de bonnes réponses obtenues en répondant au hasard. Trouver la loi de $Z = X + Y$.

⊃ Source : ISUP MP

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 80.1

Le nombre de piles lors de n lancers d'une pièce équilibrée est une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $(n, 1/2)$. L'événement «il y a un gagnant» est le contraire de «il y a égalité». Le calcul de la probabilité qu'il y ait égalité requiert le calcul de $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$ qui se fait classiquement en développant de deux manières, par le binôme de Newton, la quantité $(1+X)^{2n} = (1+X)^n(1+X)^n$.

EXERCICE 80.2

On a $Z(\Omega) = [\![0, n]\!]$, de même que $X(\Omega) = [\![0, n]\!] = Y(\Omega)$. D'autres parts, $([X = i])_{i \in [\![0,n]\!]}$ est un système complet d'événements, donc pour $k \in [\![0, n]\!]$, on a

$$P(Z = k) = P(X + Y = k) = \sum_{k=0}^{n} P(X + Y = i \mid X = i)P(X = i)$$

par la formule des probabilités totales. Ensuite, établir que la loi de Y sachant l'événement $[X = i]$ réalisé est une loi binomiale ce qui permet de conclure.

Solutions des exercices

EXERCICE 80.1

Un lancer de pièce équilibrée est une expérience de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{2}$. Chaque joueur lance n fois sa pièce de façon indépendante et compte le nombre de succès, il s'agit donc d'une variable aléatoire binomiale de paramètre (n, p). On pose X_1 et X_2 les variables aléatoires comptant le nombre de succès de chacun des joueurs. On peut faire l'hypothèse que ces deux variables aléatoires sont indépendantes car les résultats de la pièce de l'un n'ont aucune raison d'influer sur ceux de l'autre pièce. L'événement «il y a un gagnant» est l'événement contraire de «il y a égalité». On va donc calculer $P(X_1 = X_2)$ et ainsi en déduire la probabilité recherchée. Pour cela, on va conditionner par le système complet d'événements $([X_1 = k])_{k \in [\![0,n]\!]}$:

$$P(X_1 = X_2) = \sum_{k=0}^{n} P_{(X_1=k)}(X_1 = X_2)P(X_1 = k) = \sum_{k=0}^{n} P_{(X_1=k)}(X_2 = k)P(X_1 = k)$$

Par indépendance de X_1 et de X_2,

$$P(X_1 = X_2) = \sum_{k=0}^{n} P(X_2 = k)P(X_1 = k)$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} \right)^2 = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

Le calcul de la somme des carrés des coefficients binomiaux est classique, pour cela, on calcule $(1+X)^{2n}$ à l'aide du binôme de Newton de deux façons différentes en remarquant que $(1+X)^{2n} = (1+X)^n(1+X)^n$. En identifiant le coefficient de X^n dans chaque membre de cette expression, on trouve que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n}$$

or $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$ ce qui fournit le résultat voulu. Finalement, la probabilité qu'il y ait un gagnant est :

$$P(X_1 \neq X_2) = 1 - P(X_1 = X_2) = 1 - \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n}$$

On peut noter qu'en utilisant la formule de Stirling, $P(X_1 = X_2) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n\pi}}$.

EXERCICE 80.2

La variable aléatoire Z correspond au nombre de bonnes réponses donc $Z(\Omega) = [\![0, n]\!]$. De même, $X(\Omega) = [\![0, n]\!] = Y(\Omega)$. Soit $k \in [\![0, n]\!]$, comme $([X = i])_{i \in [\![0,n]\!]}$ est un système complet d'événements on peut appliquer la formule des probabilités totales

$$P(Z = k) = P(X + Y = k) = \sum_{i=0}^{k} P\left(X + Y = k \,|X = i\right) P(X = i)$$
$$= \sum_{i=0}^{k} P(Y = k - i |\, X = i) P(X = i)$$

Dès lors, pour chaque question, Clément à une probabilité p de connaitre la bonne réponse donc X est le nombre de succès dans une succession de n expériences de Bernoulli indépendantes, dès lors X suit une loi binomiale de paramètre (n, p). Par suite, si Clément a obtenu k bonnes réponses et qu'il en connaissait i, il a donc, en répondant au hasard, donné la bonne réponse $k - i$ fois sur les $n - i$ questions restantes. La loi de Y, conditionnellement à l'événement $[X = i]$ est la loi binomiale de paramètres $n - i$ et $\frac{1}{4}$ car cette fois, on compte

les succès de probabilité $\frac{1}{4}$ lors de $n-i$ épreuves indépendantes. On en déduit donc que

$$P_{(X=i)}(Y=k-i)=\binom{n-i}{k-i}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-i}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-k}$$
$$P(X=i)=\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}$$

d'où

$$P(Z=k)=\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i}p^i(1-p)^{n-i}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-i}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-k}$$

Or

$$\binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i}=\frac{n!}{i!(k-i)!(n-k)!}=\binom{n}{k}\binom{k}{i}$$

Par suite, en écrivant $(1-p)^{n-i}=(1-p)^{n-k}(1-p)^{k-i}$,

$$\begin{aligned}P(Z=k)&=\binom{n}{k}\left(\frac{3(1-p)}{4}\right)^{n-k}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}p^i\left(\frac{1-p}{4}\right)^{k-i}\\&=\binom{n}{k}\left(\frac{3(1-p)}{4}\right)^{n-k}\left(p+\frac{1-p}{4}\right)^{k}\\&=\binom{n}{k}q^k(1-q)^{n-k}\end{aligned}$$

en posant $q=\frac{1+3p}{4}$.
En conclusion, Z suit une loi binomiale de paramètre (n,q), en particulier, le score moyen de bonnes réponses est donc de nq.

81 Montrer qu'une variable aléatoire admet une espérance finie et la calculer

Quand on ne sait pas !

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.
La variable aléatoire réelle discrète X à valeurs dans un ensemble dénombrable $\{x_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ est dite d'espérance finie lorsque la série de terme général $x_k P(X = x_k)$ est absolument convergente.
Dans ce cas, sa somme est appelée espérance de X et notée $E(X)$.

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k P(X = x_k)$$

Que faire ?

- Si la variable aléatoire X est finie, c'est-à-dire si $X(\Omega)$ est un ensemble fini alors X admet une espérance.
- En pratique, on montre que le terme général $x_k P(X = x_k)$ est bien celui d'une série absolument convergente.

Conseils

- Pour montrer que le terme général $x_k P(X = x_k)$ est celui d'une série absolument convergente, on pourra chercher à se ramener à un développement en série entière connu.
- Théorème de domination : Si $|X| \leqslant Y$ et si Y est d'espérance finie, alors X est d'espérance finie.

Exemple traité

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ suivant la même loi définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X = k) = P(Y = k) = pq^k$$

où $p \in]0, 1[$ et $q = 1 - p$.

1 Quelle est la loi de $V = \max(X, Y)$?

2 La variable aléatoire V admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

SOLUTION

1 On note tout d'abord que $V(\Omega) = \mathbb{N}$. On remarque que, pour $k \in \mathbb{N}$, il est plus simple ici de calculer $P(V \leqslant k)$ car

$$P(V \leqslant k) = P\left((X \leqslant k) \cap (Y \leqslant k)\right) = P(X \leqslant k)^2$$

car X et Y sont indépendantes et suivent la même loi. Ainsi, pour $k \in \mathbb{N}$,

$$P(X \leqslant k) = \sum_{n=0}^{k} P(X = n) = \sum_{n=0}^{k} pq^n = p\frac{1 - q^{k+1}}{1 - q} = 1 - q^{k+1}$$

comme somme d'une progression géométrique.
On a alors, $P(V = 0) = P(X = 0)^2 = p^2$ et pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} P(V = k) = P(V \leqslant k) - P(V \leqslant k-1) &= (1 - q^{k+1})^2 - (1 - q^k)^2 \\ &= (1 - q^{k+1} - 1 + q^k)(1 - q^{k+1} + 1 - q^k) \\ &= q^k(1 - q)(2 - q^k - q^{k+1}) \\ &= pq^k(2 - q^k - q^{k+1}) \end{aligned}$$

On remarque que la dernière expression dans la formule précédente marche pour $k = 0$ et on peut vérifier que la somme de ces probabilités est bien égale à 1.

2 On décompose maintenant le terme général de l'espérance, pour $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$kP(V = k) = 2pkq^k - pkq^{2k} - pkq^{2k+1} = 2pqkq^{k-1} - p(1 + q)q^2k(q^2)^{k-1}$$

il s'agit donc d'une série à termes positifs, d'après le membre de gauche, constituée de la combinaison linéaire de 2 séries convergentes dont on peut calculer la somme grâce au développement en série entière de la série dérivée de $S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k$. En effet, avec l'écriture précédente,

$$E(V) = 2pqS'(q) - p(1 + q)q^2S'(q^2)$$

Par suite, comme pour $x \in]-1, 1[$, $S(x) = \dfrac{1}{1 - x}$, on a $S'(x) = \dfrac{1}{(1 - x)^2}$ ainsi,

$$\begin{aligned} E(V) = \frac{2pq}{(1 - q)^2} - \frac{pq^2(1 + q)}{(1 - q^2)^2} &= \frac{2pq}{p^2} - \frac{pq^2(1 + q)}{p^2(1 + q)^2} \\ &= \frac{2q}{p} - \frac{q^2}{p(1 + q)} = \frac{q(2 + q)}{p(1 + q)} \end{aligned}$$

car $1 - q = p$ et $1 - q^2 = p(1 + q)$.

EXERCICE 81.1

On considère l'experience suivante : on dispose d'une urne contenant au départ une boule blanche et une boule rouge. À chaque tour, on pioche une boule. Si elle est rouge l'experience s'arrête. Si elle est blanche, on remet la boule dans l'urne et on en rajoute une blanche. On pose X le numéro du tour auquel on pioche une boule rouge.

1. Déterminer la loi de X.
2. La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?

EXERCICE 81.2

Margaux participe à un jeu dans lequel il faut répondre à plusieurs questions numérotées et indépendantes. On note p_k la probabilité que Margaux réponde de façon correcte à la $k-$ième question et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $r_n = p_1 \dots p_n$.

1. Soit Z une variable aléatoire à valeur entières. Montrer que Z admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{k\geqslant 1} P(Z \geqslant 1)$ converge et montrer dans ce cas que l'on a
$$E(Z) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(Z \geqslant 1).$$
2. On définit X comme la variable aléatoire représentant le nombre de bonnes réponses données par Margaux avant sa première mauvaise réponse. Déterminer la loi de X.
3. Montrer que X admet une espérance si et seulement si la série de terme général r_n converge.

   Montrer qu'on a alors $E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} r_n$.

➲ Source : D'après ENSAM PSI

EXERCICE 81.3

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois géométriques de paramètres $p_1 \in]0,1[$ et $p_2 \in]0,1[$ respectivement. Soit $Z = \min(X,Y)$.

1. Calculer $P(Z > k)$.
2. Montrer que Z admet une espérance et la calculer.

➲ Source : d'après ENSAM PSI

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 81.1

1 Pour déterminer la loi de X on pourra considérer les événements B_k « le résultat du k-ème tirage est une boule blanche » et R_k, « le résultat du k-ème tirage est la boule rouge », identifier l'événement $(X = k)$ et calculer comme résultat intermédiaire la probabilité $P(B_1 \cap \ldots \cap B_{k-1})$.

2 Reconnaitre le terme général de la série harmonique.

EXERCICE 81.2

1 On pourra remarquer que $\sum_{k=1}^{+\infty} kP(Z = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{i=1}^{k} P(Z = k)$ et que $\sum_{i=1}^{+\infty} P(Z \geqslant i) = \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{k=i}^{+\infty} P(Z = k)$, que ces deux familles sont sommables et sont égales.

2 Pour déterminer la loi de X, on pourra s'inspirer de la définition d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique.

3 On peut remarquer que X est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et utiliser le calcul de l'espérance d'une variable aléatoire à valeurs entières.

EXERCICE 81.3

1 Utiliser l'indépendance de X et Y puis le fait qu'elles suivent toutes deux une loi géométrique mais de paramètres différents.

2 On peut montrer que Z admet une espérance par le théorème de domination. En déduisant la loi de Z à l'aide de la question précédente on reconnait une loi connue.

Solutions des exercices

EXERCICE 81.1

1 On note tout d'abord que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on pose les événements B_k « le résultat du k-ème tirage est une boule blanche » et R_k, « le résultat du k-ème tirage est la boule rouge ». Dès lors, par la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned} P(X = k) &= P(B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_{k-1} \cap R_k) \\ &= P(R_k | B_1 \cap \ldots \cap B_{k-1})\, P(B_{k-1} | B_1 \cap \ldots \cap B_{k-2}) \ldots P(B_2|B_1) P(B_1) \end{aligned}$$

Tout d'abord, $P(B_1) = \dfrac{1}{2}$ car l'urne contient une boule de chaque couleur au début de l'expérience. Pour $i \geqslant 2$, $P(B_i \,|B_1 \cap \ldots \cap B_{i-1}) = \dfrac{i}{i+1}$ car si on a tiré $i-1$ boules blanches lors des tirages précédents, on en a donc rajouté $i-1$ aux 2 déjà présentes, ce qui fait $i+1$ boules dans l'urne dont i sont des boules blanches. Ainsi,

$$P\left(B_{k-1}|B_1 \cap \ldots \cap B_{k-2}\right) \ldots P(B_2|B_1)P(B_1) = \frac{k-1}{k} \times \ldots \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{k}$$

Par ailleurs,

$$P\left(R_k|\ B_1 \cap \ldots \cap B_{k-1}\right) = \frac{1}{k+1}$$

car si on n'a tiré que des boules blanches lors des $k-1$ premiers tirages, il y a $k+1$ boules dans l'urne dont une seule est rouge. On en déduit donc que $P(X=k) = \dfrac{1}{k(k+1)}$.

2 Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $kP(X=k) = \dfrac{1}{k+1}$ qui est le terme général d'une série divergente par comparaison à la série harmonique. Dès lors, X n'admet pas d'espérance.

EXERCICE 81.2

1 Comme la variable aléatoire Z est positive et admet une espérance, on en déduit que la série à termes positifs $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} kP(Z=k) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty}\sum\limits_{i=1}^{k} P(Z=k)$ est sommable et comme il s'agit d'une somme triangulaire, on a :

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{i=1}^{k} P(Z=k) = \sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{k=i}^{+\infty} P(Z=k) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(Z \geqslant i)$$

Réciproquement, si $\sum\limits_{i\geqslant 1}^{+\infty} P(Z \geqslant i) = \sum\limits_{i=1}^{+\infty}\sum\limits_{k=i}^{+\infty} P(Z=k)$ converge, par positivité de Z, la série est sommable et on obtient l'égalité

$$\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{k=i}^{+\infty} P(Z=k) = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{i=1}^{k} P(Z=k)$$

ce qui prouve que les deux séries sont simultanément convergentes et de même somme.

2 On note tout d'abord que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, l'événement $(X=k)$ est réalisé lorsque Margaux a répondu de façon correcte au k premières questions et s'est trompée à la $(k+1)$-ième. Dès lors, comme l'événement « Margaux répond de façon correcte à une question » est indépendant des réponses qu'elle apporte aux autres questions on en déduit que :

$$P(X=k) = p_1 \ldots p_k(1-p_{k+1}) = r_k - r_{k+1}$$

Il s'agit donc du terme général d'une série télescopique.
Même si ce n'est pas demandé, on peut noter que cette série est convergente car la suite $(r_k)_{k\geqslant 1}$ est positive et décroissante donc convergente et pour que sa somme soit égale à 1 il faut que sa limite vaille $1-p_1$.

3 La variable aléatoire X étant à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, on utilise le résultat de la question 1. Ainsi, X admet une espérance si et seulement si $\sum_{k\geqslant 1} P(X \geqslant k)$ converge et dans ce cas, $E(X)$ est la somme de cette série.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$, l'événement $(X \geqslant k)$ est réalisé lorsque Margaux répond au moins aux k premières questions. Dès lors, comme l'événement « Margaux répond de façon correcte à une question » est indépendant des réponses qu'elle apporte aux autres questions on en déduit que

$$P(X \geqslant k) = p_1 \dots p_k = r_k$$

et donc X admet une espérance si et seulement si $\sum_{k\geqslant 1} r_k$ converge et dans ce cas, $E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} r_k$.

EXERCICE 81.3

1 On remarque tout d'abord que $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, l'événement $(Z > k)$ est réalisé si et seulement si $(X > k)$ et $(Y > k)$ le sont. D'où

$$P(Z > k) = P\left((X > k) \cap (Y > k)\right) = P(X > k)P(Y > k)$$

par indépendance de X et Y. De plus, comme X suit une loi géométrique de paramètre p_1,

$$P(X > k) = \sum_{n=k+1}^{+\infty} (1-p_1)p_1^{n-1} = (1-p_1)\sum_{n=k+1}^{+\infty} p_1^{n-1} = (1-p_1)\frac{p_1^k}{1-p_1} = p_1^k$$

par somme d'une série géométrique de raison p_1. De même, comme Y suit également une loi géométrique, mais de paramètre p_2, on trouve $P(Y > k) = p_2^k$ et finalement :

$$P(Z > k) = (p_1 p_2)^k$$

2 On remarque tout d'abord que $0 < Z \leqslant X$ or X admet une espérance donc Z aussi par le théorème de domination. Soit $k \geqslant 2$, on à :

$$P(Z = k) = P(Z > k-1) - P(Z > k) = (p_1 p_2)^{k-1}(1 - p_1 p_2)$$

et

$$P(Z = 1) = 1 - P(Z > 1) = 1 - p_1 p_2$$

On reconnait alors une loi géométrique de paramètre $1 - p_1 p_2$, ce qui confirme que Z admet une espérance et permet d'en déduire que $E(Z) = \dfrac{1}{1 - p_1 p_2}$.

82 Utiliser la formule de transfert pour calculer une espérance

Quand on ne sait pas !

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

- (Définition de l'espérance) Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans l'ensemble dénombrable $X(\Omega) = \{x_k,\ k \in \mathbb{N}\}$.
  On dit que X est d'espérance finie lorsque la série de terme général $x_k P(X = x_k)$ est absolument convergente. Sa somme est appelée espérance de X et notée $E(X)$.
- (Théorème de transfert) Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans l'ensemble dénombrable $X(\Omega) = \{x_k,\ k \in \mathbb{N}\}$.
  Si f est une fonction définie sur $X(\Omega)$ et à valeurs réelles, la variable aléatoire $f(X)$ a une espérance finie si et seulement si la série de terme général $f(x_k)P(X = x_k)$ est absolument convergente. On a alors :

$$E\left(f(X)\right) = \sum_{k \in \mathbb{N}} f(x_k) P(X = x_k)$$

Que faire ?

- Bien identifier la loi de X et son support $X(\Omega)$.
- Bien déterminer l'ensemble $f(X)(\Omega)$ et le terme général $f(x_k)P(X = x_k)$.
- Prouver que la série de terme général $f(x_k)P(X = x_k)$ est absolument convergente avant de calculer sa somme.

Conseils

- Penser à vérifier la convergence de la série de terme général $|f(x_k)|\, P(X = x_k)$ pour établir la convergence absolue.
- Pour calculer explicitement $E\left(f(X)\right)$ on pensera aux développements en série entière usuels.

Exemple traité

Établir l'existence et calculer $E\left(\frac{1}{1+X}\right)$ si X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

⊃ Source : Mines-Pont PC

SOLUTION

On pose $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$. Comme X suit une loi de Poisson de paramètre λ,

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X = n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$$

d'où

$$f(X)(\Omega) = \left\{\frac{1}{1+n}\,,\ n \in \mathbb{N}\right\}$$

$$\text{et} \quad |f(n)|\,P(X = n) = f(n)P(X = n) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{(n+1)!}$$

On reconnait, à une constante près et à un décalage d'indice près, le terme général d'une série exponentielle absolument convergente donc $f(X)$ possède une espérance. On calcule alors sa somme en utilisant le développement en série entière de $x \mapsto e^x$:

$$\begin{aligned} E\left(\frac{1}{1+X}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{(n+1)!} &= e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^n}{(n+1)!} \\ &= \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^n}{n!} = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^n}{n!} - 1\right) \\ &= \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\left(e^{\lambda} - 1\right) = \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda} \end{aligned}$$

Exercices

EXERCICE 82.1

On suppose que X suit une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ avec $p \in]0, 1[$. Calculer $E\left(\frac{1}{X}\right)$.

⊃ Source : Mines-Pont PC

EXERCICE 82.2

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Calculer $E\left(X(X-1)\dots(X-r+1)\right)$

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 82.1 Pour $k \in \mathbb{N}^*$, identifier la fonction f, exprimer $f(k)P(X = k)$ et démontrer qu'il s'agit du terme général d'une série absolument convergente avant d'appliquer le théorème du transfert.

EXERCICE 82.2 Pour $k \in \mathbb{N}$, identifier la fonction f, exprimer $f(k)P(X = k)$ et démontrer qu'il s'agit du terme général d'une série absolument convergente avant d'appliquer le théorème du transfert.

