Collection Les Mémentos de l'INSEEC

Cahiers méthodologiques pour les classes préparatoires aux Grandes Écoles de Commerce

BUSINESS SCHOOL
INSEEC
PARIS • BORDEAUX

Les astuces de Maths

par Isabelle Blejean

MÉMENTO N° 9

préparation méthode réussite concours

Les Mémentos de l'INSEEC

Depuis désormais plus de dix ans, l'INSEEC propose aux élèves des classes préparatoires des conférences à travers la France sur les sujets d'Histoire et de Culture Générale qu'appellent les programmes des concours d'entrée aux Ecoles de Commerce. Confortés par les nombreux témoignages enthousiastes que ces manifestations ont suscités chaque année, nous avons pris la décision d'aller plus loin dans cette aide offerte aux étudiants pour compléter leur préparation.

Nous avons donc confié à Éric Cobast le soin d'animer une collection de petits ouvrages méthodologiques destinés aux étudiants de première et de seconde année.

Les « Mémentos de l'INSEEC » ont été conçus et rédigés par des professeurs des classes préparatoires particulièrement sensibilisés aux difficultés que rencontrent régulièrement leurs étudiants. C'est au service de tous qu'ils apportent à présent leur expérience. L'ambition des « Mémentos » n'est évidemment pas de se substituer d'une manière ou d'une autre aux cours annuels, mais de proposer des outils, principalement sur le plan de la méthode et du lexique, susceptibles d'accompagner la préparation des concours.

Le souci a été d'efficacité et d'utilité quant au choix du format. Il nous a été dicté par l'intention de publier des textes maniables, d'un accès aisé et vers lesquels il est commode de revenir souvent.

Nous avions choisi, l'an passé, de débuter par une méthodologie de la dissertation d'Histoire, de la dissertation de philosophie, de l'épreuve écrite d'anglais et enfin de l'épreuve de contraction. A ces quatre premiers titres, il fallait ajouter une présentation détaillée des entretiens qui suivent l'admissibilité et un lexique propre au thème retenu pour la C.S.H.

Cette année, le dispositif est complété par deux mémentos de mathématiques (un formulaire et un recueil « d'astuces »), un mémento d'espagnol, un mémento d'économie et enfin le lexique du thème de C.S.H. de l'année, l'Action.

En vous souhaitant bonne réception et bon usage de ces mémentos, et avec l'assurance que cette année d'efforts trouvera sa juste récompense…

Catherine Lespine

Directrice Générale du Groupe INSEEC

Les astuces de Maths

Isabelle Bléjean
Professeur agrégé de Mathématiques en classes préparatoires au Lycée Madeleine Daniélou à Rueil-Malmaison

Sommaire

Conseils généraux

A. Les années de préparation

1. Apprendre

Les concours se préparent sur deux ans. Il est essentiel que les candidats aient fourni un travail régulier afin que les notions soient parfaitement acquises et que les automatismes soient bien en place. On ne peut utiliser à bon escient les théorèmes, définitions et propriétés que si on les connaît parfaitement c'est-à-dire si on en connaît les hypothèses et les conclusions. Un travail de « par cœur » est une composante fondamentale de l'activité mathématique. La constitution d'un formulaire personnel de mathématiques ne saurait être trop conseillée. D'autre part, il est bien souvent utile de revoir les démonstrations du cours qui, si elles ne font pas en général l'objet d'une question, donnent les mécanismes qui opèrent dans le chapitre traité. Les exemples donnés en cours par vos professeurs peuvent aussi être mémorisés car ils sont une source de référence lorsque vous cherchez des méthodes de résolution.

2. S'entraîner

De même que le virtuose s'entraîne tous les jours, la fréquentation assidue des annales est une part importante du succès. Chaque concours a sa spécificité et chaque groupe de concepteurs a son style. Bien les connaître permet de satisfaire aux exigences propres de chaque épreuve. On ne saurait donc trop vous conseiller de travailler les sujets des années précédentes.

La méthode de travail avec des annales demande une grande discipline. Nombre d'entre vous pensent avoir « fait des annales » alors que leur seul exercice consiste en une lecture stérile et éphémère du corrigé. Un sujet d'annale se travaille sans un seul coup d'œil aux solutions avant la fin du problème. Et, si vous bloquez à un moment, il vaut mieux demander conseil à vos professeurs qui sauront vous donner une indication sans déflorer l'exercice et surtout trouver la raison de votre blocage.

La rapidité est dans ce type d'épreuve un des critères de sélection. Pour l'acquérir, on doit perdre le moins de temps en recherche. Pour cette raison, le nombre d'automatismes mis en place va être déterminant.

B. Lors des épreuves

1. Recommandations

Naturellement, il faut lire l'énoncé dans sa totalité dès le début de l'épreuve. Cela permet de :

- découvrir les thèmes abordés et, de ce fait, de choisir l'exercice par lequel on commence ;
- voir les questions les plus faciles et évaluer les moins immédiates ;
- repérer les questions classiques.

Il arrive aussi que certaines questions reviennent de façon récurrente dans les sujets et, si on les a traitées pendant la préparation, leur résolution en sera d'autant facilitée.

Les questions dites de calcul et les questions d'algorithmique peuvent être assez longues à résoudre. Elles ne sont, en général, entièrement résolues que par un petit nombre de candidats et sont, de ce fait, assez payantes.

2. Gestion du temps

Avant de commencer l'épreuve, il faut se donner des repères concernant le temps à passer sur chaque exercice ou partie du sujet.

Il ne faut jamais passer trop de temps sur une quelconque question. On aura donc intérêt à la laisser de côté et à en admettre le résultat. Il ne faut pas non plus passer trop rapidement si la solution n'est pas immédiate car on doit bien s'imprégner du résultat qui, souvent, doit être utilisé dans une autre partie de l'exercice.

Gardez-vous un temps de relecture qui permet d'avoir une vue d'ensemble sur l'exercice traité et un regard critique sur la façon dont vous l'avez traité.

3. Méthodes

Pour chaque type d'exercice, il y a un certain nombre de méthodes usuelles de résolution. Ce sont celles auxquelles il faut penser de façon systématique pendant la phase de recherche. C'est seulement après avoir exploré toutes ces pistes que vous pourrez envisager de passer la question. Voici un catalogue non exhaustif des différentes méthodes classées par thème.

Algèbre

A. Complexes. Polynômes

1. Nombres complexes

La somme de deux nombres complexes conjugués $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$ $(\theta \in IR)$ est $2\cos\theta$.
Le produit de deux nombres complexes conjugués $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}(\theta \in IR)$ est 1.
Pour linéariser $\cos^p x \sin^q x$, on utilise les formules d'Euler.
Si on veut exprimer $\cos n\theta$ ou $\sin n\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$, on considère que $\cos\theta = \mathrm{Re}\, e^{i\theta} \quad \sin\theta = \mathrm{Im}\, e^{i\theta}$ et on utilise les formules de Moivre.

Quelques résultats très utilisés :

1) $e^{i0} = 1 = e^{2i\pi}$, $e^{i\pi} = -1, e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, $e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$.

2) - $e^{i\frac{k\pi}{n}}$ et $e^{i\frac{(2n-k)\pi}{n}} = e^{-i\frac{k\pi}{n}}$ sont conjugués.

- $e^{i\frac{k\pi}{n}}$ et $e^{i\frac{(n+k)\pi}{n}} = -e^{i\frac{k\pi}{n}}$ sont opposés.

- $e^{i\alpha}$ et $e^{i\beta}$ sont conjugués si et seulement si $\alpha + \beta = 0\ [2\pi]$.

- $e^{i\alpha}$ et $e^{i\beta}$ sont opposés si et seulement si $\alpha = \beta + \pi\ [2\pi]$.

Pour calculer $\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}$, on utilise (lorsque $x \notin \{2p\pi \quad , p \in Z\}$) la somme des termes d'une suite géométrique de raison différente de 1, on met en facteur $e^{i\frac{x}{2}}$ et on utilise les formules d'Euler.

2. Polynômes

Attention aux confusions de notations entre polynômes et fonctions polynômes. Lorsqu'on écrit une fonction polynôme P, on doit toujours faire précéder l'écriture de P (x) d'un quantificateur (x peut alors prendre toutes les valeurs de IR ou de C).

Lorsqu'on écrit un polynôme P, les écritures P et P (X) sont indifférentes et ne doivent pas être précédées de quantificateur, X étant une “indéterminée”.

Par exemple, les notations X pour le polynôme P_1 défini par P_1 (x) = x ou encore les notations du type « X = 1 » pour P_1 (x) = 1 s ont à éviter.

3. Egalité de polynômes

Pour montrer que deux polynômes de même degré *n* sont égaux on peut :

- montrer qu'ils ont la même décomposition, c'est-à-dire étudier chaque coefficient ;
- montrer qu'ils possèdent les mêmes racines avec le même ordre de multiplicité et le même coefficient dominant ;
- montrer que leur différence est le polynôme nul ;
- montrer qu'ils coïncident en un nombre de points strictement supérieur à *n* ou sont égaux sur un intervalle de IR non réduit à un point.

