BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR

SESSION 2024

Épreuve de mathématiques

GROUPEMENT B ***CODE : 24MATGRB2***

Durée : 2 heures

SPÉCIALITÉ	COEFFICIENT
Conception et industrialisation en microtechniques	1,5

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il soit complet.

Le sujet comporte 6 pages, numérotées de 1/6 à 6/6.

EXERCICE 1 (10 points)

On coule du béton pour faire une dalle. Au début, le béton est mou, puis, au fil du temps, il sèche, et devient plus résistant.

On note $f(t)$ la résistance du béton à l'instant t.
$f(t)$ est exprimée en mégapascal (MPa) et t désigne le nombre de jours de séchage.

Les trois parties peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A. Résolution d'une équation différentielle.

On admet que la fonction f est solution de l'équation différentielle :

$$(E): \quad y' + 0{,}06y = 2{,}1 \ ,$$

où y est une fonction inconnue de la variable réelle t, définie et dérivable sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$, et où y' est la dérivée de y.

1. Résoudre sur $[0\,;+\infty\,[$ l'équation différentielle :

$$(E_0): \ y' + 0{,}06y = 0$$

On fournit la formule suivante :

Équation différentielle	Solutions sur un intervalle I
$y' + ay = 0$	$y(t) = k\mathrm{e}^{-a\,t}$

2. On considère la fonction constante g définie sur $[0\,;+\infty\,[$ par $g(t) = 35$.
Vérifier que la fonction g est solution de l'équation différentielle (E).

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4. À l'instant $t = 0$, on considère que la résistance du béton est nulle.
En déduire que la fonction f est définie sur $[0\,;+\infty\,[$ par : $f(t) = -35\mathrm{e}^{-0{,}06t} + 35$.

Partie B. Étude de fonction.

On considère à nouveau la fonction f définie sur $[0\,;+\infty\,[$ par :

$$f(t) = -35\mathrm{e}^{-0{,}06t} + 35 \, .$$

On rappelle que $f(t)$ désigne la résistance du béton, exprimée en mégapascal, à l'issue de t jours de séchage.

1. Quelle est la résistance du béton après 7 jours de séchage ? Après 72 heures ?
Arrondir au dixième.

2. On admet que la fonction f est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée. Vérifier que, pour tout réel t appartenant à $[0\,;+\infty\,[$, on a :

$$f'(t) = 2{,}1\mathrm{e}^{-0{,}06t}\,.$$

3. Déterminer le signe de $f'(t)$ sur $[0\,;+\infty[$ et en déduire le sens de variations de la fonction f sur $[0\,;\,+\infty[$.

4. Déterminer la limite de $f(t)$ lorsque t tend vers l'infini.
Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

5. Le fabricant du béton affirme que la résistance après 28 jours de séchage correspond à 80% de la résistance finale.

Cette affirmation est-elle juste ?

6. On considère la fonction F définie sur $[0\,;+\infty\,[$ par $F(t) = \left(\frac{1750}{3}\right)\mathrm{e}^{-0{,}06t} + 35t$.
Montrer que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

7. Déterminer une valeur approchée au dixième de la valeur moyenne de la résistance du béton sur les 28 premiers jours.

On fournit la formule suivante :

La valeur moyenne M d'une fonction h sur l'intervalle $[a\,;b]$ est définie par : $$M = \frac{1}{b-a}\int_a^b h(t)\mathrm{d}t\ .$$

<u>Partie C. Algorithme</u>

On note N le nombre entier correspondant au nombre minimal de jours de séchage permettant d'obtenir une résistance au moins égale à 21 MPa.