Solutions des exercices

EXERCICE 82.1

Par définition de X, $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $P(X = n) = (1-p)^{n-1}p$. Par ailleurs, $f(X)(\Omega) = \left\{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$ donc il s'agit de prouver la convergence absolue de la série de terme général $\frac{1}{n}(1-p)^{n-1}p$. Cette série est à termes positifs et on montre facilement qu'elle converge absolument . En effet, c'est une série entière satisfaisant au critère de d'Alembert puisqu'en posant $u_n = \frac{1}{n}(1-p)^{n-1}p$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 1-p < 1$, donc $f(X)$ admet une espérance.
On écrit alors

$$E\left(f(X)\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}(1-p)^{n-1}p = \frac{p}{1-p}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(1-p)^n}{n}$$

On reconnait alors la série $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$, de rayon de convergence égal à 1, évaluée en $(1-p)$. En dérivant sur $]-1,1[$, $S'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}x^{n-1} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}x^n = \frac{1}{1-x}$, d'où, il existe $k \in \mathbb{R}$, telle que pour tout $x \in]-1,1[$, $S(x) = -\ln(1-x) + k$ et comme $S(0) = 0$, on a $k = 0$.
On en déduit alors que

$$E\left(f(X)\right) = -\frac{p}{1-p}\ln(p)$$

EXERCICE 82.2

Pour $k \geqslant r$, $k(k-1)\dots(k-r+1)P(X=k) = \frac{k!}{(k-r)!}e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda^r e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^{k-r}}{(k-r)!}$.
On reconnait, à une constante près et à un décalage d'indice près, une série exponentielle absolument convergente, ce qui prouve que $E\left(X(X-1)\dots(X-r+1)\right)$ existe et comme $k(k-1)\dots(k-r+1) = 0$ si $k < r$, on a

$$E\left(X(X-1)\dots(X-r+1)\right) = e^{-\lambda}\lambda^r \sum_{k=r}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-r}}{(k-r)!} = e^{-\lambda}\lambda^r e^{\lambda} = \lambda^r$$

83 Montrer qu'une variable aléatoire admet une variance et la calculer

Quand on ne sait pas !

Soit X une variable aléatoire discrète infinie définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Si X^2 admet une espérance (on dit que X a un moment d'ordre deux) alors X admet une espérance et on définit la variance de X, notée $V(X)$, de la manière suivante :

$$V(X) = E\Big(\big(X - E(X)\big)^2\Big)$$

On peut aussi utiliser la formule de Koenig-Huygens pour calculer la variance d'une variable aléatoire :

Si X admet une variance alors $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

On utilise aussi souvent les deux propriétés suivantes :

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

- Si X admet une espérance alors $aX + b$ aussi et on a $E(aX + b) = aE(X) + b$. C'est la linéarité de l'espérance.
- Si X admet une variance alors $aX + b$ aussi et on a $V(aX + b) = a^2V(X)$.

Que faire ?

- On commence par vérifier si X^2 admet une espérance.
- Si X^2 admet une espérance alors X aussi. On calcule alors l'espérance de X (fiche 81).
- On utilise pour finir la formule de Koenig-Huygens.

Conseils

- On peut procéder autrement si l'on connait la fonction génératrice de X (fiche 87).
- Si la variable est usuelle, il faut connaitre parfaitement la variance de celle-ci. Aucun calcul n'est attendu dans ce cas.

Exemple traité

Soit $p \in]0,1[$ et X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que pour tout entier $n \geq 0$,

$$P(X=n) = (1-p)^n p$$

Montrer que X admet une espérance et une variance et les calculer.

SOLUTION

Soit Y la variable aléatoire définie par $Y = X + 1$. Alors $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ car $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout entier $n \geq 1$,

$$P(Y=n) = P(X+1=n) = P(X=n-1) = (1-p)^{n-1}p$$

Ainsi, Y suit une loi géométrique de paramètre p. On en déduit que Y admet une espérance et une variance et on a :

$$E(Y) = \frac{1}{p} \text{ et } V(Y) = \frac{1-p}{p^2}$$

Or $X = Y - 1$ donc X admet aussi une espérance et on a par linéarité :

$$E(X) = E(Y) - 1 = \frac{1}{p} - 1 = \frac{1-p}{p}$$

La variable X admet aussi une variance et on a :

$$V(X) = 1^2 V(Y) = \frac{1-p}{p^2}$$

Exercices

EXERCICE 83.1

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P(X=n) = \frac{4}{n(n+1)(n+2)}$$

La variable aléatoire X admet-elle une variance ?

EXERCICE 83.2

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P(X=n) = \frac{1}{9} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \frac{4}{9} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

Montrer que X admet une variance et la calculer.

EXERCICE 83.3

On pose pour tout entier $k \geq 1$,

$$u_k = \frac{(k-1)}{k!}$$

1. Justifier que $(u_k)_{k\geq 1}$ définit une loi de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire dont la loi est donnée par $(u_k)_{k\geq 1}$. Justifier que X admet une espérance et une variance et donner la valeur de celles-ci.

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 83.1 Utiliser le théorème de transfert pour savoir si X^2 admet une espérance.

EXERCICE 83.2 Utiliser le théorème de transfert puis la formule de Koenig-Huygens.

EXERCICE 83.3

1. Il suffit de justifier que la série de terme général u_k est une série à termes positifs, convergente, et dont la somme est égale à 1.
2. Penser à la série exponentielle.

Solutions des exercices

EXERCICE 83.1

La variable aléatoire X admet une variance si et seulement X^2 admet une espérance. C'est équivalent d'après le théorème de transfert et la positivité des termes à la convergence de la série de terme général $n^2P(X=n)$. Pour tout entier $n \geq 1$,

$$n^2P(X=n) = \frac{4n}{(n+1)(n+2)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{4}{n}$$

La série de terme général $\dfrac{1}{n}$ diverge (série harmonique) donc par critère de comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que la série de terme général $n^2P(X=n)$ diverge. Ainsi, X n'admet pas de variance.

EXERCICE 83.2

D'après le théorème de transfert, X^2 admet une espérance si et seulement si la série de terme général $n^2P(X=n)$ converge absolument ou encore, si et seulement si celle-ci converge (par positivité des termes). On sait que pour tout réel $x \in]-1,1[$,

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

Par dérivation terme à terme (sur une somme de série entière dont le rayon de convergence est 1), on en déduit que pour tout réel $x \in]-1,1[$,

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} \text{ donc } \frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^n$$

De nouveau par dérivation terme à terme, on a :

$$\frac{x+1}{(1-x)^3} = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^{n-1}$$

En appliquant ce résultat pour $\frac{2}{3}$ et $\frac{1}{3}$ (qui appartiennent à $]-1,1[$), on en déduit par somme que X^2 admet une espérance et on a :

$$E(X^2) = \frac{1}{9} \times \frac{\frac{2}{3}+1}{\frac{1}{27}} + \frac{4}{9} \times \frac{\frac{1}{3}+1}{\frac{8}{27}} = 5 + 2 = 7$$

Ainsi, comme X admet un moment d'ordre 2, X admet aussi une espérance et on a :

$$E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{9} \times n \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \frac{4}{9} \times n \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \right)$$

ce qui donne d'après une formule précédente :

$$E(X) = \frac{1}{9} \times \frac{1}{\left(1-\frac{2}{3}\right)^2} + \frac{4}{9} \times \frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} = 2$$

Finalement, d'après la formule de Koenig-Huygens, on a :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 7 - 2^2 = 3$$

EXERCICE 83.3

1 La suite $(u_k)_{k\geq 1}$ est positive. Pour tout entier $k \geq 1$,

$$u_k = \frac{k-1}{k!} = \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!}$$

On en déduit par télescopage que pour tout entier $n \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = 1 - \frac{1}{n!}$$

Ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} u_k = 1$$

La série de terme général u_k est donc une série à termes positifs, convergente, de somme égale à 1. Elle définit donc une loi de probabilité.

2 X admet une espérance si et seulement si la série de terme général $kP(X = k)$ converge absolument ce qui est équivalent à la convergence par positivité des termes. Pour tout entier $k \geq 1$, on a :

$$kP(X = k) = \frac{k(k-1)}{k!}$$

Le terme pour $k = 1$ est nul et pour $k \geq 2$,

$$kP(X = k) = \frac{1}{(k-2)!}$$

On reconnait le terme général (translaté) d'une série exponentielle. On en déduit que X admet une espérance et on a (en posant $j = k - 2$) :

$$E(X) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{(k-2)!} = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} = e$$

X admet une variance si et seulement si la série de terme général $k^2P(X = k)$ converge absolument (d'après le théorème de transfert) ce qui est équivalent à la convergence par positivité des termes. Pour tout entier $k \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} k^2P(X = k) &= \frac{k^2(k-1)}{k!} \\ &= \frac{(k(k-2)+2k)(k-1)}{k!} \\ &= \frac{k(k-1)(k-2)}{k!} + 2\frac{k(k-1)}{k!} \end{aligned}$$

D'après le raisonnement précédent, on sait que :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} 2\frac{k(k-1)}{k!} = 2e$$

Si $k = 1$ ou $k = 2$, $\frac{k(k-1)(k-2)}{k!} = 0$ et pour $k \geq 3$, on a :

$$\frac{k(k-1)(k-2)}{k!} = \frac{1}{(k-3)!}$$

On reconnait le terme général (translaté) d'une série exponentielle. On en déduit que c'est le terme général d'une série convergente et on a (en posant $j = k - 3$) :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k(k-1)(k-2)}{k!} = \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{(k-3)!} = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} = e$$

Par somme, on en déduit que X^2 admet une espérance et on a :

$$E(X^2) = e + 2e = 3e$$

D'après la formule de Koenig-Huygens, on en déduit que :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 3e - e^2 = e(3-e)$$

84 Calculer la covariance de deux variables aléatoires

Quand on ne sait pas !

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Supposons que X et Y admettent une variance. Alors la variable $(X-E(X))(Y-E(Y))$ admet une espérance que l'on appelle la covariance de X et Y et que l'on note $\mathrm{Cov}(X,Y)$. On a de plus :

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E((X-E(X))(Y-E(Y))) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

On a la propriété (cruciale) suivante :

Supposons que X et Y admettent une variance. Si X et Y sont indépendantes alors $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$. La réciproque est fausse.

Que faire ?

- On commence souvent par déterminer la loi de XY.
- Vérifier si les variables sont indépendantes avant de commencer le moindre calcul.

Conseils

- La covariance est symétrique : si X et Y admettent des variances, $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(Y,X)$. La covariance est aussi bilinéaire.
- Il peut être utile de remarquer que $\mathrm{Cov}(X,X) = V(X)$.

Exemple traité

Soient X une variable suivant une loi uniforme sur $\{-1,0,1\}$ et $Y = X^2$. Justifier que $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$.

SOLUTION

Les variables X et Y sont finies donc admettent chacune une variance ce qui implique que la covariance de X et Y existe. Remarquons que $XY = XX^2 = X^3$. Or X peut prendre les valeurs -1, 0 et 1 qui sont des nombres égaux à leur cube. Ainsi, $X^3 = X$ donc $XY = X$. On en déduit que :

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E(X) - E(X)E(Y) = 0$$

car $E(X) = 0$ (X suit la loi uniforme sur $\{-1, 0, 1\}$ donc son espérance est la moyenne de ces trois nombres).

Exercices

EXERCICE 84.1 Soit X et Y deux variables suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. Montrer que X et Y sont indépendantes si et seulement si leur covariance est nulle.

EXERCICE 84.2 Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}_+^*$ et X (respectivement Y) une variable suivant la loi de Poisson de paramètre λ (respectivement μ).
On suppose que X et Y sont indépendantes et on pose $S = X + Y$.

1. Montrer que S suit une loi de Poisson et préciser son paramètre.
2. Calculer $\mathrm{Cov}(S, X)$. Qu'en déduit-on ?

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 84.1 Une des implications est évidente. Pour l'autre : déterminer la loi de XY.

EXERCICE 84.2

1. Déterminer la fonction génératrice de S.
2. Utiliser la bilinéarité de la covariance et le fait que X et Y soient indépendantes.

Solutions des exercices

EXERCICE 84.1 D'après le cours, si X et Y sont indépendantes, leur covariance est nulle. Réciproquement, supposons que leur covariance est nulle. Alors :

$$E(XY) = E(X)E(Y) = p^2$$

La variable XY suit une loi de Bernoulli car elle ne peut prendre comme valeurs que 0 et 1. On a :

$$E(XY) = 0P(XY = 0) + 1P(XY = 1) = P((X = 1) \cap (Y = 1))$$

Ainsi,

$$P((X = 1) \cap (Y = 1)) = p^2 = P(X = 1)P(Y = 1) \qquad (1)$$

D'après la formule des probabilités totales :

$$P((X = 0) \cap (Y = 1)) + P((X = 1) \cap (Y = 1)) = P(Y = 1) = p$$

donc

$$P((X = 0) \cap (Y = 1)) = p - p^2 = (1 - p)p = P(X = 0)P(Y = 1) \qquad (2)$$

Le même procédé montre que :

$$P((X = 1) \cap (Y = 0)) = P(X = 1)P(Y = 0) \qquad (3)$$

et

$$P((X = 0) \cap (Y = 0)) = P(X = 0)P(Y = 0) \qquad (4)$$

Ainsi, d'après (1), (2), (3), (4), X et Y sont indépendantes.

EXERCICE 84.2

1 Les variables X et Y sont à valeurs dans $\mathbb{N}$ et sont indépendantes. On en déduit que pour tout réel $t \in [-1, 1]$,

$$G_S(t) = G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t)$$

Or on sait que $G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$ et $G_Y(t) = e^{\mu(t-1)}$ donc

$$G_S(t) = e^{\lambda(t-1)}e^{\mu(t-1)} = e^{(\lambda+\mu)(t-1)}$$

La fonction génératrice d'une variable aléatoire caractérise sa loi donc on en déduit que S suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

2 On a :

$$\mathrm{Cov}(S, X) = \mathrm{Cov}(X + Y, X) = \mathrm{Cov}(X, X) + \mathrm{Cov}(Y, X)$$

par bilinéarité. On sait que $\mathrm{Cov}(X, X) = V(X) = \lambda$ et sachant que X et Y sont indépendantes, $\mathrm{Cov}(Y, X) = 0$. Finalement, $\mathrm{Cov}(S, X) = \lambda$. Cette covariance est non nulle donc on en déduit que S et X ne sont pas indépendantes.

Calculer l'espérance et la variance d'une somme de variables aléatoires

85

Quand on ne sait pas !

Soit $n \geq 1$ et $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On note $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

- Si $X_1, \ldots, X_n$ admettent chacune une espérance alors S_n aussi et on a :

$$E(S_n) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k)$$

- Si $X_1, \ldots, X_n$ admettent chacune une variance alors S_n aussi et on a :

$$V(S_n) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$$

où $\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$ est la covariance de X_i et X_j (voir fiche 84).
Si les variances $X_1, \ldots, X_n$ sont deux à deux indépendantes, on a en particulier (toutes les covariances sont nulles) :

$$V(S_n) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k)$$

La propriété liée à l'espérance est appelée la linéarité de l'espérance.

Que faire ?

- Dans le cas de l'espérance, on commence par justifier que chaque variable admet une espérance.
- Dans le cas d'une variance, on commence par justifier que chaque variable admet une variance. Il est important aussi dans ce cas de savoir si les variables sont deux à deux indépendantes.

Conseils

- Ne surtout pas dire que la formule liée à la variance d'une somme de variables deux à deux indépendantes est une propriété de linéarité (erreur de rédaction classique).

Exemple traité

Deux jours, A et B, disposent chacun d'une pièce qui a la propriété de faire Pile avec la probabilité $\frac{1}{2}$ pour A et $p \in]0,1[$ pour B. Les résultats sont supposés indépendants.
A et B lancent leur pièce jusqu'à obtenir un Pile. On note X (respectivement Y) la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués par A (respectivement B). Déterminer l'espérance et la variance de $Z = X - Y$.

SOLUTION

X suit la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$ car X donne le rang du premier succès (« obtenir Pile » de probabilité $\frac{1}{2}$) lors de la répétition d'une infinité d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. On sait alors que X admet une espérance et une variance et on a $E(X) = 2$ et $V(X) = 2$.

De même, Y suit la loi géométrique de paramètre p ce qui implique que $E(Y) = \frac{1}{p}$ et $V(Y) = \frac{1-p}{p^2}$.

Les variables X et Y ont une espérance donc Z aussi et on a par linéarité,

$$E(Z) = E(X) - E(Y) = 2 - \frac{1}{p}$$

Les variables X et Y sont indépendantes donc X et $-Y$ aussi. Ces deux variables ont une variance donc Z aussi et on a :

$$V(Z) = V(X) + V(-Y) = V(X) + V(Y) = 2 + \frac{1-p}{p^2}$$

Exercices

EXERCICE 85.1

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètre $n \geq 1$ et $p \in]0,1[$. En utilisant des variables aléatoires suivant une loi de Bernoulli, retrouver le fait que X admet une espérance et une variance et retrouver les valeurs de celles-ci.

EXERCICE 85.2

Un groupe de n étudiants ($n \geq 1$) se répartissent au hasard après les cours dans trois salles de permanence P_1, P_2 et P_3. On note pour $i \in \{1,2,3\}$, X_i la variable aléatoire égale aux nombre d'étudiants se retrouvant dans la salle de permanence P_i. Donner les lois de X_1, X_2, X_3 et $X_1 + X_2$. Déterminer ensuite la covariance de X_1 et X_2.

EXERCICE 85.3

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes définies sur le même espace probabilisé et admettant chacune une variance.

1 Montrer que pour tout réel λ,

$$V(\lambda X + Y) = \lambda^2 V(X) + 2\lambda \mathrm{Cov}(X,Y) + V(Y)$$

2 On suppose que X n'a pas une variance nulle. A l'aide du signe du trinôme précédent, en déduire que :

$$\mathrm{Cov}(X,Y)^2 \leq V(X)V(Y)$$

avec égalité si et seulement si il existe deux réels λ_1 et λ_2 tels que $Y = \lambda_1 X + \lambda_2$ avec probabilité 1.

3 Démontrer le résultat précédent quand X a une variance nulle.

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 85.1 Écrire X comme une somme de variables.

EXERCICE 85.2 Toutes les variables ont une loi usuelle.

EXERCICE 85.3

1 La covariance est bilinéaire.

2 Le trinôme est positif par positivité de la variance.

3 Si X a une variance nulle, X est presque-surement constante.

EXERCICE 85.1

La variable X compte le nombre de succès lors de la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. On peut donc écrire :

$$X = X_1 + \cdots + X_n$$

où les variables X_i $(1 \leq i \leq n)$ sont des variables indépendantes suivant la même loi de Bernoulli de paramètre p. L'espérance d'une variable aléatoire suivant une telle loi est p donc par somme, on en déduit que X admet une espérance et on a par linéarité :

$$E(X) = E(X_1) + \cdots + E(X_n) = np$$

Chaque variable X_i $(1 \leq i \leq n)$ admet une variance valant $p(1-p)$ et X_1, ..., X_n sont indépendantes donc par somme, X admet une variance et on a :

$$V(X) = V(X_1) + \cdots + V(X_n) = np(1-p)$$

EXERCICE 85.2

Chaque variable X_i suit la loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{3}$ (elle compte le nombre de succès « l'étudiant va dans la salle P_i » lors de la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes). Remarquons que $X_1 + X_2 = n - X_3$ et la variable X_3 compte le nombre de succès (« l'étudiant va dans la salle P_3 ») lors de la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes donc $n - X_3$ compte le nombre d'échecs (« l'étudiant ne va pas dans la salle P_3 ») et la probabilité d'un échec vaut $\frac{2}{3}$. Ainsi, $X_1 + X_2$ suit la loi binomiale de paramètres n et $\frac{2}{3}$. On sait que :

$$V(X_1 + X_2) = n \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2n}{9}$$

et on a aussi :

$$V(X_1 + X_2) = V(X_1) + V(X_2) + 2\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$$

donc

$$\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = \frac{2n}{9} - 2 \times \frac{2n}{9} = -\frac{2n}{9}$$

EXERCICE 85.3

1 Soit λ un réel. On a :

$$V(\lambda X + Y) = V(\lambda X) + 2\text{Cov}(\lambda X, Y) + V(Y)$$

Or $V(\lambda X) = \lambda^2 V(X)$ et la covariance est linéaire par rapport à la première variable donc

$$V(\lambda X + Y) = \lambda^2 V(X) + 2\lambda\text{Cov}(X, Y) + V(Y)$$

2 On sait que la variance d'une variable est positive donc le trinôme précédent est positif pour tout réel λ donc il a un discriminant négatif ou nul. Ainsi :

$$(2\text{Cov}(X, Y))^2 - 4V(X)V(Y) \leq 0$$

ce qui implique que :

$$\text{Cov}(X, Y)^2 \leq V(X)V(Y)$$

L'égalité est vérifiée si et seulement le discriminant est nul donc si et seulement si le trinôme admet une racine double, c'est-à-dire :

$$\exists \lambda_0 \in \mathbb{R},\ V(\lambda_0 X + Y) = 0$$

Ceci est équivalent au fait que $\lambda_0 X + Y$ soit presque-sûrement constante donc à l'existence d'un réel λ_2 tel que $\lambda_0 X + Y = \lambda_2$ avec probabilité 1. C'est le résultat souhaité en posant $\lambda_1 = -\lambda_0$.

3 Si X a une variance nulle alors est elle presque-sûrement constante. On en déduit que $X = E(X)$ ce qui implique que :

$$\text{Cov}(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)) = 0$$

donc

$$\text{Cov}(X, Y)^2 = V(X)V(Y)$$

ce qui donne le résultat.