Lorsque l'on simplifie une égalité du type PQ = RQ par un polynôme Q, on doit s'assurer que Q n'est pas le polynôme nul.

4. Polynôme nul

Pour montrer qu'un polynôme est nul, on peut :

- montrer qu'il admet plus de racines que son degré ;
- montrer que son degré est infini ;
- montrer qu'il s'annule sur un intervalle de IR non réduit à un point et admet ainsi une infinité de racines.

Si le produit de deux polynômes P et Q est nul (ou s'annule sur un intervalle de IR non réduit à un point), alors P = 0 où Q = 0.

<u>Attention</u>, écrire que $P \neq 0$ ne signifie pas que P ne s'annule pas sur IR mais que P n'est pas le polynôme nul, c'est-à-dire n'est pas identiquement nul sur IR.

Tout polynôme périodique de $IR[X]$ est constant.

5. Racines des polynômes et factorisation

Un nombre a est racine d'un polynôme P si et seulement si P (a) = 0.

Si a est racine de P alors on a $\forall x \quad P(x) = (x-a)R(x)$ avec *degR = degP-1*.

Si on a $\forall k \leq p \quad P^{(k)}(a) = 0$ alors $\forall x \quad P(x) = (x-a)^p R(x)$ avec *degR = degP-p*.

Si de plus *R (a)≠0,* on dit que a est racine de *P* de multiplicité *p*.
Pour montrer que a est racine d'ordre *p* de *P* on peut :

- soit montrer que $\forall k < p \quad P^{(k)}(a) = 0$ et $P^{(k)}(a) \neq 0$
- soit factoriser *P* en $P(x) = (x-a)^p R(x)$ et montrer que R (a)≠0.

6. Division des polynômes

Avant d'effectuer la division d'un polynôme *P* par un polynôme *Q* sur I, on doit s'assurer que Q ne s'annule pas sur I c'est à dire que $\forall x \in I,\ Q(x) \neq 0$.

Pour montrer qu'un polynôme A est divisible par un polynôme B, il suffit de montrer que toutes les racines de B sont racines de A avec au moins le même ordre de multiplicité.

Pour déterminer le reste de la division suivant les puissances décroissantes d'un polynôme A par un polynôme B de degré $n \geq 1$, on peut envisager les deux méthodes :

- on pose la division euclidienne de A par B ;
- on écrit $\exists (Q,R) \in (IR[X])^2$ tels que $A = BQ + R$ avec $\deg(R) \leq n-1$ et on donne la variable X des valeurs qui annulent B.

  Dans le cas où B ne possède que des

  racines simples, on peut écrire *R* sous la forme $R(X) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k X^k$ et en écrivant

  cette relation pour les différentes racines de *B*, on en déduit un système de n équations linaires à n inconnues dont les $(\lambda_k)_{0 \leq k \leq n-1}$ sont les solutions. On résout ce système et on trouve ainsi le reste de la division suivant les puissances décroissantes de A par B.

7. Décomposition d'un polynôme

Seuls les polynômes de IR [X] admettent une décomposition dans IR [X].

Pour déterminer la décomposition dans C [X] d'un polynôme P de C [X] ou de IR [X], il suffit de déterminer toutes ses racines complexes avec leurs ordres de multiplicité.

Pour déterminer la décomposition dans IR [X] d'un polynôme P∈IR [X], il faut commencer par déterminer toutes ses racines réelles ou complexes avec leurs ordres de multiplicité.

Si toutes les racines de P ne sont pas réelles, on utilise le fait que les racines complexes d'un polynôme à coefficients réels sont conjuguées deux à deux, donc pour chaque racine complexe non réelle λ de P, on trouve son conjugué $\overline{\lambda}$, qui est aussi racine de P, et on écrit : $(X-\lambda)(X-\overline{\lambda}) = X^2 - (\lambda+\overline{\lambda})X + \lambda\overline{\lambda}$, car ce polynôme a tous ses coefficients réels.

B. Algèbre linéaire

1. Espace vectoriel. Sous-espace vectoriel

Pour démontrer que E est un espace vectoriel, il est rare d'avoir à en démontrer toutes les propriétés. Le plus souvent, il suffit de démontrer que E est un sous-espace d'un espace vectoriel connu. Il est donc important de bien connaître les espaces vectoriels de référence.

Pour montrer que F est un sous-espace d'un espace vectoriel de E, on peut montrer que F est l'intersection ou la somme de 2 espaces vectoriels ou que F est le noyau ou l'image d'une application linéaire. On vérifie toujours avant tout la condition nécessaire : 0 appartient à F.

Pour montrer que 2 sous-espaces vectoriels F et G sont égaux, on peut montrer :

$F \subset G \quad et \quad G \subset F$ ou bien $F \subset G \quad et \quad \dim F = \dim G$

Pour montrer que 2 sous-espaces sont supplémentaires on peut :

- soit montrer que la réunion d'une base de F et d'une base de G est une base de E
- soit montrer que $F \cap G = \{0\} \quad et \quad \dim E = \dim F + \dim G$
- soit déterminer un projecteur p sur E tel que $F = Ker\ p \quad et \quad G = \operatorname{Im} p$

2. Base

Pour montrer qu'une famille de vecteurs est une base, on montre que c'est une famille génératrice et libre. On se souvient que toute sous-famille d'une famille libre est libre et toute sur-famille d'une famille liée est liée.

Il ne faut pas oublier les considérations de dimension : on peut montrer que c'est une famille libre (ou une famille génératrice) de n vecteurs dans un espace de dimension n.

On peut aussi écrire la matrice constituée des coordonnées des vecteurs de la base mises en colonnes et montrer qu'elle est inversible.

3. Dimension d'un espace vectoriel

La dimension d'un espace vectoriel E engendré par une famille de vecteurs est le rang de la matrice M représentant cette famille. Il faut donc déterminer une famille génératrice de l'espace. En effectuant un suite de transformations sur les colonnes de M, on peut déterminer une base en considérant les vecteurs-colonnes non nuls de la matrice obtenue à la suite des transformations. Le nombre des vecteurs de cette base sera alors la dimension de E.

Il est obligatoire de bien connaître les dimensions des espaces de référence.

La méthode la plus simple est de déterminer une base de E.

Si on connaît 2 sous-espaces supplémentaires de E, la somme de leurs dimensions sera celle de E.

4. Sous-espaces supplémentaires ou somme directe

Pour montrer que deux sous-espaces vectoriels *F* et *G* de *E* sont supplémentaires, on peut :

- montrer que tout vecteur *x* de *E* s'écrit de manière <u>unique</u>
  $x = x_1 + x_2 \quad où \quad x_1 \in F \quad et \quad x_2 \in G$
- montrer que la réunion d'une base de *F* et d'une base de *G* forme une base de *E*
- montrer que si $x_1 \in F \quad et \quad x_2 \in G$ avec $x_1 + x_2 = 0$ alors $x_1 = 0 \; et \; x_2 = 0$
- montrer que *F* et *G* sont des sous-espaces propres associés à deux valeurs distinctes
- montrer que dim (*F*) + dim (*G*) = dim (*E*) et $F \cap G = \{0\}$.

Le seul supplémentaire de {0} est *E*.

5. Application linéaire

Pour montrer que *f* est une application linéaire, on utilise la définition.

En cas de difficulté, on peut effectuer la démonstration en deux temps : l'additivité et la multiplication externe.

6. Endomorphisme

Pour montrer que *f* est un endomorphisme, on montre que *f* est une application linéaire sur l'espace vectoriel E puis que *f* a pour ensemble d'arrivée E. Pour cela, on montre que pour tout *u* appartenant à E, on a *f (u)* appartient à E. En général, dans le cas où E est de dimension finie, on calcule les images des vecteurs de la base et on montre qu'ils appartiennent à E.

7. Projecteurs

Une application linéaire est un projecteur si et seulement si $p \circ p = p$. Dans ce cas, on a $E = \text{Im } p \oplus Ker\ p$.

8. Application linaire bijective

On considère l'application *f*: E→F, pour démontrer que *f* est bijective :

- si E et F sont de même dimension finie, il suffit de montrer que *f* est injective en montrant que son noyau est réduit au vecteur nul ou en montrant que son image est égale à F ;
- si E et F sont de dimension inconnue ou infinie, il faut montrer que *f* est injective et surjective à l'aide de la définition ou bien du noyau et de l'image ;
- on peut montrer que l'image d'une base de E par *f* est une base de F.

Une application linéaire *f* est bijective si et seulement si sa matrice est inversible.

9. Matrices d'une application linéaire

Pour écrire la matrice A d'une application linéaire *f* de E dans F, on calcule les images par *f* des vecteurs d'une base de E, on les exprime en fonction des vecteurs de la base de F choisie. Ces images formeront les colonnes de A.

Deux applications linéaires dont les matrices sont semblables sont égales.

Pour démontrer que 2 matrices A et B sont <u>semblables,</u> on cherche une matrice P inversible telle que $B = P^{-1}AP$.