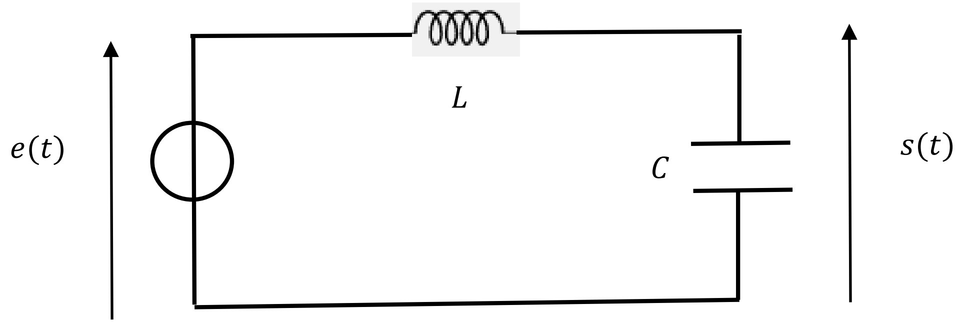
1. Recopier l'algorithme ci-dessous et compléter les lignes **3** et **4**.

Ligne 1	$t \leftarrow 0$
Ligne 2	$R \leftarrow 0$
Ligne 3	Tant que ……………
Ligne 4	$t \leftarrow$ ………
Ligne 5	$R \leftarrow -35\mathrm{e}^{-0{,}06t} + 35$
Ligne 6	Fin Tant que

2. Donner la valeur de N. Expliquer la démarche suivie.

EXERCICE 2 (10 points)

Un formulaire sur les transformées de Laplace est placé à la fin de l'exercice.



On considère un circuit LC.
Le signal d'entrée est noté $e(t)$. Le signal de sortie est noté $s(t)$.

Le système est régi par l'équation différentielle

$$(E)\ :\ LCs''(t) + s(t) = e(t).$$

Les conditions initiales sont : $s(0^+) = 0$ et $s'(0^+) = 0$.

1. On sait que $L = 10\ H$ et $C = 10^{-5}\ F$.
Réécrire alors l'équation différentielle (E).

2. On suppose que :
La fonction $e(t)$ admet une transformée de Laplace notée $E(p)$.
La fonction $s(t)$ admet une transformée de Laplace notée $S(p)$.

Démontrer que l'on a : $(10^{-4}p^2 + 1)S(p) = E(p)$.

3. La fonction de transfert $H(p)$ est définie par : $S(p) = H(p) \times E(p)$.

Démontrer que l'on a :

$$H(p) = \frac{10^4}{p^2 + 10^4}\ .$$

4. On note $\mathcal{U}(t)$ la fonction échelon unité définie ainsi : $\begin{cases} \mathcal{U}(t) = 0\ si\ t < 0\,. \\ \mathcal{U}(t) = 1\ si\ t \geq 0\,. \end{cases}$

On suppose désormais que l'on a : $e(t) = 3\,\mathcal{U}(t)$.

Représenter graphiquement sur votre copie le signal $e(t)$ en prenant pour échelle 1 cm pour chaque axe.

5. Donner l'expression de $E(p)$.

6. À l'aide des questions précédentes, déterminer $S(p)$ puis démontrer que l'on a :

$$S(p) = \frac{3}{p} - \frac{3p}{p^2 + 10^4} \ .$$

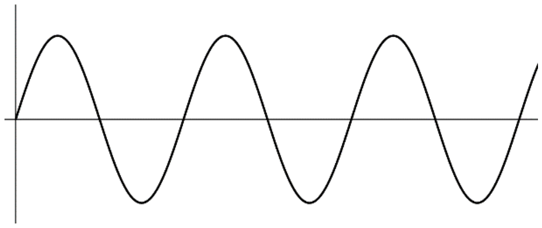
7. En déduire l'expression de $s(t)$.

8. On admet que l'on a :

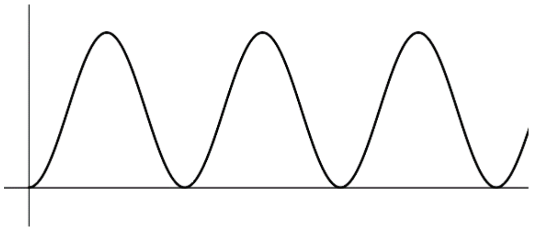
$$s(t) \ = 3\,\mathcal{U}(t)\,(1 - \cos(100t)).$$

Indiquer, sans justifier, lequel des croquis ci-dessous représente la courbe de la fonction $s(t)$.