86 Utiliser les inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev

Quand on ne sait pas !

Les inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev permettent de majorer la probabilité de certains évènements.

Soit X une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

- **Inégalité de Markov.** Si X est positive et admet une espérance alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P(X \geq \varepsilon) \leq \frac{E(X)}{\varepsilon}$$

- **Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.** Si X admet une variance alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

Que faire ?

- On utilise l'inégalité de Markov quand on souhaite majorer la probabilité qu'une variable positive soit plus grande qu'une valeur donnée.
- On utilise l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev quand on souhaite majorer la probabilité qu'une variable « s'écarte » de son espérance.

Conseils

- Ne pas oublier de préciser que X doit être positive pour l'inégalité de Markov.
- Dans un exercice, il est plus simple d'écrire les inégalités pour $\varepsilon > 0$ quelconque et faire un choix précis pour ce réel ensuite selon le résultat demandé.

Exemple traité

Soit X une variable aléatoire réelle discrète admettant une variance σ^2 (avec $\sigma > 0$). Montrer que :

$$\forall \alpha > 0,\ P\left(|X - E(X)| < \alpha\sigma\right) \geq 1 - \frac{1}{\alpha^2}$$

SOLUTION

La variable X admet une variance donc d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on sait que pour tout réel $\varepsilon > 0$, on a :

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

ou encore en utilisant l'évènement contraire de $(|X - E(X)| \geq \varepsilon)$:

$$1 - P(|X - E(X)| < \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

ce qui se réécrit :

$$P(|X - E(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

On sait que $\sigma > 0$ donc pour tout réel $\alpha > 0$, $\alpha\sigma > 0$ et en appliquant l'inégalité précédente avec $\varepsilon = \alpha\sigma$, on obtient :

$$P\left(|X - E(X)| < \alpha\sigma\right) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{(\alpha\sigma)^2} = 1 - \frac{1}{\alpha^2}$$

Exercices

EXERCICE 86.1 Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{n}$ où n est un entier supérieur ou égal à 2.

1. Montrer que $P(X \geq n^2) \leq \frac{1}{n}$.
2. Montrer que $P(|X - n| \geq n) \leq 1 - \frac{1}{n}$.
3. En déduire que $P(X \geq 2n) \leq 1 - \frac{1}{n}$.

EXERCICE 86.2 Soient X une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé et $\lambda > 0$. On suppose que $\exp(\lambda X)$ admet une espérance. Montrer que pour tout réel a,

$$P(X \geq a) \leq e^{-\lambda a} E(e^{\lambda X})$$

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 86.1

1 Utiliser l'inégalité de Markov.

2 Utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

3 Écrire $(|X-n| \geq n)$ comme l'union de deux événements ne dépendant plus de la valeur absolue.

EXERCICE 86.2

Commencer par justifier que les deux événements $(X \geq a)$ et $(\exp(\lambda X) \geq \exp(\lambda a))$ sont égaux.

Solutions des exercices

EXERCICE 86.1 D'après le cours X admet une espérance valant $E(X) = n$ et une variance valant :

$$V(X) = \frac{1 - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = n^2 - n$$

1 La variable X est positive et admet une espérance donc d'après l'inégalité de Markov (sachant que $n^2 > 0$) :

$$P(X \geq n^2) \leq \frac{E(X)}{n^2} = \frac{1}{n}$$

2 La variable aléatoire admet une variance et $n > 0$ donc, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$P(|X-n| \geq n) = P(|X - E(X)| \geq n) \leq \frac{V(X)}{n^2} = \frac{n^2 - n}{n^2} = 1 - \frac{1}{n}$$

3 Remarquons que :

$$(|X-n| \geq n) = (X - n \geq n) \cup (X - n \leq -n) = (X \geq 2n) \cup (X \leq 0)$$

Or $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ donc $(X \leq 0) = \varnothing$. Ainsi,

$$(|X-n| \geq n) = (X \geq 2n)$$

D'après la question précédente, on en déduit que :

$$P(X \geq 2n) \leq 1 - \frac{1}{n}$$

EXERCICE 86.2

Soit $a \in \mathbb{R}$. Sachant que $\lambda > 0$, on a :

$$(X \geq a) = (\lambda X \geq \lambda a)$$

De plus, la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc :

$$(X \geq a) = (\exp(\lambda X) \geq \exp(\lambda a))$$

On sait que $\exp(\lambda X)$ admet une espérance et est positive donc d'après l'inégalité de Markov (sachant que $e^{\lambda a} > 0$) :

$$P(X \geq a) = P((\exp(\lambda X) \geq \exp(\lambda a)) \leq \frac{E(e^{\lambda X})}{e^{\lambda a}}$$

ce qui implique que :

$$P(X \geq a) \leq e^{-\lambda a} E(e^{\lambda X})$$

87 Déterminer et utiliser une fonction génératrice

Quand on ne sait pas !

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. La fonction G_X définie par

$$G_X(t) = E(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)t^n$$

est appelée *fonction génératrice* de la variable aléatoire X. La seconde égalité se déduit de la première par le théorème du transfert. Il en découle que :

- La série définissant G_X a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1. Il y a convergence normale sur $[-1, 1]$ et $G_X(1) = 1$.
- La fonction G_X est continue sur $[-1, 1]$ et de classe C^∞ sur $]-1, 1[$.
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X = n) = \frac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$.

Le dernier point a pour corollaire fondamental le fait que la fonction génératrice caractérise la loi de X.
Enfin, le résultat suivant est très utile pour prouver que X admet une espérance et la calculer :

- X a une espérance finie si, et seulement si, G_X est dérivable à gauche en 1. Dans ce cas, $E(X) = \lim\limits_{t\to 1^-} G'_X(t)$.
- X^2 a une espérance finie (donc X a une variance) si, et seulement si, G_X est deux fois dérivable à gauche en 1. Dans ce cas, $E(X^2) = \lim\limits_{t\to 1^-} G''_X(t) + E(X)$.

Que faire ?

- Le calcul de la fonction génératrice amène souvent à des questions sur les séries entières. Il arrive fréquemment qu'il faille reconnaitre une dérivée de $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n$ et exploiter le fait que, pour tout $x \in]-1, 1[$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.
- Si on prouve que le rayon de convergence de G_X est strictement supérieur à 1 alors l'existence de $E(X)$ est directe.

Conseils

- Il est conseillé de connaitre les fonctions génératrices de toutes les lois au programme. En effet, cette dernière caractérisant la loi, on peut immédiatement conclure si on reconnait une fonction génératrice au programme.
- Les fonctions génératrices des variables aléatoires finies sont des polynômes il n'y a donc pas de problème de convergence.
- Certains exercices ne font pas explicitement appel aux fonctions génératrices mais leur emploi simplifie souvent la réponse. On devine qu'on peut y avoir recours lorsque les variables aléatoires sont à valeurs dans $\mathbb{N}$ (finies ou non) et lorsque l'on pose la question de l'existence d'une espérance.

Exemple traité

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement des lois binomiales $\mathcal{B}(n,p)$ et $\mathcal{B}(m,p)$.

1 Donner la fonction génératrice de X.

2 Donner la fonction génératrice de $X+Y$, puis sa loi.

➲ Source : TPE PC

SOLUTION

1 Comme X suit la loi $\mathcal{B}(n,p)$, alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $G_X(t) = (1-p+tp)^n$. En effet, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ d'où, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} G_X(t) = \sum_{k=0}^{n} P(X=k)t^k &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (tp)^k (1-p)^{n-k} t^k \\ &= (1-p+tp)^n \end{aligned}$$

d'après le binôme de Newton. Il est clair que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $G_Y(t) = (1-p+tp)^m$.

2 Soit $t \in \mathbb{R}$. Comme X et Y sont indépendantes alors t^X et t^Y également, et on a :

$$\begin{aligned} G_{X+Y}(t) = E\left(t^{X+Y}\right) &= E\left(t^X \times t^Y\right) \\ &= E(t^X) \times E(t^Y) \\ &= G_X(t) \times G_Y(t) \\ &= (1-p+tp)^n \times (1-p+tp)^m \\ &= (1-p+tp)^{n+m} \end{aligned}$$

or on reconnait la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $(n+m,p)$, la fonction génératrice caractérisant les lois on en conclut donc que $X+Y$ suit la loi $\mathcal{B}(n+m,p)$.

Exercices

EXERCICE 87.1

Soit T une variable aléatoire telle que $T(\Omega) = [\![0, k]\!]$. On considère $k+1$ variables aléatoires $(X_i)_{i\in[\![0,k]\!]}$ suivant une même loi à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que toutes ces variables aléatoires sont mutuellement indépendantes. On définit enfin une variable aléatoire Y par $Y(\omega) = \sum_{i=0}^{T(\omega)} X_i(\omega)$.

1. On désigne par G_Y (respectivement G_{X_1} et G_T) la fonction génératrice de Y (respectivement X_1 et T). Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $G_Y(t) = G_T(G_{X_1}(t))$.
2. Montrer que si les X_i admettent une espérance alors Y aussi.
3. Donner sous ces hypothèses une expression de $E(Y)$ en fonction de $E(X_1)$ et de $E(T)$.

⊃ Source : D'après ENSAM PSI

EXERCICE 87.2

On procède à des répétitions indépendantes d'une expérience où seules deux issues sont possibles : «succès» avec une probabilité p et «échec» avec une probabilité $1-p$. On ne s'arrête que lorsqu'on obtient deux succès consécutifs et on note X le nombre d'expériences nécessaires à l'obtention de ces deux succès consécutifs.
Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 4$ on a :

$$P(X = n) = (1-p)P(X = n-1) + p(1-p)P(X = n-2)$$

Quel est alors le nombre moyen d'expériences à effectuer ?

⊃ Source : D'après TPE PSI

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 87.1 2 On justifie de la dérivabilité de G_Y en 1 et en dérivant on trouve l'espérance de Y en fonction de celles de T et de X_1.

EXERCICE 87.2 On montre que la suite $(P(X = n))_{n\geqslant 2}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 en conditionnant par le résultat du premier lancer. En remplaçant son expression dans la série génératrice de X, on montre que G_X vérifie une identité qui permet de la calculer. On vérifie alors que G_X est dérivable en 1 et on en déduit $E(X)$.

EXERCICE 87.1

1 On note tout d'abord que $Y(\Omega) = \mathbb{N}$. Soit $n \in \mathbb{N}$, la famille $([T = j])_{j \in [\![0,k]\!]}$ forme un système complet d'événements, on applique donc la formule des probabilités totales :

$$P(Y = n) = \sum_{j=0}^{k} P([Y = n] \cap [T = j])$$

en utilisant maintenant l'indépendance mutuelle des $(X_i)_{i \in [\![0,k]\!]}$:

$$P(Y = n) = \sum_{j=0}^{k} P\left(\left[\sum_{k=0}^{T} X_k = n\right] \cap [T = j]\right) = \sum_{j=0}^{k} P\left(\left[\sum_{k=0}^{j} X_k = n\right] \cap [T = j]\right)$$
$$= \sum_{j=0}^{k} P\left(\sum_{i=0}^{j} X_i = n\right) P(T = j)$$

Dès lors, pour tout $t \in]-1, 1[$, on a :

$$G_Y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{k} P\left(\sum_{i=0}^{j} X_i = n\right) P(T = j)\, t^n$$

Comme, pour tout $j \in [\![0, k]\!]$, $\left| P\left(\sum_{i=0}^{j} X_i = n\right) P(T = j)\, t^n \right| \leqslant |t|^n$ et que t est un élément de $]0, 1[$ alors, les séries à termes positifs $\sum_{n \geqslant 0} P\left(\sum_{i=0}^{j} X_i = n\right) P(T = j)\, t^n$ convergent absolument donc leur somme est convergente et on peut intervertir les deux sommes dans l'expression de G_Y. Par suite :

$$G_Y(t) = \sum_{j=0}^{k} \sum_{n=0}^{+\infty} P\left(\sum_{i=0}^{j} X_i = n\right) P(T = j)\, t^n$$
$$= \sum_{j=0}^{k} P(T = j) \sum_{n=0}^{+\infty} P\left(\sum_{i=0}^{j} X_i = n\right) t^n$$

La somme $\sum_{n=0}^{+\infty} P\left(\sum_{i=0}^{j} X_i = n\right) t^n$ est en fait la fonction génératrice de $\sum_{i=0}^{j} X_i$ d'où,

par mutuelle indépendance des $(X_i)_{i\in[\![0,j]\!]}$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P\left(\sum_{i=0}^{j} X_i = n\right) t^n = E\left(t^{\sum_{i=0}^{j} X_i}\right) = E\left(\prod_{i=0}^{j} t^{X_i}\right) = \prod_{i=0}^{j} E\left(t^{X_i}\right) = \prod_{i=0}^{j} G_{X_i}(t)$$
$$= (G_{X_1}(t))^j$$

car toutes les variables aléatoires X_i suivent la même loi et ont donc la même fonction génératrice. Par suite,

$$G_Y(t) = \sum_{j=0}^{k} P(T=j)\,(G_{X_1}(t))^j$$

et on reconnait alors la fonction génératrice de T. Finalement, pour tout $t \in]-1,1[$,

$$G_Y(t) = G_T(G_{X_1}(t))$$

2 La variable aléatoire T étant finie, sa fonction génératrice est un polynôme donc dérivable en $G_{X_1}(1) = 1$. Par hypothèse, les X_i possèdent une espérance donc G_{X_1} est dérivable en 1. En conséquence, G_Y est dérivable en 1 en tant que composée de fonctions dérivables en 1 donc Y possède une espérance.

3 En dérivant une composée de fonctions dérivables il vient :

$$G'_Y(1) = G'_T(G_{X_1}(1)) \times G'_{X_1}(1) = G'_T(1) \times G'_{X_1}(1) = E(T) \times E(X_1)$$

EXERCICE 87.2

On pose X la variable aléatoire comptant le nombre d'expériences pour obtenir un succès, on a $X(\Omega) = \{n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2\}$.
Soit $n \geqslant 2$. L'ensemble des éléments de $(X = n)$ peut s'identifier avec celui des listes de longueurs n constituées de 0 (échec de l'expérience) et de 1 (succès) se terminant par deux 1 consécutifs ; chaque 1 autre que l'avant dernier étant nécessairement suivi d'un 0 compte tenu de la définition de X. On a :

- l'événement $(X = 2)$ ne contient qu'un élément $(1, 1)$ qui a pour probabilité p^2.
- l'événement $(X = 3)$ ne contient qu'un élément $(0, 1, 1)$ qui a pour probabilité $(1-p)p^2$.
- Si $n \geqslant 4$, on définit la variable aléatoire S_1 qui vaut 1 si la première expérience est un succès et 0 sinon. Il est clair que les ensembles $(S_1 = 0)$ et $(S_1 = 1)$ forment un système complet d'événements, dès lors, d'après la formule des probabilités totales,

$$P(X = n) = P(X = n|\ S_1 = 1)P(S_1 = 1) + P(X = n|\ S_1 = 0)P(S_1 = 0)$$

Si le premier résultat est un 0, il peut être indifféremment suivi d'un 0 ou d'un 1 et le reste de la liste est un élément de $(X = n-1)$. En revanche, si le premier résultat est

un 1 alors il doit nécessairement être suivi d'un 0 et le reste de la liste est un élément de $(X = n-2)$. On en déduit la relation de récurrence :

$$P(X=n) = (1-p)P(X=n-1) + p(1-p)P(X=n-2)$$

En notant G_X la fonction génératrice de X, pour $|t| \leqslant 1$ on a

$$\begin{aligned}
G_X(t) &= \sum_{n=2}^{+\infty} P(X=n)t^n \\
&= P(X=2)t^2 + P(X=3)t^3 + \sum_{n=4}^{+\infty} P(X=n)t^n \\
&= p^2t^2 + p^2(1-p)t^3 + t^2\sum_{n=2}^{+\infty} P(X=n+2)t^n \\
&= p^2t^2 + p^2(1-p)t^3 + t^2\sum_{n=2}^{+\infty} \left((1-p)P(X=n+1)t^n + p(1-p)P(X=n)t^n\right) \\
&= p^2t^2 + p^2(1-p)t^3 + (1-p)t\sum_{n=3}^{+\infty} P(X=n)t^n + p(1-p)t^2\sum_{n=2}^{+\infty} P(X=n)t^n
\end{aligned}$$

en ré-indiçant la première des deux sommes. Finalement $G_X(t)$ vérifie

$$G_X(t) = p^2t^2 + p^2(1-p)t^3 + (1-p)t(G_X(t) - p^2t^2) + p(1-p)t^2G_X(t)$$

soit :

$$\left(1-(1-p)t-p(1-p)t^2\right)G_X(t) = p^2t^2$$

D'une part, le polynôme $d(t) = 1-(1-p)t-p(1-p)t^2$ est positif entre ses racines, notées r_1 et r_2 (avec $r_1 < r_2$) car le coefficient de t^2 est négatif. D'autre part, comme $d(-1) = 1+(1-p)^2$ et $d(1) = p^2$ on a $[-1,1] \subsetneq]r_1, r_2[$. Ainsi, pour tout $t \in [-1,1]$ (au moins), on a :

$$G_X(t) = \frac{p^2t^2}{1-(1-p)t-p(1-p)t^2}$$

En particulier, G_X est dérivable au point $t=1$, X admet donc une espérance finie et $E(X) = G'_X(1) = \frac{1+p}{p^2}$.

Exponentielle de matrices et équations différentielles

Résoudre un système différentiel linéaire homogène à coefficients constants

Dans cette fiche, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Quand on ne sait pas !

Un système différentiel linéaire homogène à coefficients constants est de la forme

$$X' = AX$$

où X est fonction de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}^n$ et A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Que faire ?

- Dans le cas où la matrice A est diagonale, le système différentiel se ramène à n équations différentielles linéaires homogènes scalaires.

  EXEMPLE 1 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et on pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Pour résoudre le système $X' = AX$ il suffit de résoudre l'équation $x_1' = x_1$ puis l'équation $x_2' = 2x_2$. On en déduit que les solutions sont de la forme

  $$X : t \mapsto \begin{pmatrix} \lambda_1 e^t \\ \lambda_2 e^{2t} \end{pmatrix}$$

- Dans le cas général, on va diagonaliser ou trigonaliser la matrice A pour se ramener au cas précédent via un changement de base. Précisément, soit P une matrice inversible telle que $\Delta = P^{-1}AP$ soit diagonale (ou triangulaire supérieure). On a alors

  $$X' = AX \iff X' = P\Delta P^{-1}X \iff P^{-1}X' = \Delta P^{-1}X$$

  Comme A est constante, P aussi, de ce fait, en posant $Y = P^{-1}X$ on est ramené à résoudre le système $Y' = \Delta Y$. On trouve finalement les solutions du système en calculant $X = PY$.

Conseils

- Dans la méthode de changement de base exposée ci-dessus, il n'est pas nécessaire de calculer P^{-1}.
- On peut aussi utiliser les exponentielles de matrices. En effet, d'après le cours, les solutions du système $X' = AX$ sont les fonctions de la forme

$$X : t \mapsto \exp(tA)\Lambda$$

où Λ est une constante appartenant à $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$. Voir fiche 91.

Exemple traité

On veut résoudre le système différentiel

$$(S) : \begin{cases} x_1' &= x_2 + x_3 - 3x_1 \\ x_2' &= x_3 + x_1 - 3x_2 \\ x_3' &= x_1 + x_2 - 3x_3 \end{cases}$$

1 Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. On précisera une matrice P telle que $\Delta = P^{-1}AP$ soit diagonale.

2 Résoudre le système différentiel $Y' = \Delta Y$.

3 En déduire les solutions du système (S).

SOLUTION

1 On commence par chercher les valeurs propres de la matrice A. Pour cela on calcule son polynôme caractéristique :

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X+3 & -1 & -1 \\ -1 & X+3 & -1 \\ -1 & -1 & X+3 \end{vmatrix}$$

En réalisant les opérations $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$ puis $C_3 \leftarrow C_3 + C_2$ qui ne modifient pas le déterminant, on obtient

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X+3 & -1 & -2 \\ -1 & X+3 & X+2 \\ 0 & -X-4 & 0 \end{vmatrix}$$

En développant selon la dernière ligne on obtient finalement

$$\chi_A = (X+4)(X^2+5X+4) = (X+1)(X+4)^2$$

On en déduit que les valeurs propres de A sont -1 et -4. On cherche alors les vecteurs propres.

- On a $A+I=\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix}$. Il est clair que cette matrice est de rang 2 et que le vecteur $e_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est dans son noyau. Le sous-espace propre de A associé à la valeur propre -1 est la droite vectorielle engendrée par e_1.
- On a $A+4I=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$. Il est clair que cette matrice est de rang 1 et que les vecteurs $e_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ et $e_3=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ sont dans son noyau. Le sous-espace propre de A associé à la valeur propre -4 est le plan vectoriel engendré par e_2 et e_3.

On pose alors $P=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}$. Il découle de ce qui précède que

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-4&0\\0&0&-4\end{pmatrix}$$

2 On pose $Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$. On veut résoudre le système différentiel $Y'=\Delta Y$. On est ramené aux trois équations différentielles scalaires :

$$y_1'=-y_1,\ \ y_2'=-4y_2,\ \ y_3'=-4y_3$$

Finalement Y est de la forme

$$Y:t\mapsto\begin{pmatrix}\lambda_1e^{-t}\\\lambda_2e^{-4t}\\\lambda_3e^{-4t}\end{pmatrix}$$

où $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3$.