10. Puissance d'une matrice

Il y a plusieurs méthodes de calcul de puissance d'une matrice :

- Si A est diagonalisable, alors $A^n = PD^nP^{-1}$
- Si on peut écrire A sous la forme de la somme d'une matrice nilpotente J et de aI, on écrit $A^n = (J + aI)^n$ et on applique la formule du binôme de Newton
- Si on peut déterminer un polynôme P annulateur de A, on effectue la division suivant les puissances décroissantes de X^n par P. On trouve $X^n = P(X)\,Q(X) + R(X)$ et puisque $P(A) = 0$ on obtient $A^n = R(A)$
- Dans le cas où la matrice A comporte un grand nombre de 0, on peut déterminer A^n en déterminant les suites $(a_{i,j})$ où pour tout entier n, $a_{i,j}(n)$ est le coefficient (i,j) de A^n.

11. Matrice de passage

Soient **B** et **B’** deux bases d’un espace vectoriel E.

On appelle matrice de passage de **B** « l’ancienne base » dans **B**’« la nouvelle base », la matrice des coordonnées des vecteurs de **B’** dans la base **B** mis **en colonnes**. Cette matrice est notée : P.

Soit u un vecteur de E de coordonnées X dans la base **B** et X**’** dans la base **B’**. Alors, on a la formule : X = PX’ ou encore X**’** = P^{-1} X et on a $P_{B' \to B} = (P_{B \to B'})^{-1}$.

La matrice de passage de **B** dans **B’** s’obtient sans calcul, on obtient donc : X = P X**’** et X’ = P^{-1} X.

12. Matrice de changement de base

Soit f un endomorphisme de E dans F, si on considère 2 bases B et B’ de E et 2 bases C et C’ de F, et si on appelle P la matrice de B dans B’, Q la matrice de C dans C’ et M la matrice de f exprimée de B dans C et N la matrice de f exprimée de B’ dans C’, on a alors $N = Q^{-1}MP$.

13. Inversibilité d’une matrice

On peut montrer qu’une matrice est inversible en effectuant une suite de transformations pour la rendre triangulaire. On regarde alors ses pivots, la matrice est inversible si et seulement si elle n’a aucun pivot nul.
En particulier, A n’est pas inversible si et seulement si 0 est valeur propre de A.

Dans certains cas, il suffit de bien regarder la matrice pour remarquer qu’elle n’est pas inversible :

- lorsque la somme des coefficients de chaque colonne ou de chaque ligne est nulle, alors les vecteurs-colonnes ou les vecteurs-lignes sont liés et A n’est pas inversible.
- lorsque deux colonnes ou deux lignes sont proportionnelles, de même les vecteurs-colonnes ou les vecteurs-lignes sont liés et A n’est pas inversible.

Si on note A la matrice représentative d’une application linéaire f, alors A est inversible si et seulement si f est bijective. Si on a déjà démontré que le noyau de f est réduit au vecteur nul, alors on sait que f est bijective et donc que A est inversible.

14. Noyau d’une application linéaire f: E→F

Le noyau est un sous-espace vectoriel de E. C’est par définition l’ensemble des vecteurs x de E tels que $f(x) = 0$.

Pour chercher un vecteur du noyau, on cherche les vecteurs dont l’image est 0 par f.

15. Image d'une application linéaire f: E→F

L'image de *f* est un sous-espace vectoriel de F. C'est par définition l'ensemble des vecteurs de F qui ont un antécédent dans E par *f*.

Si E est de dimension finie, on considère le sous-espace vectoriel engendré par les images des vecteurs d'une base de E. Ils engendrent alors Im*f*. On cherche parmi ceux-là ceux qui forment une famille libre.

16. Rang d'une matrice, d'une application linéaire

Pour déterminer le rang d'une matrice, on cherche le rang de l'application linéaire qui lui est associée.

Pour déterminer le rang d'une application linéaire *f,* on peut :

- déterminer le noyau de *f* et utiliser le théorème du rang ;
- chercher une base de Im *f*.

Pour déterminer le rang d'une famille de vecteurs de E, on écrit la matrice A de la famille dans E et on cherche le rang de cette matrice.

17. Théorème du rang

Avant d'utiliser le théorème du rang, il faut s'assurer que les espaces sont de dimension finie.

Soit *f* : E→F une application linéaire, alors dim (Im*f*) + dim (Ker*f*) = dim E

- *f* est injective si et seulement si Ker*f* = $\{0_E\}$
  si et seulement si dim (Ker*f*) = 0
  si et seulement si dim (Im*f*) = dimE
- *f* est surjective si et seulement si Im*f* = F
  si et seulement si dim (Im*f*) = dim F
- *f* injective ⇒ dimE ≤ dimF ; *f* surjective ⇒ dimE ≥ dimF ; *f* bijective ⇒ dimE = dimF
- Si dim E = dim F Alors : *f* injective si et seulement si *f* surjective si et seulement si *f* bijective.

18. Valeur propre

λ est valeur propre de A si et seulement si A – λI est non inversible.

On écrit donc la matrice A - λI et on applique la méthode du pivot de Gauss pour rendre la matrice triangulaire. Les valeurs de λ qui annulent les pivots sont susceptibles d'être des valeurs propres.

Les valeurs propres des matrices triangulaires sont les coefficients diagonaux.

S'il existe un polynôme P tel que P (A) = 0 (polynôme annulateur), alors toutes les valeurs propres de A sont racines de l'équation P (λ) = 0.

Attention : la réciproque est fausse. Si P est un polynôme annulateur de A et si P (λ) = 0, alors λ n'est pas nécessairement valeur propre de A, il est impératif de le vérifier à l'aide des vecteurs propres.

Si λ est valeur propre de A, alors pour tout entier k, λ^k est valeur propre de A^k.

Si A est inversible et si λ est une valeur propre de A, alors $1/\lambda$ est valeur propre de A^{-1}

Si A peut s'exprimer comme combinaison linéaire de matrices A_i ($\sum \alpha_i A_i$) et si pour tout i, λ_i est valeur propre de A_i alors $\sum \alpha_i \lambda_i$ est valeur propre de A.

Si $Ker\ f$ est non réduit au vecteur nul alors 0 est valeur propre de la matrice A représentant f et le sous-espace propre associé est $E_0 = Ker\ f$

19. Vecteur propre et sous-espace propre

X est un vecteur propre associé à la valeur propre λ si et seulement si X est non nul et vérifie $(A - \lambda I)\, X = 0$.

En pratique, après avoir déterminé les valeurs propres λ, on cherche les vecteurs propres qui leur sont associés en résolvant un système qui n'est pas de Cramer et a donc une infinité de solutions. On choisira un vecteur propre en fonction du problème posé.

Une valeur propre peut être associée à plusieurs vecteurs propres. Le sous-espace propre associé à λ est le sous-espace vectoriel engendré par l'ensemble des vecteurs propres associés à λ c'est à dire $E_\lambda = Ker(A - \lambda I)$.

L'intersection de deux sous-espaces propres est toujours réduite au vecteur nul.

20. Diagonalisation

Toute matrice carrée symétrique réelle est diagonalisable.

Si A admet n valeurs propres distinctes dans une espace de dimension n, alors A est diagonalisable.

Si la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à la dimension de l'espace, alors A est diagonalisable.

Si E est somme directe des sous-espaces propres de f alors f est diagonalisable.

Lorsqu'on cherche à démontrer que A est diagonalisable, il est utile de reprendre les questions précédentes ; très souvent, on a déjà des renseignements sur les valeurs propres et il suffit de chercher les sous-espaces propres, ce qui évite de passer par la méthode du pivot de Gauss qui est très calculatoire.

Si A est diagonalisable, on peut déterminer des matrices P et D telles que $A = PDP^{-1}$

D est une matrice diagonale dont les coefficients sont les valeurs propres de A.

P est une matrice dont les colonnes sont constituées des vecteurs propres de A dans l'ordre choisi pour les valeurs propres.

Si une matrice est diagonalisable, la somme de ses valeurs propres en comptant leur ordre de multiplicité est égale à la somme de ses coefficients diagonaux, c'est-à-dire sa trace.

Si A admet une unique valeur propre λ, alors A est diagonalisable si et seulement si $A = \lambda I$.

Si 0 est l'unique valeur propre de A, alors A n'est pas diagonalisable.

21. Composition d'endomorphisme

Certains résultats sur les noyaux et images sont assez souvent utilisés lorsqu'on étudie les composés d'endomorphismes. On retiendra donc :

$Ker\ g \subset Ker\ f \circ g$ et $\mathrm{Im}\ f \circ g \subset \mathrm{Im}\ f$

et en particulier $Ker\ f \subset Ker\ f^2$ qui se généralise en $Ker\ f^n \subset Ker\ f^{n+1}$

et $\mathrm{Im}\ f^2 \subset \mathrm{Im}\ f$ qui se généralise en $\mathrm{Im}\ f^{n+1} \subset \mathrm{Im}\ f^n$

Ces propriétés ne sont pas des propriétés du cours et doivent donc être démontrées.