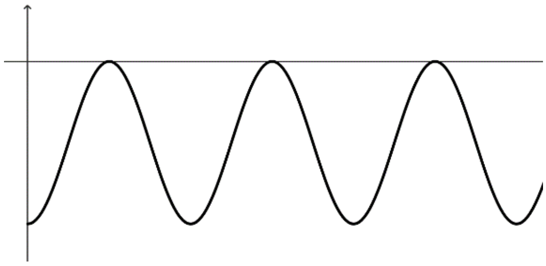
Croquis n°1



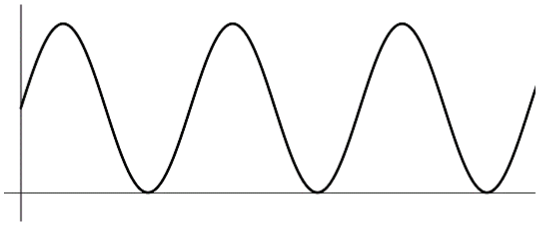
Croquis n°2



Croquis n°3



Croquis n°4



FORMULAIRE

Fonction	Transformée de Laplace
$t \mapsto \mathcal{U}(t)$	$p \mapsto \dfrac{1}{p}$
$t \mapsto t\mathcal{U}(t)$	$p \mapsto \dfrac{1}{p^2}$
$t \mapsto t^2\mathcal{U}(t)$	$p \mapsto \dfrac{2}{p^3}$
$t \mapsto \mathrm{e}^{-at}\mathcal{U}(t), a \in \mathbb{R}$	$p \mapsto \dfrac{1}{p+a}$
$t \mapsto \mathcal{U}(t-a), a \in \mathbb{R}$	$p \mapsto \dfrac{1}{p}\mathrm{e}^{-ap}$
$t \mapsto \sin(\omega t)\,\mathcal{U}(t), \omega \in \mathbb{R}$	$p \mapsto \dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$t \mapsto \cos(\omega t)\,\mathcal{U}(t), \omega \in \mathbb{R}$	$p \mapsto \dfrac{\mathrm{p}}{p^2+\omega^2}$
Dans ce qui suit, $f(t)$ est une fonction possédant une transformée de Laplace notée $F(p)$.	
$t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-at}\mathcal{U}(t), a \in \mathbb{R}$	$p \mapsto F(p+a)$
$t \mapsto f(t-a)\mathcal{U}(t-a), a \in \mathbb{R}$	$p \mapsto F(p)\mathrm{e}^{-ap}$
Si, de plus f est dérivable : $t \mapsto f'(t)\mathcal{U}(t)$	$pF(p) - f(0^+)$
Si, de plus f' est dérivable : $t \mapsto f''(t)\mathcal{U}(t)$	$p^2F(p) - pf(0^+) - f'(0^+)$

BTS Industriels

Session 2024

Épreuve : **Mathématiques Groupe B2**

Durée de l'épreuve : 2 heures

PROPOSITION DE CORRIGÉ

Exercice 1 (10 points)

Partie A

1. a) La solution générale de (E_0) est : ***y(t) = k* e** $^{-0,06\,t}$, où *k* est un réel quelconque.
   b) On a $g'(t) + 0,8\,g(t) = 0 + 0,06*35 = 2,1$ donc g(t) = 35 est une solution particulière de (E).
   c) La solution générale de (E) est alors : ***y(t) = k* e** $^{-0,06\,t}$ ***+ 35***

2. On veut trouver f(t) = k e $^{-0,06\,t}$ + 35 telle que f(0) = 0 i.e. k + 35 = 0 d'où k = - 35 et **f(t) = -35e** $^{-0,06\,t}$ **+ 35** est la fonction qui satisfait à la condition initiale du problème.

Partie B

1. a) f(7) ≈ 12 donc la résistance du béton au bout de 7 jours de séchage est d'environ 12 MPa.

f(3) ≈ 5,8 donc la résistance du béton au bout de 3 jours, soit 72h de séchage est d'environ 5,8 MPa .