3 Soit X une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a

$$X'=AX\iff X'=P\Delta P^{-1}X\iff P^{-1}X'=\Delta P^{-1}X\iff Y'=\Delta Y$$

en posant $Y=P^{-1}X$. On en déduit que les solutions du système différentiel (S) sont les fonctions de la forme $X=PY$, soit :

$$X:t\mapsto\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1e^{-t}\\\lambda_2e^{-4t}\\\lambda_3e^{-4t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1e^{-t}+(\lambda_2+\lambda_3)e^{-4t}\\\lambda_1e^{-t}-\lambda_2e^{-4t}\\\lambda_1e^{-t}-\lambda_3e^{-4t}\end{pmatrix}$$

Exercices

EXERCICE 88.1

On veut résoudre le système différentiel

$$(S) : \begin{cases} x_1' &= 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 \\ x_2' &= -x_1 + x_3 \\ x_3' &= x_1 + x_2 \end{cases}$$

On pose $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une matrice P telle que $P^{-1}AP$ soit de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On notera $T = P^{-1}AP$.
2. Résoudre le système différentiel $(S') : Y' = TY$.
3. En déduire les solutions du système (S).

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 88.1

1. Commencer en cherchant les valeurs propres et les sous-espaces propres.
2. En posant $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, déterminer d'abord y_3.

Solutions des exercices

EXERCICE 88.1

1. On commence par chercher les valeurs propres de la matrice A. Pour cela on calcule son polynôme caractéristique :

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X-3 & -2 & 2 \\ 1 & X & -1 \\ -1 & -1 & X \end{vmatrix}$$

Comme dans l'exemple traité, on peut faire les opérations $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$ puis

$C_3 \leftarrow C_3 - C_2$ qui ne modifient pas le déterminant. On obtient, en développant selon la dernière ligne

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X-3 & -2 & 4 \\ 1 & X & -1-X \\ 0 & X-1 & 0 \end{vmatrix} = (X-1)(X^2-2X+1) = (X-1)^3$$

On en déduit que la seule valeur propre de A est 1. On cherche alors les vecteurs propres.

On a $A - I = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Il est clair que cette matrice est de rang 1 et que les vecteurs $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont dans son noyau. Le sous-espace propre de A associé à la valeur propre 1 est le plan vectoriel engendrée par e_1 et e_2.

En particulier A n'est pas diagonalisable. On va alors la trigonaliser. On complète la famille (e_1, e_2) en une base en choisissant un vecteur e_3 qui n'appartient pas à $\mathrm{Vect}(e_1, e_2)$. Posons, $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et donc $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Il découle de ce qui précède que $T = P^{-1}AP$ est de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (le coefficient 1 en bas à droite venant par exemple du fait que la trace d'une matrice est invariable par changement de base). Pour déterminer α et β il reste à décomposer $Ae_3 - e_3$ dans la base (e_1, e_2). On a

$$Ae_3 - e_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = e_1 + e_2$$

Finalement

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2 On pose $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$. On veut résoudre le système différentiel $Y' = \Delta Y$ c'est-à-dire :

$$\begin{cases} y_1' &= y_1 + y_3 \\ y_2' &= y_2 + y_3 \\ y_3' &= y_3 \end{cases}$$

On commence en résolvant la troisième équation et on obtient que la fonction y_3 est de la forme $y_3 : t \mapsto \lambda_3 e^t$.

On résout alors l'équation $(E_2) : y_2' = y_2 + \lambda_3 e^t$. On cherche des solutions de la forme $y_2 : t \mapsto (\alpha t + \beta)e^t$.

$$\begin{aligned} y_2 \text{ vérifie } (E_2) &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \alpha e^t + (\alpha t + \beta)e^t = (\alpha t + \beta)e^t + \lambda_3 e^t \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \alpha e^t = \lambda_3 e^t \\ &\iff \alpha = \lambda_3 \end{aligned}$$

On en déduit que y_2 doit être de la forme $t \mapsto (\lambda_3 t + \lambda_2)e^t$.
On procède de même pour la première équation du système et on obtient finalement que les solutions Y du système (S') sont de la forme

$$Y : t \mapsto \begin{pmatrix} (\lambda_3 t + \lambda_1)e^t \\ (\lambda_3 t + \lambda_2)e^t \\ \lambda_3 e^t \end{pmatrix}$$

où $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$.

3 Soit X une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a

$$X' = AX \iff X' = P\Delta P^{-1}X \iff P^{-1}X' = \Delta P^{-1}X \iff Y' = \Delta Y$$

en posant $Y = P^{-1}X$. On en déduit que les solutions du système différentiel (S) sont les fonctions de la forme $X = PY$ soit :

$$X : t \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\lambda_3 t + \lambda_1)e^t \\ (\lambda_3 t + \lambda_2)e^t \\ \lambda_3 e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2\lambda_3 t + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)e^t \\ (-\lambda_3 t - \lambda_1)e^t \\ (\lambda_3 t + \lambda_2)e^t \end{pmatrix}$$

Résoudre une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2 à l'aide d'une variation des constantes

89

Dans cette fiche, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Quand on ne sait pas !

- Une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2 est une équation de la forme

$$y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = b(x) \qquad \text{(E)}$$

où a_0, a_1 et b sont des fonctions continues sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

- En posant $Y : x \mapsto \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$, $A : x \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0(x) & -a_1(x) \end{pmatrix}$ et $B : x \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ b(x) \end{pmatrix}$, l'équation (E) est équivalente au système différentiel d'ordre 1 :

$$Y' = AY + B$$

- Le théorème de Cauchy linéaire affirme que l'ensemble des solutions sur I de l'équation (E) est un espace affine de dimension 2. Plus précisément, Si on note

$$y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0 \qquad \text{(H)}$$

l'équation homogène associée.

  - L'ensemble des solutions définies sur I de (H), noté S_H, est un espace vectoriel de dimension 2.
  - L'équation (E) a des solutions définies sur I et, si y_0 est une telle solution alors l'ensemble des solutions de (E) est de la forme

$$S_E = \{y_0 + h \ , \ h \in S_H\}$$

Que faire ?

On considère une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2 :

$$y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = b(x) \qquad \text{(E)}$$

On va supposer que l'on connait un système fondamental des solutions de l'équation homogène, c'est-à-dire une base (u, v) de l'ensemble S_H des solutions de l'équation homogène associée

$$y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0 \qquad \text{(H)}$$

On veut alors trouver une solution particulière de (E) pour déterminer totalement l'ensemble S_E des solutions de l'équation (E). On va appliquer la méthode de la variation de la constante.
On cherche une solution particulière sous la forme

$$y_0 : x \mapsto \lambda(x)u(x) + \mu(x)v(x)$$

en imposant que $\lambda' u + \mu' v = 0$. De ce fait, $y_0' = \lambda u' + \mu v'$ et $y_0'' = \lambda' u' + \lambda u'' + \mu' v' + \mu v''$. En faisant les calculs :

$$\begin{aligned} y_0 \text{ vérifie } (E) &\iff \lambda' u' + \lambda u'' + \mu' v' + \mu v'' + a_1(\lambda u' + \mu v') + a_0(\lambda u + \mu v) = b \\ &\iff \lambda(u'' + a_1 u' + a_0 u) + \mu(v'' + a_1 v' + a_0 v) + \lambda' u' + \mu' v' = b \end{aligned}$$

Comme, $u'' + a_1 u' + a_0 u = 0$ et $v'' + a_1 v' + a_0 v = 0$,

$$y_0 \text{ vérifie } (E) \iff \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda' u + \mu' v & = & 0 \\ \lambda' u' + \mu' v' & = & b \end{array} \right.$$

Il ne reste plus qu'à résoudre ce système (on a, pour chaque x dans I, un système de Cramer du fait que (u, v) est une base de S_H) afin de déterminer les fonctions λ' et μ' et ensuite intégrer pour déterminer une solution particulière.

Conseils

- La condition que l'on impose aux coefficients que l'on cherche est naturelle quand on écrit la variation de la constante pour le système différentiel d'ordre 1 associé.
- Quand on mène les calculs, il est préférable d'appeler les fonctions qui forment la base de l'ensemble des solutions de l'équation homogène par des lettres et les remplacer par leur valeur le plus tard possible.

Exemple traité

On veut résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2 suivante

$$y''(x) + y(x) = \cos(x) \qquad \text{(E)}$$

On cherche les solutions à valeurs réelles.

1. Déterminer une base (u, v) de l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée.
2. Déterminer une solution particulière de (E) et résoudre l'équation (E)

SOLUTION

1 L'équation homogène associée est

$$y''(x) + y(x) = 0 \qquad \text{(H)}$$

C'est une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2 à coefficients constants. Son équation caractéristique associée est $X^2 + 1 = 0$ dont les solutions sont $\pm i$. On en déduit que

$$S_H = \{x \mapsto \lambda\cos(x) + \mu\sin(x)\ ,\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

On peut donc poser $u : x \mapsto \cos(x)$ et $v : x \mapsto \sin(x)$ comme base de l'ensemble des solutions de (H).

2 On cherche une solution particulière y_0 à (E) de la forme $y_0 : x \mapsto \lambda(x)u(x)+\mu(x)v(x)$ où λ et μ sont des fonctions au moins deux fois dérivables définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On impose de plus que $\lambda' u + \mu' v = 0$.
On a alors $y_0' = \lambda u' + \mu v'$ et $y_0'' = \lambda' u' + \lambda u'' + \mu' v' + \mu v''$ et donc

$$\begin{aligned} y_0 \text{ vérifie } (E) &\iff \forall x \in \mathbb{R}, y_0''(x) + y_0(x) = \cos(x) \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \lambda'(x)u'(x) + \mu'(x)v'(x) = \cos(x) \end{aligned}$$

À x fixé, on veut donc résoudre le système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u(x)\lambda'(x) + v(x)\mu'(x) & = & 0 \\ u'(x)\lambda'(x) + v'(x)\mu'(x) & = & \cos(x) \end{array} \right.$$

Il peut aussi s'écrire

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \cos(x)\lambda'(x) + \sin(x)\mu'(x) & = & 0 \\ -\sin(x)\lambda'(x) + \cos(x)\mu'(x) & = & \cos(x) \end{array} \right.$$

Matriciellement, en posant $Q(x) = \begin{pmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix}$ et $Z(x) = \begin{pmatrix} \lambda'(x) \\ \mu'(x) \end{pmatrix}$, on obtient l'écriture $Q(x)Z(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(x) \end{pmatrix}$. En remarquant que Q est une matrice orthogonale, on peut résoudre simplement le système : $Z = Q^T(x)\begin{pmatrix} 0 \\ \cos(x) \end{pmatrix}$.

On obtient dès lors :

$$Z = \begin{pmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \cos(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(x)\cos(x) \\ \cos^2(x) \end{pmatrix}$$

On pouvait aussi résoudre le système par combinaisons.

Il reste alors à intégrer pour trouver que l'on peut prendre $\lambda : x \mapsto \dfrac{1}{2}\cos^2(x)$. De même, en utilisant que $\cos^2(x) = \dfrac{1}{2}(\cos(2x) + 1)$ on voit que l'on peut prendre $\mu : x \mapsto \dfrac{1}{4}(2x + \sin(2x))$.

Cela permet d'obtenir, en remplaçant $\sin(2x)$ par $2\cos(x)\sin(x)$ et en simplifiant, que

$$y_0 : x \mapsto \frac{1}{2}\cos^3(x) + \frac{1}{4}(2x + \sin(2x))\sin(x) = \frac{1}{2}x\sin(x) + \frac{1}{2}\cos(x)$$

est une solution de (E) et que finalement

$$S_E = \left\{ x \mapsto \frac{1}{2}x\sin(x) + \alpha\cos(x) + \beta\sin(x)\ ,\ (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Exercices

EXERCICE 89.1

On veut résoudre sur $I =]0, \pi[$ l'équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2 suivante

$$y''(x) + y(x) = \operatorname{cotan}(x) \qquad \text{(E)}$$

On cherche les solutions à valeurs réelles.

1. Déterminer une base (u, v) de l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée.
2. Déterminer sur I une primitive de $\theta : x \mapsto \frac{\cos^2 x}{\sin x}$ en posant $t = \cos x$.
3. Déterminer une solution particulière de (E) et résoudre l'équation (E).

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 89.1

1. L'équation homogène associée est à coefficients constants.
2. On fera attention à bien justifier le changement de variable utilisé et à spécifier les intervalles d'intégration.
3. Utiliser la méthode exposée ci-dessus.

Solutions des exercices

EXERCICE 89.1

1. L'équation homogène associée est

$$y''(x) + y(x) = 0 \qquad \text{(H)}$$

C'est une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2 à coefficients constants. Son équation caractéristique associée est $X^2 + 1 = 0$. Les racines sont i et $-i$. On en déduit que

$$S_H = \{ x \mapsto \lambda\cos(x) + \mu\sin(x)\ ,\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \}$$

On peut donc poser $u : x \mapsto \cos(x)$ et $v : x \mapsto \sin(x)$ comme base de l'ensemble des solutions de (H).

2 On veut calculer une primitive $X \mapsto \displaystyle\int^X \frac{\cos^2 x}{\sin x} dx$ définie sur l'intervalle $I =]0, \pi[$.
On pose $t = \cos x$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Dès lors, en écrivant $dt = -\sin x dx$ on obtient

$$\begin{aligned}
\int^X \frac{\cos^2 x}{\sin x} dx &= \int^X \frac{\cos^2 x \sin x}{\sin^2 x} dx \\
&= \int^X \frac{\cos^2 x \sin x}{1 - \cos^2 x} dx \\
&= \int^{\cos X} \frac{-t^2}{1 - t^2} dt \\
&= \int^{\cos X} 1 dt - \int^{\cos X} \frac{1}{1 - t^2} dt \\
&= \cos X - \frac{1}{2} \int^{\cos X} \left(\frac{1}{1 - t} + \frac{1}{1 + t} dt \right) \\
&= \cos X - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \cos X}{1 - \cos X} \right)
\end{aligned}$$

3 On cherche une solution particulière y_0 à (E) de la forme $y_0 : x \mapsto \lambda(x)u(x) + \mu(x)v(x)$ où λ et μ sont des fonctions au moins deux fois dérivables définies de I dans $\mathbb{R}$. On impose de plus que $\lambda' u + \mu' v = 0$.
On a alors $y_0' = \lambda u' + \mu v'$ et $y_0'' = \lambda' u' + \lambda u'' + \mu' v' + \mu v''$ et donc

$$\begin{aligned}
y_0 \text{ vérifie } (E) &\iff \forall x \in \mathbb{R}, y_0''(x) + y_0(x) = \operatorname{cotan}(x) \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}, \lambda'(x)u'(x) + \mu'(x)v'(x) = \operatorname{cotan}(x)
\end{aligned}$$

À x fixé, on veut donc résoudre le système

$$\begin{cases} u(x)\lambda'(x) + v(x)\mu'(x) &= 0 \\ u'(x)\lambda'(x) + v'(x)\mu'(x) &= \operatorname{cotan}(x) \end{cases}$$

Il peut aussi s'écrire

$$\begin{cases} \cos(x)\lambda'(x) + \sin(x)\mu'(x) &= 0 \\ -\sin(x)\lambda'(x) + \cos(x)\mu'(x) &= \operatorname{cotan}(x) \end{cases}$$

Matriciellement, en posant $Q(x) = \begin{pmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix}$ et $Z(x) = \begin{pmatrix} \lambda'(x) \\ \mu'(x) \end{pmatrix}$, on obtient l'écriture $Q(x)Z(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \operatorname{cotan}(x) \end{pmatrix}$. En remarquant que Q est une matrice

orthogonale, on peut résoudre simplement le système : $Z = Q^T(x)\begin{pmatrix} 0 \\ \text{cotan}(x) \end{pmatrix}$. On obtient donc :

$$Z = \begin{pmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \text{cotan}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos(x) \\ \frac{\cos^2(x)}{\sin x} \end{pmatrix}$$

Il reste alors à intégrer pour trouver que l'on peut prendre $\lambda : x \mapsto -\sin(x)$.
De même, en utilisant la question précédente on voit que l'on peut prendre

$$\mu : x \mapsto \cos x - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right)$$

Cela permet d'obtenir que

$$y_0 : x \mapsto -\cos(x)\sin(x) + \left(\cos x - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right)\right)\sin x$$

Après simplification on obtient

$$y_0 : x \mapsto -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right)\sin x$$

Finalement

$$S_E = \left\{x \mapsto -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right)\sin x + \alpha\cos(x) + \beta\sin(x)\ ,\ (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

Résoudre une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2 à l'aide d'une indication

Dans cette fiche, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Quand on ne sait pas !

- Une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2 est une équation de la forme

$$y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = b(x) \qquad \text{(E)}$$

où a_0, a_1 et b sont des fonctions continues sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

- En posant $Y : x \mapsto \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$, $A : x \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0(x) & -a_1(x) \end{pmatrix}$ et $B : x \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ b(x) \end{pmatrix}$, l'équation (E) est équivalente au système différentiel d'ordre 1 :

$$Y' = AY + B$$

- Le théorème de Cauchy linéaire affirme que l'ensemble des solutions sur I de l'équation (E) est un espace affine de dimension 2. Plus précisément, Si on note

$$y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0 \qquad \text{(H)}$$

l'équation homogène associée.

  - L'ensemble des solutions définies sur I de (H), noté S_H, est un espace vectoriel de dimension 2.
  - L'équation (E) a des solutions définies sur I et, si y_0 est une telle solution alors l'ensemble des solutions de (E) est de la forme

$$S_E = \{y_0 + h \ , \ h \in S_H\}$$

Que faire ?

Il n'y a pas de méthode générale à connaitre pour résoudre une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2. Il faut suivre les indications de l'énoncé.
Le plus souvent, la méthode consiste à déterminer une solution particulière y_p (par exemple en cherchant une solution développable en série entière - fiche 66) puis à chercher les so-

lutions de l'équation sous la forme $y : x \mapsto z(x)y_p(x)$. Cela s'appelle un changement de fonction inconnue.
Il arrive que l'on fasse un changement de variables. Cela revient à poser $x = u(t)$. On détermine alors une équation différentielle (F) telle que $t \mapsto z(t) = y(u(t))$ vérifie (F) si et seulement si $x \mapsto y(x)$ vérifie (E).

Conseils

- Il ne faut pas confondre le changement de fonction inconnue avec le changement de variables.
- Il faut faire attention à bien vérifier que l'on obtient toutes les solutions de l'équation différentielle et uniquement les solutions cherchées. Il faut donc au choix, raisonner par équivalence ou mettre en place un raisonnement par analyse-synthèse rigoureux.

Exemple traité

On veut résoudre sur $I =]0, +\infty[$ l'équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2 suivante

$$x^2y''(x) - x(x+2)y'(x) + (x+2)y(x) = x(x+1) \qquad \text{(E)}$$

On cherche les solutions à valeurs réelles.

1 Déterminer une solution évidente y_p de l'équation homogène associée :

$$x^2y''(x) - x(x+2)y'(x) + (x+2)y(x) = 0 \qquad \text{(H)}$$

On vérifiera que y_p ne s'annule pas sur $]0, +\infty[$.

2 Soit y une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ définie sur $]0, +\infty[$, on pose $y : x \mapsto z(x)y_p(x)$. Déterminer une équation différentielle (F) telle que z' vérifie (F) si et seulement si y vérifie (E).

3 Résoudre (F). On pourra, après avoir résolu l'équation homogène associée, chercher une solution simple de la forme $x \mapsto x^\gamma$ avec $\gamma \in \mathbb{Z}$.

4 En déduire les solutions de (E).

SOLUTION

1 Il est clair que $y_p : x \mapsto x$ vérifie

$$x^2y''(x) - x(x+2)y'(x) + (x+2)y(x) = 0 \qquad \text{(H)}$$

car $y_p' : x \to 1$ et $y_p'' : x \mapsto 0$. De plus, cette fonction ne s'annule pas sur $]0, +\infty[$.

2 Soit y une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ définie sur $]0, +\infty[$, on pose $y : x \mapsto z(x)y_p(x)$. On a alors $y' : x \mapsto xz'(x) + z(x)$ et $y'' : x \mapsto xz''(x) + 2z'(x)$. En réinjectant dans l'équation (E) on obtient

$$
\begin{aligned}
y \text{ verifie (E)} &\iff \forall x \in I, x^2y''(x) - x(x+2)y'(x) + (x+2)y(x) = x(x+1) \\
&\iff \forall x \in I, x^3z''(x) + 2x^2z'(x) - x(x+2)(xz'(x) + z(x)) + \\
&\qquad (x+2)xz(x) = x(x+1) \\
&\iff \forall x \in I, x^3z''(x) + (2x^2 - x^2(x+2))z'(x) = x(x+1) \\
&\iff \forall x \in I, z''(x) - z'(x) = \frac{x+1}{x^2}
\end{aligned}
$$

On a montré que y vérifiait (E) si et seulement si z' vérifiait (F) où :

$$y'(x) - y(x) = \frac{x+1}{x^2} \tag{F}$$

3 L'équation (F) est une équation différentielle linéaire d'ordre 1. Son équation homogène associée $y' - y = 0$ a pour solutions les fonctions de la forme $x \mapsto \alpha e^x$ où $\alpha \in \mathbb{R}$. On remarque de plus que $x \mapsto -\dfrac{1}{x}$ vérifie (F) et donc

$$S_F = \left\{ x \mapsto \alpha e^x - \frac{1}{x}\ ,\ \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

4 Les fonctions z telles que z' vérifie (F) sont donc les fonctions de la forme

$$x \mapsto \alpha e^x - \ln(x) + \beta$$

où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.
On en déduit

$$S_E = \left\{ x \mapsto \alpha x e^x - x\ln(x) + \beta x\ ,\ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Exercices

EXERCICE 90.1

On veut résoudre sur $I =]0, +\infty[$ l'équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2 suivante

$$x^2y''(x) + xy'(x) - 4y(x) = 4x^2 \tag{E}$$

On cherche les solutions à valeurs réelles.
On veut effectuer le changement de variable $x = e^t$. Soit y une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ définie sur I vérifiant (E). On pose $z : t \mapsto y(e^t)$ définie sur $\mathbb{R}$.
On a donc pour tout $x \in I$, $y(x) = z(\ln x)$.