22. Commutant d'une application linéaire

Soit f un endomorphisme qui admet n valeurs propres distinctes dans un espace vectoriel E de dimension n. (E possède donc une base de vecteurs propres dans laquelle f est diagonalisée). Soit g un endomorphisme de E tel que : $fog = gof$. Alors :

f et g admettent la même base de vecteurs propres

ou encore : f et g sont diagonalisables dans une <u>même</u> base

ou encore : tout vecteur propre de f est aussi vecteur propre de g.

Cette propriété n'est pas une propriété du cours et doit donc être démontrée.

C. Algèbre bilinéaire

1. Produit scalaire

Si on veut montrer qu'une application φ est un produit scalaire sur E, on montre que φ est une application de E^2 dans *IR* c'est-à-dire que φ(*x,y*) est un réel puis, dans cet ordre, que φ est bilinéaire, symétrique, définie, positive.

Bien connaître les produits scalaires usuels sur IR^n, sur l'ensemble des fonctions continues sur [*a,b*], sur l'ensemble des matrices $M_{n,1}(IR)$.

2. Norme euclidienne

Si on veut montrer qu'une application *N* définie sur E est une norme euclidienne, on peut utiliser la définition sinon on définit l'application φ sur ExE par $\varphi(x,y)=\frac{1}{2}[N^2(x+y)-N^2(x)-N^2(y)]$ et on vérifie que φ est un produit scalaire. On aura alors $\forall x\in E\ \varphi(x,x)=N^2(x)$.

Pour obtenir la norme *N* associée au produit scalaire φ, on définit sur E l'application *N* par $N(x)=\sqrt{\varphi(x,x)}$

3. Inégalité de Cauchy-Schwarz

Avant d'utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il faut préciser le produit scalaire à utiliser.

4. Base orthonormée

Si on veut construire une base orthonormée d'un espace de dimension *n* à partir :

- d'une base quelconque, on applique le procédé d'orthonormalisation de Schmidt ;
- d'une famille orthogonale de *n* vecteurs non nuls, on norme les vecteurs de la famille.

On se souvient que toute famille orthogonale est libre. Donc pour montrer qu'une famille de *n* vecteurs d'un espace de dimension *n* forme une base orthogonale, il suffit de montrer qu'elle forme une famille orthogonale.

5. Déterminer les coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée

On utilise la relation $x = \sum_{i=1}^{n} < x, e_i > e_i$

6. Déterminer le projeté orthogonal

Si on veut déterminer le projeté orthogonal d'un vecteur *x* sur un sous-espace vectoriel F de E, on peut :

- soit déterminer une base orthonormée de F $(f_i)_{1 \leq i \leq p}$ puis calculer $p(x) = \sum_{i=1}^{p} < x, f_i > f_i$.
- soit déterminer une base de F $(f_i)_{1 \leq i \leq p}$ écrire $p(x) = \sum_{i=1}^{p} a_i f_i$ et résoudre le système obtenu en considérant que $x - p(x)$ est orthogonal à f_i pour tout i.

7. Orthogonal d'un sous-espace vectoriel

Pour déterminer le sous-espace orthogonal G d'un sous-espace vectoriel F, on peut :

- soit chercher les vecteurs de E orthogonaux à tous les vecteurs de F, c'est-à-dire chercher les *x* de E tels que $\forall y \in F < x, y >= 0$;
- soit chercher les vecteurs *x* de E orthogonaux à tous les vecteurs d'une base de F. On écrit *x* en fonction de ses coordonnées dans une base de E et en calculant le produit scalaire avec les vecteurs de F, on obtient un système d'équations linéaires dont les solutions permettent de déterminer le supplémentaire orthogonal de F.

8. Forme quadratique

Si on veut déterminer le signe d'une forme quadratique *q* associée à un endomorphisme *f*, on peut :

- écrire $\forall x \in E \quad \langle f(x), x \rangle = q(x)$ et chercher le signe de $q(x)$;
- chercher le signe des valeurs propres de *f* et, si elles ont toutes le même signe, conclure.

Analyse

A. Suites et séries

1. Etude de suite

<u>Attention</u> : Ne confondez pas les suites définies par $u_n = f(n)$ et celles par $u_{n+1} = f(u_n)$

L'étude d'une suite comporte la recherche de l'existence de ses termes (au moins après un certain rang), de sa monotonie, de sa limite.

Il faut naturellement bien maîtriser tous les résultats sur les suites usuelles (arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques, récurrentes doubles).

2. Sens de variation d'une suite

Il y a principalement deux méthodes :

- On calcule $u_{n+1} - u_n$ et on en cherche le signe ;
- Si la suite est de signe constant et ne s'annule pas, on calcule $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et on le compare à 1.

3. Limites d'une suite

Avant de parler de la limite d'une suite, il faut impérativement <u>justifier</u> la <u>convergence</u> de cette suite. Sinon cela n'a aucun sens.

<u>1) Méthodes usuelles</u>

Avant de calculer la limite d'une suite, il faut en général démontrer son existence, c'est-à-dire étudier la convergence de la suite.

Il y a beaucoup de théorèmes à connaître ; signalons les plus importants :

- toute suite monotone bornée est convergente ;
- le théorème dit « d'encadrement » ;
- le théorème de prolongement des inégalités.

Bien remarquer qu'un majorant (ou un minorant) d'une suite doit être indépendant de n.

Avant d'utiliser le théorème de prolongement des inégalités, il faut toujours avoir montré que les suites auxquelles on appliquera ce résultat sont convergentes.

Bien noter que le théorème d'encadrement et le théorème de prolongement transforment des inégalités strictes en inégalités larges.

Les méthodes de calcul de limite usuelles sont :

- l'utilisation de la définition et de la continuité des fonctions usuelles;
- les opérations algébriques sur les limites ;
- les quantités conjuguées ;
- l'utilisation des équivalents et des négligeabilités ;
- l'utilisation des développements limités.

Si on connaît la valeur de l, pour montrer que la suite (u_n) converge vers l on peut parfois montrer que la suite (u_n-l) converge vers 0.

2) Résultats très utiles

a) Théorème du point fixe

Soit un intervalle I **fermé** Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue.

Soit $(u_n)_{n\in \mathbb{N}}$ une suite définie sur I par u_0 et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n et telle que la suite u converge vers une limite l alors la limite l vérifie l'équation $l = f(l)$

b) Si (u_n) est une suite convergente de limite l et si a et b sont deux réels tels que $a < l < b$, alors à partir d'un certain rang, on a, pour tout n, $a < u_n < b$

c) Si (u_n) converge vers $l \neq a$, alors à partir d'un certain rang, on a, pour tout n, $u_n \neq a$.

3) Suites extraites

Si une suite converge vers une limite l, alors toutes ses suites extraites convergent vers l. Par conséquent, pour montrer qu'une suite diverge, il suffit de montrer qu'une de ses suites extraites diverge.

Si les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers deux limites différentes alors (u_n) diverge.

Si les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite l alors (u_n) converge et sa limite sera égale à l. Ces résultats se généralisent à des ensembles de suites extraites.

Si une suite (u_n) est monotone et si une de ses suites extraites converge vers l alors (u_n) converge vers l.

4. Suites adjacentes

Pour montrer que deux suites sont adjacentes, il faut vérifier 3 conditions :

- l'une est croissante ;

- l'autre est décroissante ;
- la limite de la différence est nulle.

C'est seulement ensuite qu'on peut conclure que les deux suites sont convergentes et admettent la même limite.

5. Etude de suite définie par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$

Soit f une application de IR dans IR continue. Soit (u_n) une suite définie par u_0 et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n.

<u>Dans le cas où f est croissante, les différentes étapes de l'étude sont :</u>

1) On définit un intervalle I tel que : $\forall\, n \in$ IN, $u_n \in$ I.
2) On montre par récurrence que la suite est monotone (croissante si $u_1 \geq u_0$, décroissante si $u_1 \leq u_0$).
3) On suppose la suite (u_n) convergente. Alors la limite l de la suite doit vérifier : $l = f(l)$.
4) On résout l'équation $l = f(l)$.
5) 2 cas caractéristiques se présentent alors :

   <u>1er cas</u> : l_0 unique et I est borné.
   On montre que (u_n) converge et donc que sa limite est nécessairement l_0.
   <u>2e cas</u> : l'équation $l = f(l)$ n'admet aucune solution.
   Dans ce cas la suite u ne converge pas et comme elle est monotone elle tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.

Dans les autres cas, on ne peut pas dire grand-chose !

<u>Dans le cas où f est décroissante, les différentes étapes de l'étude sont :</u>

1) On introduit la fonction $g = f o f$.
2) On montre qu'elle est croissante sur I, puis on étudie les suites v et w définies par : $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$
3) On montre qu'elles vérifient $v_{n+1} = g(v_n)$ et $w_{n+1} = g(w_n)$
   On retombe donc sur le cas précédent.
4) On étudie donc la convergence de ces deux suites et finalement :
   La suite u converge si et seulement si les deux suites v et w convergent vers la même limite.