2. On a f ' (t) = - 35* (-0,06) e $^{-0,06\,t}$ = 2,1 e $^{-0,06\,t}$

3. f ' (t) > 0, **donc f est strictement croissante sur [0 ; + ∞[.**

4. Comme $\lim_{t\to+\infty} -0,06\,t = -\infty$, alors par composition $\lim_{t\to+\infty} e^{-0,06\,t} = 0$, et on a $\lim_{t\to+\infty} \boldsymbol{f(t)} = \mathbf{35}$ peut s'interpréter comme si **à terme**, la résistance du béton sera de 35 MPa.

5. Comme f (28) ≈ 28,5 et 28,5 /35 ≈ 81,4% alors le fabricant du béton qui affirme que la résistance après 28 jours de séchage correspond à 80% de la résistance finale ne peut être accusé de mentir.

6. On a F ' (t) = (1750/3) * (-0,06) e $^{-0,06\,t}$ + 35 = - 35 e $^{-0,06\,t}$ + 35 = f (t), ce qui prouve que **F est une primitive de f sur [0 ; + ∞[.**

7. On a :

M = $\frac{1}{28}\int_0^{28} f(t)dt = \frac{1}{28}(\,F(28) - F(0)) \approx$ **18MPa** à 0,1 près

ce qui nous donne une valeur moyenne de la résistance du béton sur les 28 premiers jours de **18MPa.**

Partie C

1.

Ligne 1	t←0
Ligne 2	R←0
Ligne 3	Tant que R < 21
Ligne 4	t ← t + 1
Ligne 5	R← −35e−0,06t +35
Ligne 6	Fin Tant que

2. En tabulant les valeurs de la fonction f, on a f(15) ≈ 20,8 < 21 et f(16) ≈ 21,6 > 21 donc N = 16 : c'est le nombre minimal de jours de séchage permettant d'obtenir une résistance au moins égale à 21 MPa.

<u>Exercice 2</u> (10 points)

Partie A

1. L'équation différentielle (E) se réécrit : $10 * 10^{-5}$ s''(t) + s(t) = e(t) soit 10^{-4} s''(t) + s(t) = e(t)

2. On applique la transformée de Laplace à (E), ce qui donne en considérant la linéarité, $s\,(0^+) = 0$ et $s'(0^+) = 0$:

$10^{-4}\,p^2\,S(p) + S(p) = E(p)$ soit en factorisant : $(10^{-4}\,p^2 + 1)S(p) = E(p)$

3. $H(p)$ = S(p) / $E(p)$ et, avec l'égalité précédente, on a :

S(p) / $E(p)$ = $1 / (10^{-4}\,p^2 + 1) = 10^4 / (p^2 + 10^4)$ après multiplication par 10^4.

4. On obtient le graphe d'une fonction en escalier avec :

e(t) = 0 si t < 0

e(t) = 3 si t $\geq$ 0

5. La transformée de Laplace de la fonction e est : $E(p) = \frac{3}{p}$

6. On a : $S(p) = H(p) * E(p) = \frac{3}{p}\,\frac{10^4}{p^2+10^4}$

Or, $\frac{3}{p} - \frac{3p}{p^2+10^4} = \frac{3p^2+3*10^4-3p^2}{p(p^2+10^4)} = \frac{3}{p}\,\frac{10^4}{p^2+10^4} = S(p)$ C.Q.F.D.

7. Avec la linéarité et le formulaire :

$\mathcal{L}^{-1}(\frac{3}{p}) = 3\mathcal{U}(\mathrm{t})$; $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3p}{p^2+10^4}\right) = \ 3\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p}{p^2+(10^2)^2}\right) = 3cos(100t)\,\mathcal{U}(\mathrm{t})$;

ce qui donne $s(t) = 3\mathcal{U}(\mathrm{t}) - 3cos(100t)\,\mathcal{U}(\mathrm{t})$.

8. C'est le croquis 2 qui représente la courbe de la fonction $s(t)$.

(car $s(t)$ = 0 et 1- $cos(100t) \geq 0$)