1 **a.** Exprimer les dérivées successives de y en fonctions de celles de z.

b. En déduire que z vérifie l'équation

$$z''(t) - 4z(t) = 4e^{2t} \qquad \text{(F)}$$

2 Résoudre l'équation (F)

3 En déduire les solutions de (E)

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 90.1

1 Commencer en posant $y(x) = z(\ln x)$ et utiliser les formules de dérivation d'une composée.

2 Résoudre l'équation homogène associée puis chercher une solution particulière.

3 On prendra garde à s'assurer que l'on n'obtient que les solutions de l'équation (E).

Solutions des exercices

EXERCICE 90.1

1 **a.** On pose pour $x \in I$, $y(x) = z(\ln x)$. En dérivant on obtient $y'(x) = \dfrac{1}{x} z'(\ln x)$ puis $y''(x) = -\dfrac{1}{x^2} z'(\ln x) + \dfrac{1}{x^2} z''(\ln x)$.

b. Comme y vérifie (E), on a, pour $x \in I$:

$$x^2 y''(x) + xy'(x) - 4y(x) = 4x^2$$

En remplaçant $x^2 y''(x)$ par $-z'(x) + z''(\ln x)$ et $xy'(x)$ par $z'(\ln x)$, on obtient :

$$z''(\ln x) - 4z(\ln x) = 4x^2$$

En posant $x = e^t$ (avec $t \in \mathbb{R}$) on en déduit que z vérifie l'équation (F).

2 L'équation homogène associée est

$$z''(t) - 4z(t) = 0 \qquad \text{(H)}$$

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène à coefficients constants. L'équation caractéristique est $X^2 - 4$ qui a pour solutions 2 et -2. On obtient

$$S_H = \{t \mapsto \alpha e^{2t} + \beta e^{-2t}\ ,\ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$$

On cherche maintenant une solution particulière de (F). Comme le second membre de l'équation est $t \mapsto 4e^{2t}$ et que 2 est une racine de l'équation caractéristique, on va chercher cette solution sous la forme $f : t \mapsto \gamma t e^{2t}$.

Ses dérivées sont $f' : t \mapsto (2t+1)\gamma e^{2t}$ et $f'' : t \mapsto (4t+4)\gamma e^{2t}$. De ce fait, f vérifie (F) si et seulement si $\gamma = 1$. On en déduit que

$$S_F = \{t \mapsto (t+\alpha)e^{2t} + \beta e^{-2t}\ ,\ (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\}$$

3 En refaisant le changement de variables dans l'autre sens, on obtient que **si** y est une solution de (E), **alors** il existe des réels α, β tels que

$$y : x \mapsto (\ln x + \alpha)x^2 + \frac{\beta}{x^2}$$

Réciproquement, on peut aisément vérifier que toutes ces fonctions sont effectivement des solutions de l'équation (E).

On peut aussi voir que quitte à diviser par x^2, (E) est une équation différentielle linéaire résolue d'ordre 2 à coefficients continus sur I, le théorème de Cauchy linéaire nous assure que l'ensemble de ses solutions est un sous-espace affine de dimension 2 et donc, toutes les solutions trouvées sont effectivement des solutions de (E).

91 Calculer l'exponentielle d'une matrice

Dans cette fiche, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Quand on ne sait pas !

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La série $\sum \frac{A^k}{k!}$ converge absolument. On appelle exponentielle de A et on note $\exp(A)$ sa somme :

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$$

- Si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ **qui commutent** alors

$$\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$$

- Si A est une matrice diagonale : $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ alors

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

Que faire ?

- Dans la majorité des cas, pour calculer l'exponentielle d'une matrice A, on peut chercher à diagonaliser. Précisément, s'il existe une matrice inversible P telle que $\Delta = P^{-1}AP$ soit diagonale. On a alors

$$\exp(A) = \exp(P\Delta P^{-1}) = P\exp(\Delta)P^{-1}$$

La deuxième égalité provient du fait que pour tout entier N,

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}(P\Delta P^{-1})^k = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} P\Delta^k P^{-1} = P\left(\sum_{k=0}^{N} \frac{\Delta^k}{k!}\right) P^{-1}$$

Il ne reste plus qu'à faire tendre N vers $+\infty$ et à utiliser que $M \mapsto PMP^{-1}$ est continue.

Cela permet de calculer $\exp(A)$ car l'exponentielle d'une matrice diagonale se calcule directement.

Cette méthode peut aussi s'utiliser quand la matrice A est simplement trigonalisable.

- On peut aussi décomposer la matrice A dont on veut calculer l'exponentielle sous la forme $A = M + N$ avec $MN = NM$. Dans ce cas, on ramène le calcul de $\exp(A)$ au calcul de $\exp(M)$ et $\exp(N)$.

Conseils

- Le calcul de l'exponentielle d'une matrice est souvent un calcul assez long. Il faut dès le début se demander si on a vraiment besoin de calculer l'exponentielle et, dans ce cas, réfléchir à la méthode qui semble le plus rapide.
- Dans le cas où la matrice A est nilpotente, l'exponentielle de A se calcule plus facilement. En notant d l'indice de nilpotence de A,

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{d-1} \frac{1}{k!} A^k$$

Exemple traité

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. On veut calculer $\exp(A)$.

1 Déterminer le polynôme caractéristique de A et en déduire que A n'est pas diagonalisable.

2 **a.** On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer $T = P^{-1}AP$.

b. Calculer $\exp(T)$ et en déduire $\exp(A)$.

3 **a.** Justifier que $N = A - 2I_2$ est une matrice nilpotente.

b. Retrouver la valeur de $\exp(A)$ en écrivant $A = 2I_2 + N$.

SOLUTION

1 Calculons le polynôme caractéristique,

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-3 & -1 \\ 1 & X-1 \end{vmatrix} = X^2 - 4X + 4 = (X-2)^2$$

On en déduit que A admet 2 pour unique valeur propre. Comme $A \neq 2I_2$ elle n'est pas diagonalisable.

2 **a.** Si on pose $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, on obtient

$$Ae_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2e_1 \text{ et } Ae_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = e_1 + 2e_2$$

La famille (e_1, e_2) est une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ donc, d'après la formule du changement de base, $T = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

b. En écrivant $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, on obtient que $T = 2I_2 + M$ et comme I_2 et M commutent, $\exp(T) = \exp(2I_2)\exp(M)$.
Maintenant, comme $M^2 = 0$, $\exp(M) = I_2 + M$. Finalement,

$$\exp(T) = \begin{pmatrix} e^2 & e^2 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix}$$

Il ne reste plus qu'à faire le changement de base :

$$\begin{aligned} \exp(A) &= P\exp(T)P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^2 & e^2 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2e^2 & e^2 \\ -e^2 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3 **a.** D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_A(A) = 0$. Cela implique que $N^2 = 0$. On peut aussi faire le calcul explicitement.

b. On a $A = 2I_2 + N$. Or I_2 et N commutent donc

$$\exp(A) = \exp(2I_2)\exp(N) = e^2(I+N) = \begin{pmatrix} 2e^2 & e^2 \\ -e^2 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercices

EXERCICE 91.1

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. On veut calculer $\exp(A)$.

1. Justifier que A est diagonalisable et déterminer une matrice inversible P telle que la matrice $\Delta = P^{-1}AP$ soit diagonale.
2. Calculer $\exp(A)$.

EXERCICE 91.2

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ayant n valeurs propres distinctes. On considère une matrice P, inversible, telle que $P^{-1}AP = \Delta$ soit diagonale et on note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les coefficients diagonaux de Δ.

1. Justifier qu'il existe un polynôme Q tel que pour tout entier i compris entre 1 et n, $Q(\lambda_i) = e^{\lambda_i}$
2. Montrer que $Q(A) = \exp(A)$ puis montrer que $Q(A) = PQ(\Delta)P^{-1}$.
3. Retrouver avec cette méthode la valeur de $\exp(A)$ où A est la matrice de l'exercice 1.

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 91.1

1. Commencer en calculant le polynôme caractéristique χ_A
2. Calculer $\exp(\Delta)$ puis effectuer le changement de base.

EXERCICE 91.2

1. Penser au polynôme d'interpolation de Lagrange.
2. Vérifier que $Q(\Delta) = \exp(\Delta)$.
3. Il suffit d'utiliser ce qui précède car A admet 3 valeurs propres distinctes.

Solutions des exercices

EXERCICE 91.1

1. On calcule le polynôme caractéristique χ_A de la matrice A :

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X-1 & 2 & -2 \\ -3 & X+4 & -2 \\ -1 & 1 & X \end{vmatrix} = X^3 + 3X^2 + 2X = X(X+1)(X+2)$$

La matrice A a trois valeurs propres distinctes : $0, -1$ et -2. Elle est donc diagonalisable.
En procédant comme d'habitude, on calcule les sous-espaces propres qui sont tous de dimension 1.

Le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 est engendré par $e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, le sous-espace propre associé à la valeur propre -1 est engendré par $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et le sous-espace propre associé à la valeur propre -2 est engendré par $e_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On pose alors $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On en déduit que

$$\Delta = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

2 On commence par calculer P^{-1} et on obtient $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. D'après les formules de changement de base,

$$\begin{aligned} \exp(A) &= P\exp(\Delta)P^{-1} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2+2e^{-1}-2e^{-2} & -2+2e^{-2} & 4-4e^{-1} \\ 2+2e^{-1}-4e^{-2} & -2+4e^{-2} & 4-4e^{-1} \\ 1-e^{-2} & -1+e^{-2} & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

EXERCICE 91.1

1 Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de A. D'après la théorie des polynômes d'interpolation de Lagrange, il existe un unique polynôme Q de degré au plus $n-1$ tel que, pour tout i compris entre 1 et n, $Q(\lambda_i) = e^{\lambda_i}$.

2 Si on note $Q = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ on a

$$Q(A) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k A^k = \sum_{k=0}^{n-1} a_k (P\Delta P^{-1})^k = P\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k \Delta^k\right) P^{-1} = PQ(\Delta)P^{-1}$$

Maintenant, comme Δ est diagonale,

$$Q(\Delta) = \begin{pmatrix} Q(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & Q(\lambda_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} = \exp(\Delta)$$

Finalement,

$$Q(A) = P\exp(\Delta)P^{-1} = \exp(A)$$

3 Dans le cas de la matrice A, on a vu que le spectre de A était $0, -1$ et -2. On considère Q le polynôme de degré au plus 2 tel que $Q(0) = 1, Q(-1) = e^{-1}$ et $Q(-2) = e^{-2}$. On a donc

$$Q = \frac{(X+1)(X+2)}{2} + e^{-1}\frac{X(X+2)}{-1} + e^{-2}\frac{X(X+1)}{2}$$

On obtient finalement

$$Q = \frac{1}{2}\left((1 - 2e^{-1} + e^{-2})X^2 + (3 - 4e^{-1} + e^{-2})X + 2\right)$$

Il suffit alors de calculer $A^2 = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 \\ -7 & 8 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ pour obtenir

$$\begin{aligned} \exp(A) &= \frac{1}{2}\left((1 - 2e^{-1} + e^{-2})A^2 + (3 - 4e^{-1} + e^{-2})A + 2I_3\right) \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 + 2e^{-1} - 2e^{-2} & -2 + 2e^{-2} & 4 - 4e^{-1} \\ 2 + 2e^{-1} - 4e^{-2} & -2 + 4e^{-2} & 4 - 4e^{-1} \\ 1 - e^{-2} & -1 + e^{-2} & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

92 Utiliser la variation des constantes pour un système différentiel linéaire

Dans cette fiche, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Quand on ne sait pas !

- Un système différentiel linéaire d'ordre 1 de la forme

$$X' = AX + B \qquad \text{(E)}$$

où $A : t \mapsto A(t)$ est une application continue définie sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : t \mapsto B(t)$ est une application continue définie sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

- L'ensemble S_H des solutions du système linéaire homogène associé

$$X' = AX \qquad \text{(H)}$$

est un espace vectoriel de dimension n.

- Si X_0 est une solution de (E) alors l'ensemble S_E des solutions de (E) est le sous-espace affine passant par X_0 de direction S_H c'est-à-dire :

$$S_E = \{X_0 + T \ , \ T \in S_H\}$$

Que faire ?

On considère un système différentiel linéaire d'ordre 1 de la forme

$$X' = AX + B \qquad \text{(E)}$$

où $A : t \mapsto A(t)$ est une application continue définie sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : t \mapsto B(t)$ est une application continue définie sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

On suppose connaitre une base $(Y_1, \dots Y_n)$ de l'espace des solutions de l'équation homogène associée $X' = AX$ où, pour tout i de $[\![1, n]\!]$, Y_i appartient à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

On cherche à trouver une solution X_0 de (E). On va la chercher sous la forme

$$X_0 : t \mapsto \lambda_1(t)Y_1(t) + \cdots + \lambda_n(t)Y_n(t)$$

Sous forme matricielle on pose donc $X_0 = QZ$ où

$$Z : t \mapsto \begin{pmatrix} \lambda_1(t) \\ \vdots \\ \lambda_n(t) \end{pmatrix} \text{ et } Q : t \mapsto \begin{pmatrix} Y_1(t) \mid \cdots \mid Y_n(t) \end{pmatrix}$$

De ce fait $X_0' = Q'Z + QZ' = AQZ + QZ'$ puisque pour tout i compris entre 1 et n, $Y_i' = AY_i$ par définition. On en déduit que

$$\begin{aligned} X_0 \text{ vérifie (E)} &\iff X_0' = AX_0 + B \\ &\iff AQZ + QZ' = AQZ + B \\ &\iff QZ' = B \end{aligned}$$

Il ne reste qu'à déterminer Z' en inversant Q puis à intégrer pour déterminer Z.

Conseils

La méthode est la même que dans le cas de l'équation scalaire d'ordre 1 vu en première année. Il faut cependant se méfier des tailles des matrices. En effet, avec les notations ci-dessus, pour tout $t \in I$, $Q(t)$ est une matrice carrée de taille n et $Z(t)$ est une matrice colonne de taille n. De ce fait, on pose $X_0 = QZ$ et pas $X_0 = ZQ$.

Exemple traité

On veut résoudre sur $\mathbb{R}$ le système différentiel suivant

$$(S) \begin{cases} x_1'(t) &= x_1(t) + 8x_2(t) + 1 \\ x_2'(t) &= 2x_1(t) + x_2(t) + e^{5t} \end{cases}$$

On cherche les solutions à valeurs réelles.
On pose $X : t \mapsto \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B : t \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ e^{5t} \end{pmatrix}$.

1 Vérifier que $Y_1 : t \mapsto \begin{pmatrix} 2e^{5t} \\ e^{5t} \end{pmatrix}$ et $Y_2 : t \mapsto \begin{pmatrix} 2e^{-3t} \\ -e^{-3t} \end{pmatrix}$ vérifient l'équation homogène $X' = AX$.

2 Déterminer une solution de (S) en utilisant la méthode de la variation de la constante et en déduire les solutions de (S).

SOLUTION

1 On voit que $Y_1' : t \mapsto \begin{pmatrix} 10e^{5t} \\ 5e^{5t} \end{pmatrix}$ et donc $Y_1' = AY_1$ car

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$$

De même, on vérifie que Y_2 vérifie l'équation $X' = AX$.

2 On réalise la variation de la constante pour déterminer une solution de (S). Pour cela on pose $X_0 = QZ$ où

$$Q : t \mapsto \left(\begin{array}{c|c} Y_1(t) & Y_2(t) \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 2e^{5t} & 2e^{-3t} \\ e^{5t} & -e^{-3t} \end{pmatrix} \text{ et } Z : t \mapsto \begin{pmatrix} \lambda(t) \\ \mu(t) \end{pmatrix}$$

Comme ci-dessus, X_0 vérifie $X' = AX + B$ si et seulement si $QZ' = B$.

Soit $t \in \mathbb{R}$, on calcule $Q^{-1}(t) = -\dfrac{1}{4e^{2t}} \begin{pmatrix} -e^{-3t} & -2e^{-3t} \\ -e^{5t} & 2e^{5t} \end{pmatrix} = \dfrac{1}{4} \begin{pmatrix} e^{-5t} & 2e^{-5t} \\ e^{3t} & -2e^{3t} \end{pmatrix}$.

On est ramené à

$$Z' = Q^{-1}B \iff \begin{cases} \lambda'(t) &= \frac{1}{4}e^{-5t} + \frac{1}{2} \\ \mu'(t) &= \frac{1}{4}e^{3t} - \frac{1}{2}e^{8t} \end{cases}$$

En intégrant, on voit que l'on peut prendre pour Z (on ne cherche qu'une solution) :

$$Z : t \mapsto \frac{1}{240} \begin{pmatrix} -12e^{-5t} + 120t \\ 20e^{3t} - 15e^{8t} \end{pmatrix}$$

On a finalement trouvé une solution de (S)

$$X_0 : t \mapsto Q(t)Z(t) = \frac{1}{240} \begin{pmatrix} 16 + 240te^{5t} - 30e^{5t} \\ -32 + 120te^{5t} + 15e^{5t} \end{pmatrix}$$

Les solutions de (S) sont de la forme $X : t \mapsto X_0(t) + \alpha_1 Y_1(t) + \alpha_2 Y_2(t)$.

Exercices

EXERCICE 92.1

On veut résoudre sur $\mathbb{R}$ le système différentiel suivant

$$(S) \begin{cases} x_1'(t) &= x_1(t) + x_2(t) + t \\ x_2'(t) &= x_2(t) + 1 \end{cases}$$

On cherche les solutions à valeurs réelles.

On pose $X : t \mapsto \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B : t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$.

1 Soit $t \in \mathbb{R}$, calculer $\exp(tA)$ et en déduire Y_1 et Y_2 une base des solutions du système homogène associé $X' = AX$.

2 Déterminer une solution de (S) en utilisant la méthode de la variation de la constante et en déduire les solutions de (S).

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 92.1

1 On peut commencer en écrivant $A = I_2 + N$ où N est nilpotente.

2 Mettre en place la variation de la constante comme expliquée précédemment.

Solutions des exercices

EXERCICE 92.1

1 On pose $N = A - I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui est nilpotente puisque $N^2 = 0$. On a donc $\exp(tN) = I + tN$ et comme I_2 et N commutent, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\exp(tA) = \exp(tI_2)\exp(tN) = e^t(I_2 + tN) = \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$$

De ce fait, on peut poser

$$Y_1 : t \mapsto \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } Y_2 : t \mapsto \begin{pmatrix} te^t \\ e^t \end{pmatrix}$$

2 On pose $Q : t \mapsto \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$ et $Z : t \mapsto \begin{pmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \end{pmatrix}$. On cherche une solution de (S) sous la forme $X_0 : t \mapsto Q(t)Z(t)$. D'après la méthode de la variation de la constante, X_0 vérifie (S) si et seulement si $QZ' = B$. Soit $t \in \mathbb{R}$, on inverse alors la matrice $Q(t)$

$$Q^{-1}(t) = e^{-2t}\begin{pmatrix} e^t & -te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & -te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

On est ramené à résoudre

$$Z' = Q^{-1}B \iff \begin{cases} \lambda_1'(t) &= 0 \\ \lambda_2'(t) &= e^{-t} \end{cases}$$

En intégrant, on peut prendre $\lambda_1 : t \mapsto 0$ et $\lambda_2 : t \mapsto -e^{-t}$. Finalement,

$$X_0 : t \mapsto Q(t)Z(t) = \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ -1 \end{pmatrix}$$

On s'assure aisément que X_0 vérifie effectivement le système (S). Finalement les solutions de S sont de la forme :

$$X : t \mapsto \begin{pmatrix} -t + (\alpha_1 + \alpha_2 t)e^t \\ -1 + \alpha_2 e^t \end{pmatrix}$$

où α_1 et α_2 parcourent $\mathbb{R}$.

93 Recoller des solutions d'une équation différentielle

Quand on ne sait pas !

Une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 1 ou 2 est une équation de la forme

$$y'(x) + a_0(x)y(x) = b(x) \text{ ou } y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = b(x) \qquad (93.1)$$

où a_0, a_1 et b sont des fonctions continues sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Que faire ?