<u>Dans le cas où f est dérivable de dérivée bornée, les différentes étapes de l'étude sont :</u>

Soient f : I$\rightarrow$IR une application continue dérivable sur I et telle que :
$| f' | \leq k < 1$ sur I.

1) On montre que : $f(I) \subset I$.
2) On montre alors que la suite définie par : $u_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ vérifie : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$ et donc qu'elle est bien définie.
3) On montre que l'équation $f(l) = l$ admet une unique solution l_0 dans I.
4) En utilisant **l'inégalité des accroissements finis**, on montre que :
$|u_{n+1} - l_0| = |f(u_n) - f(l_0)| \leq k.|u_n - l_0|$
Puis par récurrence (ou par cascade multiplicative) : $|u_n - l_0| \leq k^n.|u_0 - l_0|$
5) On en déduit la convergence de u vers l_0 puisque $0 < k < 1$.

6. Suites implicites

Ce sont les suites définies comme solution d'une équation dépendant de n.

Par exemple, x_n est la solution de l'équation $f(x) = n$ (*premier cas)* ou encore, x_n est la solution de l'équation $f_n(x) = a$ (*deuxième cas*). Le deuxième cas est plus difficile à traiter en général.

Existence de la suite

On utilise généralement le théorème de la bijection ; on montre donc que f ou f_n est continue strictement monotone ce qui assure l'existence d'une unique solution à l'équation et qui définit donc entièrement la suite.

Limite d'une suite implicite

On montre en général que la suite est monotone bornée.

Premier cas, on essaie de trouver une réciproque de f sur un intervalle bien choisi.

Si f est croissante, f^{-1} l'est aussi et donc $x_n = f^{-1}(n)$ définit une suite croissante.

Deuxième cas, la fonction f_n change quand n change.

Il faut étudier en règle générale :

- la monotonie de f_n ;
- la position relative de f_n par rapport à f_{n+1} (c'est-à-dire $f_n > f_{n+1}$ ou $f_{n+1} > f_n$).

Cela suffit en général pour savoir si la suite est croissante ou décroissante (en étudiant $f_n(x_{n+1})$ ou $f_{n+1}(x_n)$) et si par hasard elle ne serait pas minorée ou majorée.

Pour étudier sa limite éventuelle, il peut être utile d'étudier, pour x fixé, la limite de $f_n(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

Enfin, ne jamais oublier que par définition : $f_n(x_n) = a$.

Enfin, si on vous demande des équivalents de x_n, n'oubliez pas que vous avez toujours intérêt à factoriser les termes de plus haut degré.

7. Suites définies conjointement

Les suites définies par des relations du type $\begin{cases} u_{n+1} = a_1 u_n + a_2 v_n + a_3 w_n \\ v_{n+1} = b_1 u_n + b_2 v_n + b_3 w_n \\ w_{n+1} = c_1 u_n + c_2 v_n + c_3 w_n \end{cases}$ s'étudient en considérant les relations matricielles $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ où $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$.

On calcule ensuite A^n, on peut alors en déduire une expression des suites (u_n),(v_n) et (w_n) en fonction des premiers termes. On pourra ensuite en déduire les limites éventuelles.

8. Suites récurrentes linéaires

Les suites récurrentes linéaires d'ordre 2 font l'objet d'une partie du cours qui doit être parfaitement connu.

Les suites récurrentes linéaires d'ordre p ne sont pas au programme mais leur étude est similaire :

- On calcule les solutions de l'équation caractéristique.
- Si il y a p solutions distinctes (x_i) alors la famille $\{(x_i^{\ n})\}$ est une base de l'espace vectoriel des suites vérifiant la relation et donc toute suite de cet espace s'écrit $u_n = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i^n$. On utilise les conditions initiales pour calculer les λ_i.

9. Séries

Il ne faut jamais écrire la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ mais écrire « la série de terme général u_n » car $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ représente la somme de la série si celle-ci converge.

Avant d'écrire une série dont on sait qu'elle converge sous la forme d'une somme de plusieurs séries, il faut toujours montrer la convergence de toutes les séries mises en jeu.

Il faut bien connaître les séries de référence : les séries géométriques et leurs dérivées (dont on connaît les conditions de convergence et les sommes éventuelles), la série exponentielle (dont on connaît la somme), les séries de Riemann (dont on connaît les conditions de convergence mais pas la somme).

Lien suite et série

Si la série de terme général u_n converge alors la suite (u_n) converge vers 0.

Si la suite (u_n) est positive, décroissante et telle que la série de terme général u_n converge alors $\lim\limits_{n\to\infty} nu_n = 0$.

10. Méthode d'étude de la nature d'une série de terme général u_n

Vérifier que la suite (u_n) converge vers 0, dans le cas contraire conclure à la divergence de la série.

Si on cherche la convergence et la somme d'une série

Le plus souvent, on essaie de se ramener à des séries de référence dont on connaît la somme.
Parfois, on étudie la suite des sommes partielles dont on calcule la limite à l'aide des résultats sur les limites des suites.
Pour chercher la somme de la série de terme général *f (n)*, dans le cas où *f* est strictement décroissante, on utilise assez souvent la méthode de comparaison des séries et des intégrales.
Si on connaît la somme de la série, on peut aussi utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange pour prouver la convergence de la série vers cette somme.

Si on cherche la nature de la série sans en chercher la somme

Si la suite (u_n) est positive (ou au moins positive à partir d'un certain rang), on utilise les règles de comparaison des séries à termes positifs

- Comparaison locale (négligeabilité ou équivalence au voisinage de $+\infty$) en général avec les séries de Riemann
- Comparaison globale ($\exists N \quad \forall n > N \quad v_n < u_n$) si la série de terme général u_n converge, alors la série de terme général v_n converge ;
  si la série de terme général v_n diverge, alors la série de terme général u_n diverge.

Si la suite (u_n) est négative (ou au moins négative à partir d'un certain rang), on considère la suite $(-u_n)$ et on se ramène au cas précédent.

Si la suite (u_n) ne garde pas un signe constant, on ne peut qu'étudier la suite $(|u_n|)_n$ et utiliser le théorème d'absolue convergence. Attention, si la suite $(|u_n|)_n$ diverge, on ne peut rien conclure.

La nature d'une série n'est pas modifiée si on change un nombre fini de ses termes, on peut donc faire l'étude de la série « à partir d'un certain rang ».

11. Quelques résultats utiles

Ces résultats sont hors programme mais assez souvent utilisés après démonstration. Il est donc judicieux d'en connaître les démonstrations.

1. Le reste d'une série convergente tend vers 0.
2. Si la série de terme général positif u_n converge, alors $\sum_{k\geq n} u_k \geq 0$
3. Si les séries de terme général u_n et v_n convergent et $\forall k \quad u_k \leq v_k$, alors $\sum_{k\geq n} u_k \leq \sum_{k\geq n} v_k$
4. Si la suite (u_n) est bornée et si la suite (v_n) est positive et décroissante telle que $\lim_{n\to\infty} v_n = 0$, alors la série de terme général $u_n\ v_n$ converge.
5. Si la suite (v_n) est positive et décroissante telle que $\lim_{n\to\infty} v_n = 0$, alors la série de terme général $(-1)^n\ v_n$ converge.
6. Si les séries de terme général positif u_n et v_n convergent et ont pour somme U et V, alors la série de terme général $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_n v_{n-k}$ est convergente et de somme UV.

12. Fonctions définies par une série

Dans le cadre du programme, on ne peut pas dériver de somme infinie de termes.

Si on veut dériver une fonction F définie par $\forall x \in I \quad F(x) = \sum_{n\geq o} f_n(x)$, on cherche à majorer l'expression $\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - \sum_{n\geq 0} g_n(x)\right|$ par une fonction ε qui tend vers 0, quand h tend vers 0 à l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange.

De la même façon, on ne peut calculer directement les limites de telles fonctions en un point a. Dans ce cas, on établit une majoration de $\left|F(x)-l\right|$ en 2 sommes dont l'une, finie, dépend de x et l'autre, infinie, ne dépend plus de x après majoration. Il reste alors à montrer que ces 2 sommes tendent vers 0, l'une quand x tend vers a et l'autre quand n tend vers $+\infty$.

B. Fonctions

1. Etude de fonction

Une étude de fonction comporte la recherche du domaine de définition, la recherche éventuelle de parité, l'étude de la continuité, de la dérivabilité, le calcul de la dérivée, la recherche du signe de la dérivée pour donner le sens de variation, le calcul des limites. Cette étude se conclut en un tableau de variation.

2. Continuité/dérivabilité

Pour montrer qu'une fonction f est continue (resp dérivable) sur un intervalle I contenant un point a, on montre qu'elle est continue (resp dérivable) sur $I \setminus \{a\}$ et que la limite en a de f est $f(a)$ (resp la limite du rapport de Newton en a existe).

Toute fonction continue sur un intervalle fermé est bornée et atteint ses bornes.