On considère une équation différentielle linéaire d'ordre 1 ou 2 à coefficients continus, définie sur un intervalle I

$$\alpha(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = b(x) \qquad (E_1)$$

ou

$$\alpha(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = b(x) \qquad (E_2)$$

- Si la fonction α ne s'annule pas sur I, l'équation considérée est équivalente à l'équation obtenue en divisant par α. On connait les méthodes permettant de la résoudre.
- Si la fonction α s'annule sur I, la méthode est la suivante :
  - — On découpe l'intervalle I en des sous-intervalles $I_0, I_1, \ldots$.
  - — On résout l'équation différentielle obtenue sur chaque intervalle en divisant par α.
  - — On essaye de recoller les différentes solutions obtenues précédemment, souvent en procédant par analyse-synthèse.
- On peut aussi utiliser ce genre de méthode quand une des fonctions n'est définie simplement que sur des sous-intervalles de l'intervalle I (voir par exemple l'exercice 2).

Conseils

- Quand on veut résoudre une équation différentielle linéaire, il faut commencer par se demander si elle est sous forme résolue (ou si elle peut s'y mettre) car les méthodes générales vues dans le cours de première et deuxième année s'appliquent uniquement dans ce cas.
- Ne pas être surpris si la dimension de l'espace des solutions (en tant qu'espace vectoriel ou espace affine) d'une équation qui n'est pas sous forme résolue, n'est pas égale à l'ordre de l'équation. En effet dans ce cas, le théorème de Cauchy linéaire ne s'applique pas.

Exemple traité

1 Déterminer les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation

$$xy'(x) - 2y(x) = 0 \qquad \text{(E)}$$

2 Déterminer les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation

$$xy'(x) - y(x) = 0 \qquad \text{(E)}$$

SOLUTION

1 Travaillons sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$. En divisant par x (qui n'est pas nul) on se ramène à étudier l'équation

$$y'(x) - \frac{2}{x}y(x) = 0 \qquad (\text{E}_+)$$

L'équation (E_+) est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène. La fonction $x \mapsto -2\ln x$ est une primitive de $x \mapsto -\frac{2}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On en déduit que les solutions de (E_+) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$x \mapsto \lambda \exp(2\ln x) = \lambda x^2$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$.

On procède de même sur l'intervalle $\mathbb{R}_-^*$. On se ramène à l'équation

$$y'(x) - \frac{2}{x}y(x) = 0 \qquad (\text{E}_-)$$

On en déduit que les solutions de (E_-) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}_-^*$ par

$$x \mapsto \mu \exp(2\ln(-x)) = \mu(-x)^2 = \mu x^2$$

où $\mu \in \mathbb{R}$.

Résolvons alors l'équation (E) sur $\mathbb{R}$. Soit $x \mapsto y(x)$ une solution de (E) . Sa restriction à $\mathbb{R}_+^*$ vérifie (E_+) et sa restriction à $\mathbb{R}_-^*$ vérifie (E_-). De ce fait y est de la forme

$$y \mapsto \begin{cases} \lambda x^2 & \text{si } x > 0 \\ \mu x^2 & \text{si } x < 0 \\ y(x) = 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

où y s'annule nécessairement en 0 car y doit être continue.

Réciproquement, montrons que toutes ces fonctions sont des solutions de (E).

Soit y une telle fonction.

- Elle est continue sur $\mathbb{R}^*$ de manière évidente et elle est continue en 0 car on vérifie aisément que $\lim\limits_{x \to 0^-} y(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} y(x) = 0 = y(0)$.
- Elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ de manière évidente et pour $x \neq 0$,

$$y'(x) = \begin{cases} 2\lambda x & \text{si } x > 0 \\ 2\mu x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

  De ce fait, $y'(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0. On en déduit par le théorème de dérivabilité d'un prolongement que y est dérivable en 0, que $y'(0) = 0$ et donc que y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a bien $xy'(x) - 2y(x) = 0$.

Finalement, les solutions de (E) sont les fonctions de la forme

$$y \mapsto \begin{cases} \lambda x^2 & \text{si } x > 0 \\ \mu x^2 & \text{si } x < 0 \\ y(x) = 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

2 Travaillons sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$. En divisant par x (qui n'est pas nul) on se ramène à étudier l'équation

$$y'(x) - \frac{1}{x} y(x) = 0 \qquad (E_+)$$

L'équation (E_+) est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène résolue. La fonction $x \mapsto -\ln x$ est une primitive de $x \mapsto -\frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On en déduit que les solutions de (E_+) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$x \mapsto \lambda \exp(\ln x) = \lambda x$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$.

On procède de même sur l'intervalle $\mathbb{R}_-^*$. On se ramène à l'équation

$$y'(x) - \frac{1}{x} y(x) = 0 \qquad (E_-)$$

On en déduit que les solutions de (E_-) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}_-^*$ par

$$x \mapsto \mu \exp(\ln(-x)) = \mu(-x) = -\mu x$$

où $\mu \in \mathbb{R}$.

Résolvons alors l'équation (E) sur $\mathbb{R}$. Soit $x \mapsto y(x)$ une solution de (E). Sa restriction à $\mathbb{R}_+^*$ vérifie (E_+) et sa restriction à $\mathbb{R}_-^*$ vérifie (E_-). De ce fait y est de la forme

$$y \mapsto \begin{cases} \lambda x & \text{si } x > 0 \\ -\mu x & \text{si } x < 0 \\ y(x) = 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

où y s'annule nécessairement en 0 car y est continue. De plus, y doit être dérivable en 0 or

$$\frac{y(x) - y(0)}{x - 0} = \frac{y(x)}{x} \underset{x \to 0^-}{\longrightarrow} -\mu \text{ et } \frac{y(x) - y(0)}{x - 0} = \frac{y(x)}{x} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} \lambda$$

Donc nécessairement $-\mu = \lambda$ et de ce fait, y est de la forme $x \mapsto \gamma x$ en posant $\gamma = \lambda = -\mu$.

Réciproquement, il est clair que toutes les fonctions de la forme $x \mapsto \gamma x$ sont des solutions de (E).

Exercices

EXERCICE 93.1

Déterminer les solutions définies sur $]0, +\infty[$ de l'équation

$$x \ln(x) y'(x) + y(x) = 0 \qquad \text{(E)}$$

EXERCICE 93.2

On considère l'équation différentielle

$$y''(x) + y(x) = |x| \qquad \text{(E)}$$

définie sur $\mathbb{R}$.

1. Quelle est la dimension de l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène associée ?
2. Déterminer ces solutions.

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 93.1 Justifier que si $x \in]0, +\infty[$, $x\ln(x) = 0$ si et seulement si $x = 1$.

EXERCICE 93.2

1 Appliquer le théorème de Cauchy linéaire.

2 Résoudre l'équation sur $\mathbb{R}_+^*$, sur $\mathbb{R}_-^*$ puis recoller les solutions afin de déterminer les solutions définies sur $\mathbb{R}$ en entier.

Solutions des exercices

EXERCICE 93.1

Soit $x \in]0, +\infty[$, $x\ln(x) = 0 \iff \ln(x) = 0 \iff x = 1$. On découpe l'intervalle $]0, +\infty[$ en $I_0 =]0, 1[$ et $I_1 =]1, +\infty[$.
Sur chaque intervalle on résout l'équation obtenue en divisant par $x\ln(x)$ qui ne s'annule pas :

$$y'(x) + \frac{1}{x\ln x} y(x) = 0 \qquad \text{(F)}$$

Sur I_0 et I_1, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x\ln(x)}$ est continue et $x \mapsto \ln(|\ln x|)$ en est une primitive. De ce fait, les solutions de (F) sur ces intervalles sont de la forme :

$$x \mapsto \lambda \exp(-\ln(|\ln x|)) = \frac{\lambda}{|\ln x|}$$

Comme $\ln x$ est de signe constant sur l'intervalle I_0 et aussi sur l'intervalle I_1, ces fonctions sont les fonctions de la forme $x \mapsto \dfrac{\lambda}{\ln x}$ (quitte à remplacer λ par $-\lambda$)
Soit y une solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$. Sa restriction à I_0 est donc de la forme $x \mapsto \frac{\lambda_0}{\ln x}$. Or y est continue en 1 donc nécessairement $\lambda_0 = 0$ et la restriction de y à I_0 est la fonction nulle. De même, on trouve que la restriction de y à I_1 est aussi la fonction nulle.
Finalement la seule solution de l'équation (E) définie sur $\mathbb{R}_+^*$ est la fonction nulle.

EXERCICE 93.2

1 L'équation homogène associée à (E) est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène dont les coefficients sont continus. On peut appliquer le théorème de Cauchy linéaire. On sait que l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 2.

2 On peut considérer l'équation homogène associée :

$$y''(x) + y(x) = 0 \qquad \text{(H)}$$

On sait que l'ensemble des solutions de cette équation est

$$S_H = \{x \mapsto \lambda\cos(x) + \mu\sin(x)\ ,\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

Résolvons maintenant (E) sur l'intervalle $\mathbb{R}_-^* =]-\infty; 0[$. Il est clair que la fonction $x \mapsto -x$ est solution de (E) sur cet intervalle. On en déduit que les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_-^*$ sont de la forme

$$y : x \mapsto -x + \lambda\cos(x) + \mu\sin(x)$$

De même, $x \mapsto x$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$ et donc les solutions de (E) sur cet intervalle sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto x + \lambda\cos(x) + \mu\sin(x)$$

Soit y une solution de (E) définie sur $\mathbb{R}$, il existe donc des constantes $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ telles que la restriction de y à $\mathbb{R}_-^*$ (resp. à $\mathbb{R}_+^*$) soit $x \mapsto -x + \lambda_1\cos(x) + \mu_1\sin(x)$ (resp. $x \mapsto x + \lambda_2\cos(x) + \mu_2\sin(x)$).
La fonction y étant continue en 0, nécessairement

$$\lambda_1 = \lim_{x\to 0^-} y(x) = \lim_{x\to 0^+} y(x) = \lambda_2$$

De même la fonction y étant de classe $\mathcal{C}^1$, nécessairement

$$-1 + \mu_1 = \lim_{x\to 0^-} y'(x) = \lim_{x\to 0^+} y'(x) = 1 + \mu_2$$

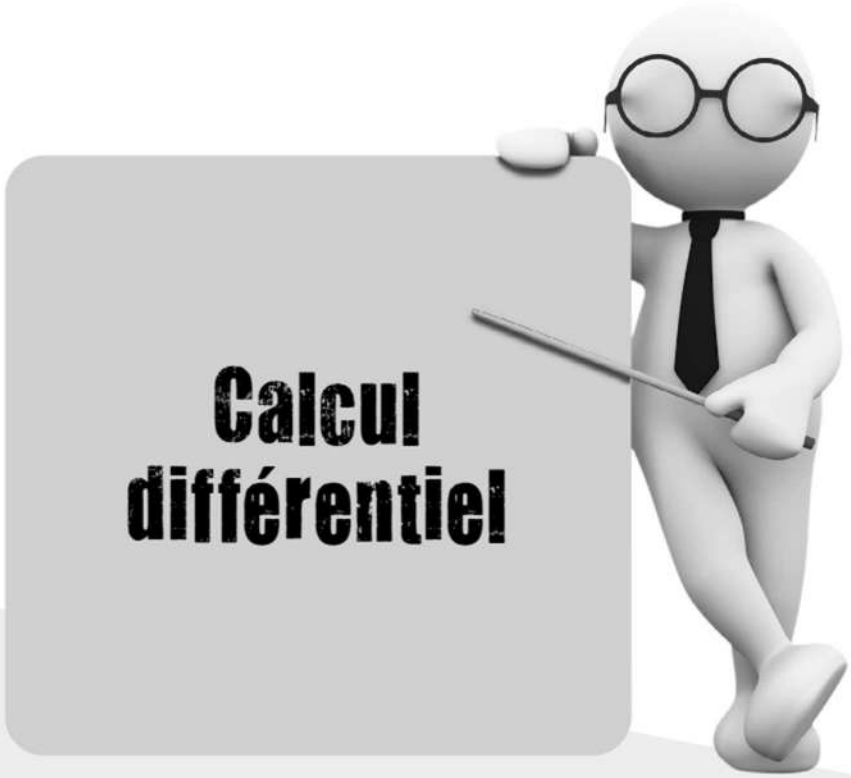
Réciproquement, pour λ, μ fixés dans $\mathbb{R}$, on considère y la fonction définie par

$$y : x \mapsto \begin{cases} -x + \lambda\cos(x) + \mu\sin(x) & \text{si } x < 0 \\ x + \lambda\cos(x) + (\mu - 2)\sin(x) & \text{si } x > 0 \\ \lambda & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

En utilisant le théorème de dérivabilité des prolongements, on montre alors aisément que :

- La fonction y est continue car $\lim_{x\to 0^-} y(x) = \lim_{x\to 0^+} y(x) = \lambda$.
- La fonction y est de classe $\mathcal{C}^1$ car $\lim_{x\to 0^-} y'(x) = \lim_{x\to 0^+} y'(x) = \mu - 1$.
- La fonction y est de classe $\mathcal{C}^2$ car $\lim_{x\to 0^-} y''(x) = \lim_{x\to 0^+} y''(x) = -\lambda$.

Calcul différentiel



Calculer la dérivée en un point selon un vecteur ; calculer des dérivées partielles

Quand on ne sait pas !

Soit U un ouvert d'un espace vectoriel de dimension finie E et F un espace vectoriel de dimension finie. Soit $f : U \to F$, $a \in U$ et $v \in E$ non nul .

- On dit que f est dérivable en a selon le vecteur v si $\varphi_{a,v} : t \mapsto f(a+tv)$ est dérivable en $t = 0$.
- Dans ce cas, on appelle dérivée de f en a **selon le vecteur** v et on note $D_v f(a)$ la valeur de la dérivée :

$$D_v f(a) = \varphi'_{a,v}(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}.$$

- Lorsqu'une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E est fixée, pour i compris entre 1 et n, la dérivée en a selon le vecteur e_i s'appelle dérivée partielle selon le vecteur e_i au point a et se $\partial_i f(a)$ ou $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

Dans le cas où l'espace de départ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, on note le plus souvent la fonction f sous la forme

$$f : (x, y) \mapsto f(x, y) \text{ ou } f : (x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$$

Dans ce cas, les dérivées partielles (par rapport aux vecteurs de la base canonique) se notent $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ et éventuellement $\dfrac{\partial f}{\partial z}$.

Que faire ?

Dans la majorité des situations, pour justifier qu'une fonction admet une dérivée partielle par rapport à une variable et pour la calculer il suffit de considérer que dans « la formule » qui permet de définir la fonction f, toutes les autres variables sont des constantes. On dérive alors par rapport à la variable considérée en utilisant les formules usuelles.
Sinon, pour montrer qu'une fonction f admet des dérivées selon un vecteur v (ou des dérivées partielles) au point a, on explicite la fonction $\varphi_{a,v} : t \mapsto f(a+tv)$ afin de vérifier si cette fonction (de la variable réelle) est dérivable en 0. Il peut être nécessaire de revenir à la définition de la dérivée par l'étude du taux d'accroissement.

Notons que $\varphi_{a,v}$ est définie sur un voisinage ouvert de $t = 0$ car U est un ouvert de E.

Conseils

Il faut distinguer les éventuels points où l'étude de l'existence des dérivées pose un problème (ainsi que le calcul) des autres points où il suffit d'utiliser les formules usuelles de dérivation.

Exemple traité

On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par

$$f : (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1 Soit $a \neq (0,0)$, justifier que $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a)$ existent et les calculer.

2 Justifier que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existent et les calculer.

3 La fonction f admet-elle une dérivée selon le vecteur $v = (1,1)$ en $a = (0,0)$?

SOLUTION

1 Soit $a = (x_0, y_0) \neq (0,0)$. On veut justifier l'existence et déterminer $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$. On considère $\varphi : x \mapsto f(x, y_0)$. Sur un voisinage V de x_0, on a $\varphi : x \mapsto \frac{xy_0}{x^2+y_0^2}$ puisque $(x, y_0) \neq (0,0)$. Cette fonction est dérivable en x_0 donc $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$ existe et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \varphi'(x_0) = \frac{y_0(x_0^2+y_0^2) - 2x_0^2 y_0}{(x_0^2+y_0^2)^2} = \frac{y_0^3 - x_0^2 y_0}{(x_0^2+y_0^2)^2}$$

On procède de même pour étudier $\frac{\partial f}{\partial y}(a)$ en considérant $\psi : y \mapsto f(x_0, y)$ au voisinage de y_0. On obtient que $\frac{\partial f}{\partial y}(a)$ existe et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a) = \psi'(y_0) = \frac{x_0^3 - x_0 y_0^2}{(x_0^2+y_0^2)^2}$$

2 On pose maintenant $a = (0,0)$. On étudie d'abord l'existence de $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$. Au voisinage de $x = 0$ on étudie $\varphi : x \mapsto f(x,0) = 0$. Là encore, cette fonction est dérivable. On en déduit que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \varphi'(0) = 0$$

De même, on montrer que $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existe et vaut 0.

3 On pose maintenant $v = (1,1)$. On considère la fonction

$$\varphi : t \mapsto f(a+tv) = f(t,t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2t^2} = \frac{1}{2} & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

La fonction φ n'est pas dérivable en 0 (car elle n'est pas continue en 0) donc f n'admet pas de dérivée selon le vecteur $v = (1,1)$ en $a = (0,0)$.

Exercices

EXERCICE 94.1

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{y^2}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ y & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Soit $a = (x_0, y_0)$ avec $x_0 \neq 0$. Justifier l'existence de $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$ et de $\frac{\partial f}{\partial y}(a)$ puis les calculer.
2. Soit $a = (0, y_0)$. Justifier l'existence de $\frac{\partial f}{\partial y}(a)$ et la calculer.
3. Soit $y_0 \neq 0$ et $a = (0, y_0)$. Justifier que $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$ n'est pas définie.
4. Soit $a = (0, 0)$ et $v = (\alpha, \beta)$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$. Justifier que $D_v f(a)$ existe et la calculer.

EXERCICE 94.2

On considère $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de la base canonique $(E_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$. Soit f la fonction définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par

$$f : M \mapsto \mathrm{Tr}(M^2)$$

Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ et toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, calculer $\dfrac{\partial f}{\partial E_{ij}}(M)$. On justifiera au préalable l'existence de la dérivée partielle.

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 94.1

1. Utiliser les formules classiques de dérivation.
2. Considérer la fonction $\varphi : t \mapsto f(0, t)$ et étudier sa dérivabilité en y_0.
3. Considérer la fonction $\varphi : t \mapsto f(t, y_0)$ et étudier sa dérivabilité en 0.
4. On pourra séparer le cas où $\alpha = 0$ du cas où $\alpha \neq 0$.

EXERCICE 94.2 On calculera le taux d'accroissement $\frac{f(M+tE_{ij})-f(M)}{t}$.

EXERCICE 94.1

1 On considère l'application $\varphi : x \mapsto f(x, y_0)$ sur un voisinage de x_0 qui ne contient par 0. On en déduit que $\varphi(x) = \frac{y_0^2}{x}$. Cette fonction est dérivable et $\varphi'(x) = -\frac{y_0^2}{x^2}$. On en déduit que $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$ existe et $\frac{\partial f}{\partial x}(a) = -\frac{y_0^2}{x_0^2}$.

De même on considère maintenant $\varphi : y \mapsto f(x_0, y)$. Comme $x_0 \neq 0$, $\varphi(y) = \frac{y^2}{x_0}$. Cette fonction est dérivable et $\varphi'(y) = 2\frac{y}{x_0}$.

On en déduit que $\frac{\partial f}{\partial y}(a)$ existe et $\frac{\partial f}{\partial y}(a) = 2\frac{y_0}{x_0}$.

2 Soit $a = (0, y_0)$. On considère $\varphi : t \mapsto f(0, t) = t$. Elle est dérivable en y_0 et $\varphi'(y_0) = 1$. On en déduit que $\frac{\partial f}{\partial y}(a)$ existe et $\frac{\partial f}{\partial y}(a) = 1$.

3 Soit $y_0 \neq 0$ et $a = (0, y_0)$. On considère $\varphi : t \mapsto f(t, y_0)$. Par définition,

$$\varphi : t \mapsto \begin{cases} \frac{y_0^2}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ y_0^2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette fonction n'est pas continue en 0 car $\lim\limits_{t \to 0^+} \varphi(t) = +\infty$. Elle n'est donc pas dérivable d'où $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$ n'est pas définie.