Si f est dérivable sur IR alors :

- si f est paire (resp impaire) alors f' est impaire (resp paire) ;
- si f est périodique alors f' est périodique de même période.

Toute fonction dérivable est continue.

3. Fonction de classe C^1, de classe C^n, de classe C^∞

Pour démontrer qu'une fonction est de classe C^1 (resp C^n) sur I, on montre dans l'ordre que :

- f est continue sur I ;
- f est de classe C^1 (resp C^n) sur tout intervalle de $I \setminus \{a\}$;
- f' (resp $f^{(n)}$) admet une limite finie en a.

On peut alors conclure que f (resp $f^{(n)}$) est dérivable en a et, $\lim_{x \to a} f'(x) = f'(a)$ c'est-à-dire f est de classe C^1 (resp $C^{(n)}$) sur I.

Pour montrer qu'une fonction f est de classe C^∞ sur I, il suffit de montrer que pour tout n entier f est de classe C^n sur I.

4. Sens de variation

Le sens de variation d'une fonction se détermine à partir du signe de la dérivée. Si on ne peut pas trouver directement le signe de la dérivée, on peut étudier une fonction annexe dont le signe sera celui de la dérivée.

5. Inégalités

Pour démontrer une inégalité du type $\forall x \in I \quad f(x) < g(x)$, les méthodes sont :

1. utiliser les sens de variations des fonctions usuelles ;
2. calculer $h(x) = f(x) - g(x)$ et à l'aide de l'étude de la fonction h en trouver le signe ;
3. penser à l'égalité de Taylor-Lagrange ou aux développements limités et majorer le reste ;
4. ne pas oublier que si la fonction f est convexe sur I elle est au dessus de ses tangentes et en dessous de ses cordes et inversement si elle est concave.

Pour démontrer une inégalité du type $\forall x \in I \quad a < f(x) < b$, les méthodes sont :

1. étude du sens de variation de la fonction f;
2. si la fonction f tend vers l avec $a < l < b$ en α, alors il existe un voisinage I de α sur lequel $a < f(x) < b$;
3. utiliser l'inégalité des accroissements finis dont on vérifie soigneusement les hypothèses.

C. Equivalents et développements limités

1. Recherche d'équivalent

Dans la recherche d'équivalent, il faut toujours considérer le « poids lourd », ne jamais donner un équivalent autre que les équivalents usuels sans l'avoir démontré à l'aide d'un calcul de limite ; et, de plus, se souvenir qu'un équivalent ne comporte qu'un seul terme.

Un polynôme est équivalent à son terme de plus haut degré en ∞ et est équivalent à son terme de plus bas degré en 0.

Quand on a une inégalité du type $\forall x \in I \quad g(x) < f(x) < h(x)$ et qu'on veut démontrer que $f(x) \sim a(x)$, il suffit de montrer que $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{g(x)}{a(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{h(x)}{a(x)} = 1$

2. Somme d'équivalents

<u>Attention</u>

$f(x) \sim f_1(x)$ et $g(x) \sim g_1(x)$ **n'implique absolument pas** $f(x) + g(x) \sim f_1(x) + g_1(x)$

Soient f, g et h trois fonctions, et a et b deux réels **non nuls** tels que :

$f \sim a.h$ et $g \sim b.h$ Si $\boldsymbol{a + b \neq 0}$, alors : $f + g \sim (a + b).h$

Bien remarquer qu'on retrouve la même fonction à droite. Pour pouvoir additionner des équivalents, il faut impérativement qu'ils soient de la « même forme ».

3. Limite et équivalent

a) Soient f et g deux fonctions telles que $f \sim g$ en a. f admet une limite (finie ou infinie) en a si et seulement si g admet une limite en a. Et dans ce cas $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x)$

Attention : la réciproque n'est pas en général vraie.

b) Soit $\ell \in$ IR et $\ell \neq \mathbf{0}$ (ℓ est donc finie non nulle)
Alors, en a, $f(x) \sim \ell \Leftrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = \ell$

c) Soient f et g deux fonctions telles que $f \sim g$ en a.
Si f admet une limite **finie** en a alors $\lim_{x \to a}(f(x) - g(x)) = 0$

Attention : le résultat est faux si la limite est infinie.

d) Soient f et g deux fonctions telles que $\lim_{x \to a}(f(x) - g(x)) = 0$
Si f et g admettent une limite **non nulle** éventuellement infinie en a alors $f \sim g$ en a.

Attention : le résultat est faux si la limite est nulle.

4. Développements limités/continuité/dérivabilité

Si f possède un développement limité au voisinage de a, f est nécessairement définie au voisinage de a.

Si f admet un développement limité en a à l'ordre n, ce développement est unique.

Une fonction f définie en un point a admet en a un développement limité à l'ordre 0 si et seulement si elle est continue en a.

Une fonction f non définie en un point a admet en a un développement limité à l'ordre 0 si et seulement si elle est prolongeable par continuité en a.

Une fonction f continue en un point a admet en a un développement limité à l'ordre 1 si et seulement si elle est dérivable en a.

Si une fonction f définie en un point a admet en a un développement limité à l'ordre n alors elle admet un DL en a à tout ordre k inférieur à n.

La partie polynômiale du développement limité d'une fonction paire (resp impaire) est une somme de monômes de degrés pairs (resp impairs).

Attention : la réciproque est fausse.

Remarque Il existe des fonctions ayant un développement limité à l'ordre n en a mais qui ne sont pas n fois dérivables en a.

5. Obtention de développements limités

Si on cherche un développement au voisinage de 0, on utilise les formules du cours et les opérations sur les développements limités.

Les opérations, telles que somme, produit par un réel, produit, fournissent un développement limité dont l'ordre est le plus petit des ordres des fonctions considérées.

Pour obtenir le développement limité d'un quotient, on met $\frac{f(x)}{g(x)}$ sous la forme d'un produit : $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x).\frac{1}{g(x)}$ et on inverse g à l'aide de la formule du cours.

On peut, à condition de faire attention aux ordres des développements, faire des compositions de développements limités.

Si on cherche un développement ailleurs qu'en 0 (en un point a), on se ramène à un développement au voisinage de 0 en posant $x = a + h$. On a alors h tend vers 0 quand x tend vers a et on cherche un développement au voisinage de 0. On peut donc utiliser les formules du cours.

Bien noter qu'un développement limité comporte une partie polynômiale et un reste qui tend vers 0. Quand on ne peut pas utiliser les formules du cours, on peut penser à la formule de Taylor et montrer que le reste tend vers 0.

Il faut toujours choisir soigneusement l'ordre auquel on effectue le développement car on doit le « pousser » jusqu'à obtenir un terme non nul dans la partie principale.

6. Utilisation des développements limités

Les développements limités s'utilisent lors de recherche d'équivalents, de prolongement par continuité, d'étude locale de dérivabilité, de position par rapport à la tangente, ainsi que les études d'asymptotes et position par rapport à l'asymptote (à condition d'effectuer un changement de variable $h = 1/x$).

D. Intégration

1. Intégration : propriétés utiles

1) Si f est continue et positive sur $[a,b]$ et si $\int_a^b f = 0$ alors $\forall t \in [a,b]\ f(t) = 0$

2) Soient I un intervalle, f et g deux fonctions continues sur I et $(a, b) \in I^2$ telles que : $a \leq b$ (on dira que **les bornes sont dans le bon sens**). Alors :

a) $f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f \geq 0$

b) $f \leq g \Rightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g$

c) $m \leq f \leq M \Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$

d) $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b | f |$

e) $\forall\, t \in [\, a\, ;\, b\,],\ |\, f(t)\, | \leq M \Rightarrow \left| \int_a^b f \right| \leq M(b-a)$

2. Méthode d'encadrement d'une intégrale

Pour encadrer une intégrale $\int_a^b f(t)dt$, on établit un encadrement de f sur $[a,b]$ et on intègre la relation obtenue sur $[a,b]$ mais il ne faut pas oublier de vérifier que les fonctions entrant en jeu sont continues. Si l'encadrement est obtenu sur $]a,b[$, et que les fonctions sont continues sur $]a,b[$, il faut de plus vérifier que ces fonctions admettent une limite finie en a et b.

Si la fonction f est monotone sur $[a,b]$, on peut l'encadrer par ses valeurs en a et b.

3. Méthodes d'intégration

1) Intégration par parties

Il faut toujours préciser les fonctions utilisées et vérifier qu'elles sont de classe C^1.

Ne pas oublier que les intégrations par parties ne doivent pas être effectuées sur des intégrales impropres.

2) Changement de variable

Avant d'effectuer un changement de variable, on doit vérifier que la fonction u qui définit le changement de variable est définie sur l'intervalle d'intégration $[a,b]$, et est de classe C^1 et strictement monotone sur cet intervalle c'est-à-dire que u est bijective sur $u^{-1}([a,b])$.

Ne pas oublier que les changements de variables ne doivent pas être effectués sur des intégrales impropres.