4 On pose $a = (0, 0)$ et $v = (\alpha, \beta)$.

- Dans le cas où $\alpha \neq 0$. Pour $t \neq 0$, $a + tv = (t\alpha, t\beta)$ et donc

$$\frac{f(a + tv) - f(a)}{t} = \frac{\frac{(t\beta)^2}{t\alpha} - 0}{t} = \frac{\beta^2}{\alpha}$$

On en déduit, en faisant tendre t vers 0 que $D_v f(a)$ est bien définie et que

$$D_v f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} = \frac{\beta^2}{\alpha}$$

- Dans le cas où $\alpha = 0$, pour $t \neq 0$, $a + tv = (0, t\beta)$ et donc

$$\frac{f(a + tv) - f(a)}{t} = \frac{t\beta - 0}{t} = \beta$$

On en déduit, en faisant tendre t vers 0 que $D_v f(a)$ est bien définie et que

$$D_v f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} = \beta$$

EXERCICE 94.2

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour $t \neq 0$,

$$f(M+tE_{ij})-f(M) = \mathrm{Tr}((M+tE_{ij})^2)-\mathrm{Tr}(M^2) = t\mathrm{Tr}(ME_{ij})+t\mathrm{Tr}(E_{ij}M)+t^2\mathrm{Tr}(E_{ij}^2)$$

On en déduit que

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(M+tE_{ij})-f(M)}{t} = \mathrm{Tr}(ME_{ij}) + \mathrm{Tr}(E_{ij}M) = 2\mathrm{Tr}(ME_{ij})$$

Si on note $M = (m_{kl})$ et $E_{ij} = (u_{kl})$ ainsi que $ME_{ij} = (v_{kl})$.
Pour $k \in [\![1,n]\!]$,

$$\begin{aligned} v_{kk} &= \sum_{l=1}^{n} m_{kl}u_{lk} \\ &= m_{ki}\delta_{kj} \text{ car } u_{lk} = \delta_{il}\delta_{jk} \end{aligned}$$

En effet, pour calculer le terme v_{kk} on fait le produit de la k-ième ligne de M et de la k-ième colonne de E_{ij}. Si $k \neq j$, cette dernière est nulle et donc $v_{kk} = 0$. Si $k = j$, on obtient bien $v_{jj} = m_{ji}$.
On en déduit que

$$\mathrm{Tr}(ME_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} v_{kk} = v_{jj} = m_{ji}$$

Finalement,

$$\frac{\partial f}{\partial E_{ij}}(M) = 2m_{ji}$$

95 Montrer qu'une fonction est différentiable et calculer une différentielle

Quand on ne sait pas !

Soit U un ouvert d'un espace vectoriel de dimension finie E, F un espace vectoriel de dimension finie et f une fonction de U dans F.

- Soit $a \in U$. La fonction f est dite différentiable en a, s'il existe une application **linéaire** φ_a telle que pour tout vecteur h de E tel que $a + h \in U$,

$$f(a+h) = f(a) + \varphi_a(h) + o(h)$$

où on note $o(h)$ une fonction de la forme $h \mapsto ||h||\varepsilon(h)$, où ε est une fonction qui tend vers 0 quand h tend vers 0.

- Si la fonction est différentiable en tout point a de U, on dit que f est différentiable et on note df la fonction définie de U dans $\mathcal{L}(E,F)$ qui associe à a la fonction φ_a.

$$\begin{array}{rccc} df : & U & \to & \mathcal{L}(E,F) \\ & a & \mapsto & \varphi_a \end{array}$$

Que faire ?

Quand on veut étudier si une fonction f est différentiable en a (et éventuellement calculer cette différentielle), on exprime $f(a+h)$ et on essaye de reconnaitre :

- Une partie constante par rapport à h qui vaut $f(a)$.
- Une partie linéaire par rapport à h : $h \mapsto \varphi_a(h)$
- Le reste qui vaut donc $f(a+h) - f(a) - \varphi_a(h)$

Il faut alors montrer que ce reste est négligeable devant h quand h tend vers 0, c'est-à-dire que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - \varphi_a(h)}{||h||} = 0$$

EXEMPLE 1 On considère $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f : (x_1, x_2, x_3) \to x_1 x_2 x_3$$

Soit $a = (x_1, x_2, x_3)$ et $h = (h_1, h_2, h_3)$,

$$\begin{aligned} f(a+h) &= (x_1+h_1)\times(x_2+h_2)\times(x_3+h_3) \\ &= x_1x_2x_3 + h_1x_2x_3 + x_1h_2x_3 + x_1x_2h_3 \\ &\quad + x_1h_2h_3 + h_1x_2h_3 + h_1h_2x_3 + h_1h_2h_3 \end{aligned}$$

On pose alors $\varphi_a : (h_1, h_2, h_3) \mapsto h_1x_2x_3 + h_2x_1x_3 + h_3x_1x_2$ qui est linéaire et

$$\theta_a : (h_1, h_2, h_3) \mapsto x_1h_2h_3 + h_1x_2h_3 + h_1h_2x_3 + h_1h_2h_3$$

En utilisant, par exemple, la norme infinie sur $\mathbb{R}^3$, on a $|h_1| \leq ||h||, |h_2| \leq ||h||$ et enfin $|h_3| \leq ||h||$, de ce fait,

$$\frac{|\theta_a(h)|}{||h||} \leq (|x_1| + |x_2| + |x_3|)||h|| + ||h||^2$$

donc $\lim\limits_{||h||\to 0} \frac{|\theta_a(h)|}{||h||} = 0$ par encadrement, ainsi $\theta_a(h) \underset{0}{=} o(h)$. On a donc bien montré que $f(a+h) = f(a)+\varphi_a(h)+o(h)$ où $h \mapsto \varphi_a(h)$ est linéaire. L'application f est différentiable en a et

$$df(a) : (h_1, h_2, h_3) \mapsto h_1x_2x_3 + h_2x_1x_3 + h_3x_1x_2$$

Conseils

- Quand on cherche à déterminer si une fonction f est différentiable en a, on travaille avec a fixé. Il faut donc calculer $f(a+h)$ et considérer cette expression comme une fonction de la variable h.
- Dans le cas d'une fonction différentiable sur U, il ne faut pas confondre df qui est l'application différentielle qui va de U dans $\mathcal{L}(E, F)$ qui n'est pas nécessairement linéaire (comme vu à l'exemple ci-dessus) avec, à a fixé, l'application $df(a)$ qui est une application linéaire de E dans F.

Exemple traité

On considère la fonction f définie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ par

$$f : M \mapsto \mathrm{tr}(M^2)$$

Montrer que f est différentiable et déterminer df.

SOLUTION

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$f(M+H) = \mathrm{tr}((M+H)^2) = \mathrm{tr}(M^2 + MH + HM + H^2) = f(M) + 2\mathrm{tr}(MH) + \mathrm{tr}(H^2)$$

On pose $\varphi_M : H \mapsto 2\text{tr}(MH)$ qui est bien une application linéaire par bilinéarité du produit matriciel et linéarité de la trace. On a alors $f(M+H) = f(M) + \varphi_M(H) + \text{tr}(H^2)$.
Il reste à montrer que $\text{tr}(H^2) = o(H)$. Travaillons par exemple avec la norme infinie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On sait que pour toute matrice A, $\text{tr}(A) \leq n||A||_\infty$. De plus si A et B sont deux matrices, on a $||AB||_\infty \leq n||A||_\infty||B||_\infty$. On en déduit que $||H^2|| \leq n||H||^2$ et ainsi, pour $H \neq 0$,

$$\frac{\text{tr}(H^2)}{||H||_\infty} \leq \frac{n||H^2||_\infty}{||H||_\infty} \leq n^2||H||_\infty$$

Cela montre bien que $\lim\limits_{||H||\to 0} \dfrac{\text{tr}(H^2)}{||H||_\infty} = 0$ ce qui prouve que $\text{tr}(H^2) = o(H)$.
Finalement f est différentiable en M et $df(M) : H \mapsto 2\text{tr}(MH)$. On a donc

$$df : M \mapsto (H \mapsto 2\text{tr}(MH))$$

Exercices

EXERCICE 95.1

Soit E un espace euclidien ; on note $(.|.)$ le produit scalaire et $||.||$ la norme euclidienne associée. Soit u un endomorphisme symétrique de E et $x_0 \in E$. On considère f définie de E dans $\mathbb{R}$ par

$$f : x \mapsto \frac{1}{2}(u(x)|x) + (x_0|x)$$

1 Montrer que f est différentiable et calculer sa différentielle.

2 En déduire la valeur du gradient de f en tout point de E.

EXERCICE 95.2

Soit f la fonction définie sur $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ et à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par

$$f : A \mapsto A^{-1}$$

On considère $||.||_\infty$ la norme infinie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1 Montrer que $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2 a. Montrer que si $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $k \in \mathbb{N}^*$, $||H^k||_\infty \leq \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{||H||_\infty}{n}\right)^k$.

b. En déduire que si $||H||_\infty < n$ alors $I_n + H$ est inversible et exprimer $(I_n + H)^{-1}$ à l'aide d'une série.

c. En déduire que f est différentiable en I_n et déterminer df_{I_n}.

3 En déduire que pour toute matrice $M \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, f est différentiable en M. Calculer df_M.

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 95.1

1 Soit $x \in E$ et $h \in E$, calculer $f(x+h)$.

2 Utiliser la définition du gradient.

EXERCICE 95.2

1 On pourra utiliser le déterminant.

2 **a.** Commencer en majorant $||AB||_\infty$ en fonction de $||A||_\infty$ et $||B||_\infty$.

b. Calculer pour $N \geq 0$, $(I_n + H) \times \sum_{k=0}^{N} (-H)^k$.

c. Montrer que $\sum_{k=2}^{+\infty} (-H)^k = o(H)$.

3 Si M est inversible et $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, commencer en factorisant $M + H$ par M.

Solutions des exercices

EXERCICE 95.1

1 Soit $x \in E$ et $h \in E$. Comme u est linéaire :

$$\begin{aligned} f(x+h) &= \frac{1}{2}(u(x+h)|x+h) + (x_0|x+h) \\ &= \frac{1}{2}(u(x)|x) + \frac{1}{2}(u(h)|x) + \frac{1}{2}(u(x)|h) + \frac{1}{2}(u(h)|h) + (x_0|x) + (x_0|h) \\ &= f(x) + \theta_x(h) + \frac{1}{2}(u(h)|h) \end{aligned}$$

où

$$\theta_x : h \mapsto \frac{1}{2}(u(h)|x) + \frac{1}{2}(u(x)|h) + (x_0|h) = (u(x)|h) + (x_0|h)$$

est une application linéaire de E dans E (la deuxième formule pour $\theta_x(h)$ se déduit de la première en utilisant le fait que u est symétrique). On remarque alors que, comme u est une application linéaire et que E est de dimension finie, elle est continue. Il existe donc $K \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $h \in E$, $||u(h)|| \leq K||h||$. On en déduit que

$$\left|\frac{1}{2}(u(h)|h)\right| \leq \frac{1}{2}||u(h)|| \times ||h|| \leq \frac{K}{2}||h||^2$$

On a donc $\lim\limits_{||h||\to 0} \dfrac{\left|\frac{1}{2}(u(h)|h)\right|}{||h||} = 0$ et on en déduit que $\frac{1}{2}(u(h)|h) = o(h)$. Cela montre que f est différentiable en x et que

$$df_x : h \mapsto \theta_x(h) = (u(x)|h) + (x_0|h)$$

2 Soit $x \in E$ et $h \in E$, $df_x(h) = (u(x) + x_0|h)$ donc le gradient de f en x est le vecteur $u(x) + x_0$.

EXERCICE 95.2

1 L'application det : $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est une application polynomiale en les coordonnées, elle est donc continue. Or $\mathbb{R}^*$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ (car le singleton $\{0\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$) donc $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}^*)$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2 **a.** Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $||AB||_\infty \leq n||A||_\infty \times ||B||_\infty$. De ce fait, par une récurrence immédiate, pour tout entier naturel k non nul,

$$||H^k||_\infty \leq n^{k-1}||H||_\infty^k = \frac{1}{n}\left(\frac{||H||_\infty}{n}\right)^k$$

b. On en déduit que si $||H||_\infty < n$ alors la série $\sum_{k\geq 0}(-H)^k$ converge. Maintenant, pour tout entier N, par un télescopage,

$$(I_n + H) \times \sum_{k=0}^{N}(-H)^k = I_n + (-1)^N H^{N+1}$$

En faisant alors tendre N vers $+\infty$ et en notant $S = \sum\limits_{k=0}^{+\infty}(-H)^k$, on obtient que $(I_n + H)S = I_n$.
Cela implique que $I_n + H$ est inversible et

$$(I_n + H)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty}(-H)^k$$

c. On a donc

$$f(I_n + H) = I_n - H + \sum_{k=2}^{+\infty}(-H)^k$$

On remarque alors que

$$\left|\left|\sum_{k=2}^{+\infty}(-H)^k\right|\right|_\infty \leq \sum_{k=2}^{+\infty}||H^k||_\infty \leq \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{+\infty}\left(\frac{||H||_\infty}{n}\right)^k = \frac{||H||_\infty^2}{n^3} \times \frac{1}{1-\frac{||H||_\infty}{n}}$$

Cela implique que $\lim\limits_{||H||_\infty \to 0} \dfrac{\left|\left|\sum_{k=2}^{+\infty}(-H)^k\right|\right|_\infty}{||H||_\infty} = 0.$

Finalement, $\sum\limits_{k=2}^{+\infty}(-H)^k \underset{0}{=} o(H)$ ce qui prouve que f est différentiable en I_n et que $df_{I_n} : H \mapsto -H$.

3 Soit M une matrice inversible et $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$M + H = M \times (I_n + M^{-1}H)$$

Or $||M^{-1}H||_\infty \leq n||M^{-1}||_\infty \times ||H||_\infty$, donc en prenant $||H||_\infty < \frac{1}{||M^{-1}||_\infty}$, on a $||M^{-1}H||_\infty < n$. Dans ce cas, $(I_n + M^{-1}H)$ est inversible. On a alors

$$\begin{aligned} f(M+H) &= (M+H)^{-1} \\ &= (I_n + M^{-1}H)^{-1}M^{-1} \\ &= \left(I_n - M^{-1}H + \sum_{k=2}^{+\infty}(-M^{-1}H)^k\right) \times M^{-1} \\ &= M^{-1} - M^{-1}HM^{-1} + \left(\sum_{k=2}^{+\infty}(-M^{-1}H)^k\right) \times M^{-1} \end{aligned}$$

Un calcul similaire à celui de la question 2.b donne alors

$$\left(\sum_{k=2}^{+\infty}(-M^{-1}H)^k\right) \times M^{-1} \underset{0}{=} o(H)$$

Cela montre que f est différentiable en M et que $df_M : H \mapsto -M^{-1}HM^{-1}$.

96 Calculer les dérivées partielles d'une composée d'applications différentiables. Règle de la chaine

Quand on ne sait pas !

Soit (n, m, p) trois entiers non nuls, U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et V un ouvert de $\mathbb{R}^m$. Soit $f : U \to \mathbb{R}^m$ et $g : V \to \mathbb{R}^p$ avec $f(U) \subset V$. On note $(y_1, \dots, y_n)$ les coordonnées dans $\mathbb{R}^n$ et $(u_1, \dots, u_m)$ celles dans $\mathbb{R}^m$. Soit $a \in U$ et $b = f(a)$. On suppose que f est différentiable en a et g en b. Alors

$$\forall j \in [\![1, n]\!], \frac{\partial(g \circ f)}{\partial y_j}(a) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial u_k}(b) \times \frac{\partial f_k}{\partial y_j}(a)$$

où l'application f est notée

$$f : (y_1, \dots, y_n) \mapsto (f_1(y_1, \dots, y_n), \dots, f_m(y_1, \dots, y_n))$$

Dans le cas particulier où f est une application différentiable d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ dans un espace vectoriel de dimension finie F et $x_1, \dots, x_n$ sont des fonctions dérivables d'un intervalle I dans $\mathbb{R}$ de telle sorte que pour tout $t \in I$,$(x_1(t), \dots, x_n(t)) \in U$, la fonction $g : t \mapsto f(x_1(t), \dots, x_n(t))$ est dérivable et pour tout t dans I,

$$g'(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1(t), \dots, x_n(t)) \times x_k'(t)$$

Que faire ?

Pour calculer les dérivées partielles d'une composée de fonctions à plusieurs variables, il suffit d'appliquer la formule ci-dessus.

EXEMPLE 1 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On pose g la fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$g : t \mapsto f(2t + t^2, \sin t)$$

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel t,

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(2t + t^2, \sin t) \times (2 + 2t) + \frac{\partial f}{\partial y}(2t + t^2, \sin t) \times \cos t$$

Conseils

- Faire attention, que dans la formule précisée ci-dessus pour les dérivées partielles de $g \circ f$, on utilise les dérivées partielles de la fonction g évaluée au point $b = f(a)$. C'est aussi le cas dans la formule de la dérivation d'une composée de fonctions d'une seule variable.
- Pour appliquer la règle de la chaine, il est souvent préférable de changer le nom des variables afin de ne pas mélanger les variables de la première fonction avec celle de la seconde. De fait, si on veut calculer les dérivées partielles de $g \circ f$ où f est à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ et g définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^m$, on appellera de la même manière les variables de g et les composantes de f. On pourra noter par exemple, $g : (u_1, \ldots, u_m) \mapsto g(u_1, \ldots, u_m)$ et $f = (u_1, \ldots, u_m)$.

Exemple traité

On considère $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définies par

$$f : (x, y, z) \mapsto xy + 3(x + z) \text{ et } g : (x, y) \mapsto (x + y^4, y + 3x^2, 2x^2y)$$

On étudie $h = f \circ g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

1 En utilisant la formule de dérivation d'une composée calculer les dérivées partielles $\frac{\partial h}{\partial x}$ et $\frac{\partial h}{\partial y}$.

2 Retrouver les résultats de la question précédente en explicitant $h(x, y)$.

SOLUTION

1 On commence, comme conseillé ci-dessus, en renommant les variables de nos fonctions. On pose donc

$$f : (u, v, w) \mapsto uv + 3(u + w) \text{ et } g : (x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y), w(x, y))$$

où $u : (x, y) \mapsto x + y^4$, $v : (x, y) \mapsto y + 3x^2$ et $w : (x, y) \mapsto 2x^2y$.
En appliquant la formule de la dérivation d'une composée, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial u}(u, v, w)\frac{\partial u}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial f}{\partial v}(u, v, w)\frac{\partial v}{\partial x}(x, y, z) \\
&\quad + \frac{\partial f}{\partial w}(u, v, w)\frac{\partial w}{\partial x}(x, y, z) \\
&= (v + 3) \times 1 + u \times 6x + 3 \times 4xy \\
&= (y + 3x^2 + 3) + (6x^2 + 6xy^4) + 12xy \\
&= 6xy^4 + 9x^2 + 12xy + y + 3
\end{aligned}$$

On remarquera que, pour alléger les notations, on a noté u, v et w au lieu de $u(x, y)$, $v(x, y)$ et $w(x, y)$ mais il faut bien comprendre que les expressions ci-dessus, sont toutes des fonctions des variables x et y.

On fait de même pour calculer $\dfrac{\partial h}{\partial y}$.

Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial u}(u,v,w)\frac{\partial u}{\partial y}(x,y,z)+\frac{\partial f}{\partial v}(u,v,w)\frac{\partial v}{\partial y}(x,y,z)\\ &\quad+\frac{\partial f}{\partial w}(u,v,w)\frac{\partial w}{\partial y}(x,y,z)\\ &= (v+3)\times 4y^3+u\times 1+3\times 2x^2\\ &= (4y^4+12x^2y^3+12y^3)+(x+y^4)+6x^2\\ &= 12x^2y^3+5y^4+12y^3+6x^2+x\end{aligned}$$

2 On commence par expliciter $h(x,y)$.

Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}h(x,y) &= (x+y^4)(y+3x^2)+3(x+y^4+2x^2y)\\ &= xy+3x^3+y^5+3x^2y^4+3x+3y^4+6x^2y\end{aligned}$$

On peut alors calculer les dérivées partielles, et on retrouve que pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y)=y+9x^2+6xy^4+3+12xy \text{ et } \frac{\partial h}{\partial y}(x,y)=x+5y^4+12x^2y^3+12y^3+6x^2$$

Exercices

EXERCICE 96.1 On pose $U=\mathbb{R}_+^*\times]-\pi,\pi[$ et u la fonction définie de U dans $\mathbb{R}^2$ par

$$u:(r,\theta)\mapsto(r\cos\theta,r\sin\theta)$$

On note V l'image de U par u et on considère f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur V. On pose pour finir $F=f\circ u$. On désignera par x et y les variables de f.

1 Déterminer V et montrer que u réalise une bijection de U sur V et que u est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.

2 Exprimer pour tout $(r,\theta)\in U$, $\dfrac{\partial F}{\partial r}(r,\theta)$ et $\dfrac{\partial F}{\partial\theta}(r,\theta)$ en fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

3 En déduire, pour $(x,y)\in V$ des formules permettant d'exprimer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ en fonction de $\dfrac{\partial F}{\partial r}$ et $\dfrac{\partial F}{\partial\theta}$.

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 96.1

1 On pourra essayer de déterminer un antécédent par u d'un élément $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ donné. Penser à diviser par $\sqrt{x^2+y^2}$ après avoir exclus le cas où $(x, y) = (0, 0)$.

2 Appliquer les formules de la règle de la chaine.

3 Poser les vecteurs $X = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial r} \\ \dfrac{\partial F}{\partial \theta} \end{pmatrix}$ et déterminer une matrice A telle que $Y = AX$.

Solutions des exercices

EXERCICE 96.1

1 Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On va chercher s'il existe $(r, \theta) \in U$ tel que $u(r, \theta) = (x, y)$. On procède par analyse-synthèse.

- *Analyse* : supposons qu'il existe $(r, \theta) \in U$ tel que $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$ alors $x^2 + y^2 = r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r^2 > 0$. On en déduit que $(x, y) \neq (0, 0)$. De plus, comme $(x, y) \neq (0, 0)$, en divisant par $r = \sqrt{x^2+y^2}$, on obtient que

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ et } \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

  Comme θ ne peut pas valoir π (modulo 2π), on doit exclure le cas où $\cos\theta = -1$ et $\sin\theta = 0$, c'est-à-dire le cas où $y = 0$ et $\dfrac{x}{\sqrt{x^2}} = -1$ ce qui revient à $x < 0$ car $\sqrt{x^2} = |x|$.