4. Fonctions définies par une intégrale

1) On considère une fonction F définie par $F(x)=\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$ si f est définie et continue sur $[u(x),v(x)]$ et si u et v sont dérivables alors F est dérivable et $F'(x) = v'(x) f(v(x))-u'(x) f(u(x))$

2) On considère une fonction F définie par $F(x)=\int_a^b f(x,t)dt$ avec a et b éventuellement infinis.

Pour déterminer le sens de variation de F on compare, pour tout t de $[a,b]$, et pour tout (x,y) tels que $x < y$ les réels $f(x,t)$ et $f(y,t)$; on en déduit alors le sens de variation de F.

Pour dériver F, on cherche à majorer l'expression $\left|\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}-\int_a^b g(x,t)dt\right|$

par une fonction ε qui tend vers 0 quand h tend vers 0.

5. Convergence d'intégrales impropres

1) Si on cherche la convergence et la valeur de l'intégrale, on revient à la définition et on montre, par calcul de primitive, par intégration par parties ou parchangement de variable, que la fonction $x \to \int_a^x f(t)dt$ admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$ dans le cas où l'intégrale est impropre en $+\infty$ et quand x tend vers b dans le cas où l'intégrale est impropre en b. On peut alors conclure à la convergence et la valeur de la limite est la valeur de l'intégrale.

2) Si on cherche uniquement à montrer la convergence de l'intégrale, plusieurs cas se présentent :

- soit f est positive sur $[a,+\infty[$ (resp sur $]a,b]$) et on peut appliquer les critères de convergence des intégrales de fonctions positives : critère de comparaison globale ou, le plus souvent, critère de comparaison locale au voisinage de $+\infty$ (resp de a) (négligeabilité ou équivalent) avec des fonctions de référence dont on connaît la nature. On ne doit pas oublier de préciser que la fonction f est continue (ou au moins continue par morceaux) donc intégrable sur $[a,+\infty[$ (resp sur $]a,b]$), que f est positive sur $[a,+\infty[$ (resp sur $]a,b]$), <u>avant</u> d'utiliser les critères de convergence.
- soit f est négative et on considère la fonction $-f$, on applique alors la méthode précédente.
- soit f ne garde pas un signe constant et on utilise le critère d'absolue convergence ; attention si $\int_a^b |f(t)|dt$ diverge, on ne peut rien conclure.

3) Si f est une fonction définie, continue sur $]a,b]$, $(a < b)$ et si f est prolongeable par continuité au point a, l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ est faussement impropre en a et est nécessairement convergente.

4) Si une intégrale est impropre en ses deux bornes, il faut faire une étude séparément en chacune des bornes. L'intégrale converge si et seulement si elle converge en ses deux bornes.

5) La convergence de $\int_a^{+\infty}(\alpha.f+\beta.g)(t)dt$ n'implique pas la convergence de $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ et $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ il faut donc vérifier la convergence des intégrales entrant en jeu avant d'utiliser la propriété de linéarité.

6. Limites et intégrales

Dans le cadre du programme, on n'a jamais le droit d'intervertir une limite et un signe d'intégrale, c'est-à-dire sont prohibées les expressions du type

$\lim\limits_{x\to\alpha}\int_a^b f(x,t)dt = \int_a^b \lim\limits_{x\to\alpha} f(x,t)dt$ ou encore $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b (\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(t))dt$.

Dans ce cas, on revient à la définition de la limite en majorant la fonction $|g(x)-l|$ où g est la fonction dont on cherche la limite et l la limite envisagée.

7. Sommes de Riemann

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Soit n un entier. On appelle somme de Riemann les sommes définies par $S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a+k\frac{b-a}{n})$ ou

$S'_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a+k\frac{b-a}{n})$ou encore $S''_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n} f(a+k\frac{b-a}{n})$. Elles ont pour limite $\int_a^b f(x)dx$ quand n tend vers $+\infty$.

Ces sommes constituent une valeur approchée de l'intégrale.

Lorsqu'on cherche la limite d'une suite (S_n) où pour tout n, S_n est défini comme somme de termes en k et n, on doit penser aux sommes de Riemann et chercher une fonction continue sur $[a,b]$ (ou parfois sur $[0,1]$) telle que $S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a+k\frac{b-a}{n})$. On pourra alors appliquer le résultat précédent soit $\lim_{n\to\infty} S_n = \int_a^b f(t)dt$

8. Intégrales impropres et séries

Soit f une fonction continue (par morceaux), positive et décroissante sur $[0,+\infty[$,

soit la série $S_n = \sum_{k=0}^{n} f(k)$ alors la série S_n et l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ sont de même nature.

Cette propriété est très importante et elle intervient dans nombre de problèmes : il est donc essentiel de bien la comprendre et de savoir refaire sa démonstration.

E. Fonctions de plusieurs variables

1. Normes, parties ouvertes, fermées ou bornées

Les normes usuelles sur IR^n sont :

$\forall x \in IR^n \ x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \ \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ et $\|x\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |x_i|$

Ces normes sont équivalentes, c'est-à-dire que toute propriété démontrée avec l'une est valable avec l'autre ; dans certains cas, il est plus facile de travailler avec l'une des deux. On aura donc intérêt à bien choisir la norme avec laquelle on veut travailler.

On se souvient que $\forall x \in IR^n \quad \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$, par conséquent, toute boule ouverte pour la norme «2» est contenue dans une boule ouverte pour la norme «∞» et contient une boule ouverte pour la norme «∞» et inversement.

Pour montrer qu'une partie A est bornée on peut :

- soit utiliser la définition : $\exists M \in IR^{*+} \ \forall x \in A \ \|x\| \leq M$
- soit montrer que toutes les variables qui la définissent sont bornées.

Pour montrer qu'une partie A n'est pas bornée on peut :

- soit utiliser la définition : $\forall M \in IR^{*+} \ \exists x \in A \ \|x\| > M$
- soit montrer qu'une des variables qui la définit n'est pas bornée.

2. Limite et continuité

Lorsqu'on veut démontrer qu'une fonction de plusieurs variables *f* est continue sur un ouvert A de IR^n, on montre que *f* est somme, produit, composée de fonctions continues ; si il y a un problème en a où $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$, on montre que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Pour calculer la limite de *f* en a où $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$, il faut faire tendre <u>simultanément</u> toutes ses variables vers a (car sinon, on ne prouve que la continuité d'une application partielle).

<u>Attention</u> : même si toutes ses applications partielles sont continues en a, la fonction *f* n'est pas nécessairement continue en a.

Pour montrer qu'une application *f* a pour limite l en a où $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$, on majore $|f(x) - l|$ par une fonction ε qui tend vers 0 en a.

Si *F* est un fermé de IR^n et si *f* est une application continue de *F* dans *IR,* alors *f* est bornée et atteint ses bornes.

3. Dérivées partielles et fonction de classe C^1

Pour montrer l'existence de la $i^{ème}$ dérivée partielle d'une fonction de plusieurs variables *f* en un point a d'un ouvert Ω de IR^n où $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$, on peut :

- soit montrer que *f* est définie en a donc admet une $i^{ème}$ dérivée partielle et montrer que celle-ci est dérivable en a.
- soit montrer que *f* est de classe C^1 sur $\Omega \backslash \{a\}$ et donc admet des dérivées partielles d'ordre 1 en tout point de $\Omega \backslash \{a\}$, puis que *f* est définie en a et donc admet une $i^{ème}$ dérivée partielle en a et enfin que celle-ci est dérivable en a.

Attention : une fonction peut admettre des dérivées partielles d'ordre 1 en un point a sans être continue en a.

Les fonctions polynômes (resp rationnelles) sont de classe C^1 sur IR^n (resp sur leurs domaines de définition). Les somme, produit, quotient de fonctions de classe C^1 sur Ω sont de classe C^1 sur Ω.

Pour montrer que f est de classe C^1 sur Ω, on montre que f est de classe C^1 sur $\Omega \backslash \{a\}$, donc admet des dérivées partielles continues sur $\Omega \backslash \{a\}$, puis que f admet des dérivées partielles en a et enfin que les dérivées partielles de f sont continues en a.

4. Développements limités d'ordre 1 et extrema

Pour établir un développement limité, on doit choisir une norme mais puisqu'elles sont équivalentes le développement obtenu ne dépend pas de la norme choisie.

Si f admet un développement limité d'ordre 1 en u_0 alors f est continue en u_0.

Soit f une fonction définie sur un ouvert Ω de IR^n. Si f est de classe C^1 sur Ω, alors f admet en tout point de Ω un développement limité à l'ordre 1.

Les seuls points en lesquels une fonction f est susceptible d'admettre un extremum local sont les points critiques, c'est-à-dire les points qui annulent toutes les dérivées partielles d'ordre 1 de f.

Pour montrer qu'une fonction f de classe C^1 admet (et atteint) un extremum local en a où $a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, on détermine une boule ouverte O sur laquelle on a $\forall x \in O \; f(x)-f(a)$ garde un signe constant.