- *Synthèse* : on a vu que si (x, y) appartenait à $u(U)$ alors $(x, y) \notin \{(x, 0)\ ,\ x \leq 0\}$. Réciproquement si $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0)\ ,\ x \leq 0\}$ alors, on pose $x' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $y' = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Comme $(x')^2 + (y')^2 = 1$ on sait qu'il existe θ (unique à 2π-près et donc unique si on impose $\theta \in]-\pi, \pi[$ en remarquant que $\theta = \pi$ est impossible car $x' \neq -1$) tel que $x' = \cos\theta$, $y' = \sin\theta$. Finalement, il existe bien un unique couple $(r = \sqrt{x^2+y^2}, \theta) \in U$ tel que $(x, y) = u(r, \theta)$.

On a montré que $V = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0)\ ,\ x \leq 0\}$ et que u réalise une bijection de U sur V. De plus comme cos et sin sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, la fonction u est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.

2 Soit $(r,\theta) \in U$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta) &= \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) \times \frac{\partial x}{\partial r}(r,\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) \times \frac{\partial y}{\partial r}(r,\theta)\\ &= \cos\theta \times \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \sin\theta \times \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial \theta}(r,\theta) &= \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) \times \frac{\partial x}{\partial \theta}(r,\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) \times \frac{\partial y}{\partial \theta}(r,\theta)\\ &= -r\sin\theta \times \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + r\cos\theta \times \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)\end{aligned}$$

3 On pose $X = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial r} \\ \dfrac{\partial F}{\partial \theta} \end{pmatrix}$ où on ne fait plus apparaitre les variables pour alléger les notations. La question précédente permet d'affirmer que $Y = AX$ en posant $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$.

On voit que le déterminant de A est $r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r > 0$. La matrice A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} r\cos\theta & -\sin\theta \\ r\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

On a donc $X = A^{-1}Y$, ce qui, en utilisant que $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\cos\theta = \frac{x}{r}$ et que $\sin\theta = \frac{y}{r}$ donne :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta) - \frac{y}{x^2+y^2}\frac{\partial F}{\partial \theta}(r,\theta)$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta) + \frac{x}{x^2+y^2}\frac{\partial F}{\partial \theta}(r,\theta)$$

Rechercher les extrema d'une fonction

97

Quand on ne sait pas !

Soit $p \in \mathbb{N}^*$, U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ (muni de la norme euclidienne), $a \in U$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

- On dit que f admet un minimum local en a si il existe $r > 0$ tel que la boule ouverte de centre a et de rayon r, notée $B(a, r)$, vérifie $B(a, r) \subset U$ et tel que pour tout $x \in B(a, r)$, $f(x) \geq f(a)$.
- On dit que f admet un minimum global en a si pour tout $x \in U$, $f(x) \geq f(a)$.

On définit de même la notion de maximum local et de maximum global.

On dit que f admet un extremum (local ou global) si elle admet un maximum ou un minimum (local ou global).

On dit que a est un point critique de f si le gradient de f en a est nul :

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_p}(a) \right) = (0, \ldots, 0)$$

On a alors la condition nécessaire suivant d'existence d'une extremum :

Si $f : U \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et admet un extremum local en $a \in U$ alors a est un point critique de f.

Que faire ?

- On commence par justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert U.
- On détermine ensuite l'ensemble des points critiques de f qui sont les points où f admet éventuellement un extremum.
- Si $a \in U$ est un point critique de f, on peut étudier le signe de $f(x) - f(a)$ pour x proche de a. Si le signe est constant sur un voisinage de a : f admet un extremum local. Si on trouve des vecteurs x arbitrairement proches de a tels que $f(x) - f(a) > 0$ et $f(x) - f(a) < 0$ alors f n'admet pas d'extremum local en a.

Conseils

- Si f est défini sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et si l'on cherche à montrer (par exemple) que $(0,0)$ n'est pas un point où f admet un extremum, il est fréquent de se restreindre à des courbes pour déterminer des signes différents. On peut calculer par exemple $f((x,0)) - f((0,0))$, $f((x,x)) - f((0,0)), \ldots$
- Si f est continue sur un compact (fermé borné) K alors on sait que f admet un maximum et un minimum global sur K. Alors si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intérieur de K, les points où f admet ces extrema sont soit des points critiques de f sur l'intérieur de K, soit se situent sur la frontière.

Exemple traité

Déterminer les extrema (si ils existent) de

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \mapsto & x^2+y^2-4xy \end{array}$$

SOLUTION

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$. On a pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\nabla f((x,y)) = (2x-4y, 2y-4x)$$

On en déduit que (x,y) est un point critique de f si et seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x-2y & = & 0 \\ y-2x & = & 0 \end{array} \right.$$

ce qui est équivalent à $x = 4x$ et $y = 2x$ soit encore à $(x,y) = (0,0)$. Le seul point où f peut admettre un extremum est $(0,0)$. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$f((x,y)) - f((0,0)) = x^2 + y^2 - 4xy$$

En particulier pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f((x,0)) - f((0,0)) = x^2 > 0$$

et $(x,0) \to (0,0)$ quand x tend vers 0. De même, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f((x,x)) - f((0,0)) = -2x^2 < 0$$

et $(x,x) \to (0,0)$ quand x tend vers 0. Ainsi, f n'admet ni un maximum local en $(0,0)$, ni un minimum local. On en déduit que f n'admet pas d'extremum.

Exercices

EXERCICE 97.1

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$$

Déterminer les extrema locaux de f.

EXERCICE 97.2

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = x^3 + y^3$$

Déterminer les extrema locaux de f.

EXERCICE 97.3

Soit D le disque unité ouvert de $\mathbb{R}^2$. Déterminer les extremas locaux de $f : D \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x, y) \in D,\ f(x, y) = \cos(x)^2 \mathrm{ch}(y)^2 + \sin(x)^2 \mathrm{sh}(y)^2$$

EXERCICE 97.4

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On définit l'application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ par :

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ f((x_1, \ldots, x_n)) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k x_k^2$$

Déterminer les extrema locaux de f.

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 97.1 Le seul point critique est $(0, 3)$. Écrire $f((x, y)) - f((0, 3))$ comme une somme de carrés.

EXERCICE 97.2 Calculer $f((x, 0))$.

EXERCICE 97.3 Utiliser $\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$ et $\mathrm{ch}(y)^2 - \mathrm{sh}(y)^2 = 1$.

EXERCICE 97.4 Calculer $f(x, 0 \ldots, 0)$ et $f(0, x, 0, \ldots, 0)$

EXERCICE 97.1

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ (elle est polynomiale). On a pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$\nabla f((x,y))=\left(\frac{\partial f}{\partial x}((x,y)),\frac{\partial f}{\partial y}((x,y))\right)=(2x+y-3,x+2y-6)$$

On détermine le(s) point(s) critique(s) de f :

$$\left\{\begin{array}{rcl}2x+y-3&=&0\\x+2y-6&=&0\end{array}\right.\underset{L_1\leftarrow L_1-2L_2}{\Longleftrightarrow}\left\{\begin{array}{rcl}-3y+9&=&0\\x+2y-6&=&0\end{array}\right.\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl}y&=&3\\x&=&0\end{array}\right.$$

Le seul point critique de f est $(0,3)$ donc le seul point où f peut atteindre un extremum est ce point. Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned}f((x,y))-f((0,3))&=x^2+xy+y^2-3x-6y+9\\&=\left(x+\frac{y-3}{2}\right)^2-\frac{(y-3)^2}{4}+y^2-6y+9\\&=\left(x+\frac{y-3}{2}\right)^2-\frac{(y-3)^2}{4}+(y-3)^2\\&=\left(x+\frac{y-3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}(y-3)^2\geq 0\end{aligned}$$

Ainsi, f atteint en $(0,3)$ un minimum local valant -9.

EXERCICE 97.2

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ (elle est polynomiale). On a pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$\nabla f((x,y))=\left(\frac{\partial f}{\partial x}((x,y)),\frac{\partial f}{\partial y}((x,y))\right)=(3x^2,3y^2)$$

De manière évidente, le seul point critique est $(0,0)$. Le seul point critique de f est $(0,0)$ donc le seul point où f peut atteindre un extremum est ce point. Remarquons que pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$f((x,0))-f((0,0))=x^3$$

et x^3 est négatif si $x<0$ et positif si $x>0$. Ainsi, f n'admet ni un minimum, ni un maximum, en $(0,0)$. Cette fonction n'admet pas d'extremum local sur $\mathbb{R}^2$.

EXERCICE 97.3

Pour tout $(x, y) \in D$, on a :

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \cos(x)^2\mathrm{ch}(y)^2 + \sin(x)^2\mathrm{sh}(y)^2 \\ &= \cos(x)^2(1+\mathrm{sh}(y)^2) + (1-\cos(x)^2)\mathrm{sh}(y)^2 \\ &= \cos(x)^2 + \mathrm{sh}(y)^2 \end{aligned}$$

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D (par somme de fonctions qui le sont). Pour tout couple (x, y) de D, on a :

$$\nabla f((x,y)) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}((x,y)), \frac{\partial f}{\partial y}((x,y))\right) = (-2\sin(x)\cos(x), 2\mathrm{ch}(y)\mathrm{sh}(y))$$

Sachant que la fonction cosinus hyperbolique ne s'annule pas, $2\mathrm{ch}(y)\mathrm{sh}(y)$ est nul si et seulement si y est nul. De plus, sachant que (x, y) appartient à D, x appartient à $]-1, 1[$ donc $-2\sin(x)\cos(x)$ est nul si et seulement si x est nul. Ainsi, le seul point critique de f sur D est $(0, 0)$. On a $f(0, 0) = 1$. Remarquons que pour tout réel $x \in]0, 1]$,

$$f(x,0) = \cos(x)^2 < 1 \quad \text{et} \quad f(0,x) = 1 + \mathrm{sh}(x)^2 > 1$$

Ainsi, f n'admet ni un minimum, ni un maximum, en $(0, 0)$. Cette fonction n'admet pas d'extremum local sur D.

EXERCICE 97.4

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ car polynomiale. Pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\nabla f((x_1, \ldots, x_n)) = (-2x_1, 2x_2, \ldots, 2(-1)^n x_n)$$

Le seul point critique de f est de manière évidente $(0, \ldots, 0)$ (dont l'image par f est nulle). Remarquons que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f(x, 0, \ldots, 0) = x^2 > 0 \quad \text{et} \quad f(0, x, 0, \ldots, 0) = -x^2 < 0$$

Ainsi, f n'admet ni un minimum, ni un maximum, en $(0, \ldots, 0)$. Cette fonction n'admet pas d'extremum local sur $\mathbb{R}^n$.

98 Résoudre une équation différentielle aux dérivées partielles

Quand on ne sait pas !

Pour résoudre des équations différentielles aux dérivées partielles d'ordre un ou d'ordre deux, on utilisera souvent des changements de variables. Il faut alors utiliser la règle de la chaîne vue dans la fiche 96. Rappelons-la dans le cas des fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ qui est le cas qui nous intéressera.
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. On note $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ et $\varphi : (u, v) \mapsto \varphi(u, v)$. La fonction $F = f \circ \varphi$ est alors de classe $\mathcal{C}^1$ et pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u,v)) \times \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u,v)) \times \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(u,v)$$

et

$$\frac{\partial F}{\partial v}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u,v)) \times \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u,v)) \times \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}(u,v)$$

Dans les formules ci-dessus, on a noté φ_1 et φ_2 les composantes de φ. Pour simplifier les notations on notera souvent ces composantes comme les variables de f. On obtient alors les formules suivantes :

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u,v)) \times \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u,v)) \times \frac{\partial y}{\partial u}(u,v)$$

et

$$\frac{\partial F}{\partial v}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u,v)) \times \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u,v)) \times \frac{\partial y}{\partial v}(u,v)$$

Que faire ?

Quand on veut résoudre une équation différentielle aux dérivées partielles, on essaye le plus souvent de faire un changement de variables afin de se ramener à une équation différentielle ne faisant plus intervenir que les dérivées partielles selon une seule des variables.

EXEMPLE 1 Cherchons l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - 5\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$$

On pose $x = u + v$ et $y = u - 5v$. C'est-à-dire que l'on considère $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $\varphi : (u,v) \mapsto (x,y) = (u+v, u-5v)$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$.
Soit f une fonction vérifiant l'équation ci-dessus, on considère $F = f \circ \varphi$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$ comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. De plus, d'après la règle de la chaîne, pour tout (u,v) dans $\mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial v}(u,v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u,v)) \times \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u,v)) \times \frac{\partial y}{\partial v}(u,v)\\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u,v)) - 5\frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u,v))\\ &= 0\end{aligned}$$

On en déduit que **si** f vérifie l'équation **alors** $F = f \circ \varphi$ ne dépend pas de la variable v. De ce fait, il existe une fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, $F(u,v) = h(u)$.
En remarquant que φ est l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$. Cette matrice est inversible car son déterminant vaut -6 et son inverse est la matrice $-\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Cela implique que φ est une bijection de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ et que $\varphi^{-1} : (x,y) \mapsto (u,v) = \left(\frac{5x+y}{6}, \frac{x-y}{6}\right)$.
Finalement, **si** f vérifie l'équation **alors** il existe une fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x,y) = F(\varphi^{-1}(x,y)) = h\left(\frac{5x+y}{6}\right)$$

Réciproquement, on vérifie aisément que les fonctions de ce type vérifient l'équation.

Conseils

- Il est important de bien poser le changer de variables en nommant clairement les variables. Il faut justifier (rapidement) que la fonction de changement de variables est de classe $\mathcal{C}^1$. Dans de nombreux cas, la fonction φ sera une bijection et sa bijection réciproque sera aussi de classe $\mathcal{C}^1$. Il peut être plus simple de faire le changement de variables dans l'autre sens.
- Il faut soigner la rédaction comme dans l'exemple ci-dessus, on procède par analyse-synthèse ; on montre que **si** une fonction f vérifie l'équation cherchée **alors** la fonction $F = f \circ \varphi$ est d'une certaine forme. La fonction φ étant bijective (entre deux ensembles à déterminer) on peut en déduire une forme pour les fonctions f candidates à être solution de l'équation. Il reste alors à vérifier que ces fonctions vérifient effectivement l'équation.

Exemple traité

Soit $c > 0$.
On appelle équation des ondes en dimension 1 l'équation

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t) = 0 \qquad \text{(E)}$$

On pose le changement de variables $u = x+ct$ et $v = x-ct$, c'est-à-dire que l'on considère la fonction $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2,\ \ \varphi(x,t) = (x+ct, x-ct)$$

1 Justifier que φ est de classe $\mathcal{C}^2$ et qu'elle réalise une bijection de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. On n'explicitera pas φ^{-1}.

2 Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On pose $F = f \circ \varphi^{-1}$ et donc $f = F \circ \varphi$. Exprimer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2}$ en fonction des dérivées partielles de F.

3 En déduire la forme des solutions de l'équation (E).

SOLUTION

1 La fonction φ est linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Elle est donc de classe $\mathcal{C}^2$. Sa matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 1 & c \\ 1 & -c \end{pmatrix}$. Cette matrice est inversible car son déterminant vaut $-2c < 0$. Cela implique que φ est une bijection de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

2 On utilise la règle de la chaîne. Toutes les fonctions considérées sont de classe $\mathcal{C}^2$. Pour tout (x,t) dans $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) &= \frac{\partial F}{\partial u}(\varphi(x,t)) \times \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) + \frac{\partial F}{\partial v}(\varphi(x,t)) \times \frac{\partial v}{\partial x}(x,t) \\ &= \frac{\partial F}{\partial u}(\varphi(x,t)) + \frac{\partial F}{\partial v}(\varphi(x,t)) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) &= \frac{\partial F}{\partial u}(\varphi(x,t)) \times \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial F}{\partial v}(\varphi(x,t)) \times \frac{\partial v}{\partial t}(x,t) \\ &= c\frac{\partial F}{\partial u}(\varphi(x,t)) - c\frac{\partial F}{\partial v}(\varphi(x,t)) \end{aligned}$$

On applique de nouveau la règle de la chaîne pour calculer les dérivées d'ordre 2.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,t) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u}\circ\varphi + \frac{\partial F}{\partial v}\circ\varphi\right)(x,t) \\
&= \frac{\partial^2 F}{\partial u^2}(\varphi(x,t)) \times \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) + \frac{\partial^2 F}{\partial v \partial u}(\varphi(x,t)) \times \frac{\partial v}{\partial x}(x,t) \\
&\quad + \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}(\varphi(x,t)) \times \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}(\varphi(x,t)) \times \frac{\partial v}{\partial x}(x,t) \\
&= \frac{\partial^2 F}{\partial u^2}(\varphi(x,t)) + 2\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}(\varphi(x,t)) + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}(\varphi(x,t))
\end{aligned}$$

On a utilisé le théorème de Schwarz à la dernière ligne ; comme F est de classe $\mathcal{C}^2$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial v \partial u}$.
Un calcul similaire donne

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\right)\circ\varphi$$

3 Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant l'équation (E). On pose comme ci-dessus, $F = f \circ \varphi^{-1}$. Les calculs de la question précédente nous donnent :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t) = 4\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}(\varphi(x,t))$$

De ce fait, comme f vérifie (E) : $\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2,\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}(\varphi(x,t)) = 0$.

Comme la fonction φ est surjective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ on obtient que $\dfrac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}$ est la fonction nulle. Cela implique, en intégrant par rapport à u puis par rapport à v qu'il existe des fonctions A, B de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$F : (u,v) \mapsto A(u) + B(v)$$

La fonction f est donc nécessairement de la forme $f : (x,t) \mapsto A(x+ct) + B(x-ct)$.
On vérifie aisément que les fonctions de cette forme vérifient (E).

Exercices

EXERCICE 98.1

Soit $V = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0), x \leq 0\}$ et $U = \mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi[$. Soit $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur V à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall (x, y) \in V, \quad x\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - y\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = af(x, y) \tag{E}$$

On pose $u : U \to V$ définie par $\varphi : (r, \theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$.

1 Montrer que $F = f \circ u$ vérifie

$$\forall (r, \theta) \in U, \quad \frac{\partial F}{\partial \theta}(r, \theta) = aF(r, \theta)$$

2 En déduire la forme de la fonction F.

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 98.1

1 Utiliser les résultats de l'exercice 1 de la fiche 96

2 En fixant une variable, se ramener à la résolution d'une équation différentielle vérifiée par une fonction d'une seule variable.

Solutions des exercices

EXERCICE 98.1

1 On reprend les notations de l'exercice 1 de la fiche 96. D'après les calculs de cet exercice, pour tout $(x, y) \in V$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta) - \frac{y}{x^2 + y^2}\frac{\partial F}{\partial \theta}(r, \theta)$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta) + \frac{x}{x^2 + y^2}\frac{\partial F}{\partial \theta}(r, \theta)$$

Ci-dessus, on a noté (r, θ) pour $u^{-1}(x, y)$.

Comme f vérifie (E) alors

$$\begin{aligned} x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= x\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta) + \frac{x}{x^2+y^2}\frac{\partial F}{\partial \theta}(r,\theta)\right) \\ &\quad -y\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta) - \frac{y}{x^2+y^2}\frac{\partial F}{\partial \theta}(r,\theta)\right) \\ &= \frac{\partial F}{\partial \theta}(r,\theta) \end{aligned}$$

Comme la fonction u est une bijection, on obtient : $\forall (r,\theta) \in U,\ \dfrac{\partial F}{\partial \theta}(r,\theta) = aF(r,\theta)$.

2 À r_0 fixé, cela implique que la fonction $\theta \mapsto F(r_0,\theta)$ vérifie l'équation différentielle $y' = ay$. Il existe alors une constante, dépendant de r_0, que l'on note $A(r_0)$ telle que pour tout $\theta \in]-\pi,\pi[$, $F(r_0,\theta) = A(r_0)e^{a\theta}$. La fonction F étant de classe $\mathcal{C}^1$, la fonction A doit être de classe $\mathcal{C}^1$.

Les ouvrages de cette collection ont pour objectif de faciliter l'acquisition et la maîtrise des notions fondamentales du programme. Le but est de faire en sorte que chacun sache « quoi faire », même lorsqu'il pense se trouver face à un obstacle insurmontable.

Chaque fiche de ce livre est conçue de la façon suivante :

- **Quand on ne sait pas !**
Les raisons expliquant pourquoi on ne sait pas, avec parfois des rappels de cours et les premières pistes à explorer afin de s'en sortir.

- **Que faire ?**
Les méthodes permettant de solutionner le type de problème étudié, assorties des rappels de cours essentiels à leur mise en œuvre.

- **Conseils**
Les conseils de rédaction et une ou deux astuces pratiques.

- **Exemple traité**
Mise en pratique et en lumière de ce qui a été vu précédemment.

- **Exercices**
Énoncés choisis soigneusement afin de balayer largement le thème étudié, certains étant extraits de sujets de concours.

- **Pour vous aider à démarrer**
Les idées permettant de démarrer sereinement les exercices proposés.

- **Solutions des exercices**
Les solutions complètes et détaillées des exercices.

www.editions-ellipses.fr
9 782340 033283

Illustration de couverture : © diego1012 - Fotolia.com