Pour montrer que f n'admet pas d'extremum local en un point critique, il faut montrer que pour tout ouvert O $f(x)-f(a)$ ne garde pas un signe constant sur O. Il suffit donc de trouver deux points x et y de O en lesquels $f(x)-f(a)$ et $f(y)-f(a)$ sont de signes opposés.

5. Fonction de classe C^2

Pour montrer que f est de classe C^2 sur Ω on montre que f est de classe C^1 sur Ω puis que chacune des dérivées partielles est de classe C^1 sur Ω.

f est de classe $\mathbf{C^2}$ sur Ω si ses quatre dérivées partielles d'ordre 2 sont continues sur Ω.

Si les deux dérivées secondes partielles $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ sont continues sur Ω, alors $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ sur Ω par conséquent si $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, alors f n'est pas de classe **C²** sur Ω.

<u>Attention</u> à l'ordre de dérivation lorsqu'on calcule $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

6. Extrema de fonctions de deux variables

Pour déterminer les extrema d'une fonction f de classe C^2 : on cherche les points critiques a, c'est-à-dire les points en lesquels les deux dérivées partielles premières s'annulent, puis on calcule la valeur de $s^2 - rt$ en ces points.

Si $s^2 - rt < 0$ alors f admet un extremum local en a.

Si $s^2 - rt > 0$ alors f n'admet pas d'extremum local en a.

Si $s^2 - rt = 0$ on ne peut conclure.

7. Extrema de fonctions de plusieurs variables

<u>Méthode de réduction en carrés</u>

On détermine le point critique a, puis la valeur des dérivées partielles secondes en ce point. On considère ensuite la fonction Q_a définie par $Q_a(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) x_i^2 + 2\sum_{i<j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) x_i x_j$, on cherche ensuite le signe de Q_a en l'exprimant sous forme de somme et différence de carrés.

Si tous les coefficients des carrés sont positifs (resp négatifs) alors Q est positif (resp négatif) et on cherche les points en lesquels Q s'annule. Si Q ne s'annule qu'en 0 alors f admet un minimum (resp maximum) en a. Sinon on étudie le signe de $f(x)$-$f(a)$ au voisinage de a.

Si tous les coefficients ne sont pas de même signe, alors Q n'est pas de signe constant et f n'admet pas d'extremum en a.

<u>Méthode matricielle</u>

On détermine le point critique a, puis la valeur des dérivées partielles secondes en ce point. On calcule ensuite les valeurs propres de la matrice symétrique : $M = (a_{i.j}) \quad où \quad a_{i.j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$. Si toutes les valeurs propres de M sont strictement positives (resp négatives), f admet un minimum (resp maximum) en a, sinon f n'admet pas d'extremum en a.

8. Extrema sous contrainte

Pour montrer que A (a) est un point critique de f sous une contrainte C, on écrit et résout le système en λ donné par $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \nabla g_i$. La condition trouvée est nécessaire non suffisante, il faut ensuite montrer que le point trouvé est effectivement un extremum :

- soit en étudiant le signe de $f(x)$-$f(a)$;
- soit en utilisant un argument supplémentaire du type étude sur un fermé borné.

Pour montrer qu'une fonction f admet un minimum, on peut construire un sous-espace F de IR^n de façon à interpréter $f(x)$ comme $\|x-y\|$ ou encore comme $\|x-y\|^2$ où $y \in F$ et utiliser la projection orthogonale p_F sur F, on aura alors $p_F(x)$ est l'unique vecteur de F qui rend minimale la quantité $\|x-y\|$.

Pour montrer qu'une fonction f admet un minimum, on peut interpréter $f(x)$ comme $\|AX-B\|$ ou encore $\|AX-B\|^2$, la solution de l'équation matricielle ${}^tAAX={}^tAB$ est l'unique matrice rendant minimum $\|AX-B\|$.

Dans le cas particulier de contraintes linéaires ou quadratiques, on peut exprimer une des variables en fonction des autres. On obtient alors une fonction de n-1 variables dont on cherche les extrema.

Probabilités

A. Dénombrement

1. Méthode de calcul en dénombrement

Nombre de façons de choisir p éléments parmi n :

a) tirages successifs sans remise (éléments ordonnés et distincts) A_n^p

b) tirages simultanés avec un seul exemplaire (éléments non ordonnés et distincts) $\binom{n}{p}$

c) tirages successifs avec remise (éléments ordonnés non nécessairement distincts) n^p

d) tirages simultanés avec plusieurs exemplaires (éléments non ordonnés et non nécessairement distincts) $\binom{n+p-1}{p}$

2. Méthode pour dénombrer un ensemble fini E

Il est très souvent utile de se représenter E et la façon dont on peut obtenir ses éléments ; on détaille alors toutes les étapes qui permettent d'aboutir à E. En général, lorsqu'on utilise le mot « ou », on additionne les résultats et lorsqu'on utilise le mot « et », on les multiplie.

Bien faire attention à ne pas compter plusieurs fois un même élément. Dans le cas où les éléments de E sont comptés p fois, on divise le résultat obtenu par p.

On peut utiliser la méthode précédente, c'est-à-dire reconnaître les arrangements, les combinaisons ou les permutations.

On peut utiliser une partition de E et éventuellement utiliser la formule du crible.

3. Méthodes de calcul avec les $\binom{n}{p}$

Lorsqu'on a une égalité à démontrer comportant des $\binom{n}{p}$, on doit penser, soit à une démonstration par récurrence, soit à une démonstration directe et utiliser les relations suivantes :

1) si la somme ne comporte qu'un seul $\binom{n}{p}$

- si la variable de sommation est « en bas », penser à la formule du binôme de Newton
- si la variable de sommation est « en haut », penser à la formule de Pascal
- penser éventuellement à des décompositions du type

$$k(k-1)\cdots(k-i+1)\binom{n}{k} = n(n-1)\cdots(n-i+1)\binom{n-i}{k-i}$$

ou bien $$(k+1)(k+2)\cdots(k+i)\binom{n}{k} = (n+1)(n+2)\cdots(n+i)\binom{n+i}{k+i}$$

2) si la somme comporte deux $\binom{n}{p}$

- si la variable de sommation est « en bas », penser à la formule de Vandermonde
- si la variable de sommation est « en haut », penser à

$\forall k \in [0, p] \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = \binom{n}{p}\binom{p}{k}$ relation qu'il faudra justifier puisqu'elle ne fait pas partie des formules du cours.

B. Probabilités discrètes

1. Calcul de probabilités

La première étape est de décrire l'univers Ω en précisant bien ses éléments, puis on calcule la probabilité associée à chaque événement élémentaire ou à l'événement demandé.

Dans le cas d'équiprobabilité, on a $P(A) = \dfrac{Card\, A}{Card\, \Omega} = \dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$

Si il n'y a pas équiprobabilité, on calcule les probabilités élémentaires $P(\omega)$ et on a $P(A)=\sum_{\omega\in A}P(\omega)$

On peut aussi décomposer l'événement A à l'aide des opérateurs sur les ensembles (union, intersection, complémentaire…) et utiliser les formules du cours qui correspondent.

Dans le cas où on utilise les probabilités conditionnelles, il faut bien veiller à ne pas confondre les événements (A/B) et $(A\cap B)$.

2. Loi de probabilité d'une variable discrète X

On doit dans tous les cas donner l'univers $X(\Omega)$ puis expliciter $P(X=k)$ pour tout k de $X(\Omega)$.

L'univers considéré ne doit jamais varier au cours de l'expérience aléatoire (cas classique des tirages sans remise), on raisonne dans ce cas sur l'expérience complète même si, par exemple, on ne s'intéresse qu'au premier tirage.

Pour obtenir $X(\Omega)$, on se place dans le cas le plus favorable de l'expérience aléatoire (on a alors la plus petite valeur de $X(\Omega)$), puis dans le cas le moins favorable (on obtient la plus grande valeur de $X(\Omega)$).

Si on reconnaît une loi usuelle, il ne faut pas oublier de justifier ce modèle.

Parfois, il est plus simple calculer $P(X\leq k)$ ou $P(X\geq k$. Dans ce cas, on utilise

$$P(X=k)=P(X\leq k)-P(X\leq k-1) \quad \text{ou} \quad P(X=k)=P(X\geq k)-P(X\geq k+1)$$

pour k entier positif.

Si on peut exprimer la variable aléatoire X en fonction d'une autre variable aléatoire Y dont on connaît ou obtient aisément la loi, on déduit la loi de X de celle de Y.

On peut aussi rechercher la loi de X comme loi marginale d'un couple (X,Y); pour cela on utilise la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(Y=k)_{k\in Y(\Omega)}$

3. Lois usuelles

- Nombre de succès de probabilité p en n essais indépendants: loi binômiale B (n,p)
- Temps d'attente du premier succès de probabilité p : loi Géométrique G (p)
- Temps d'attente du $r^{ème}$ succès de probabilité p : loi de Pascal P (r,p)
- Nombre d'échecs précédant le $r^{ème}$ succès de probabilité p : loi binômiale négative

4. Loi de couple ou loi conjointe

De la même façon on cherche les univers X(Ω) et Y(Ω) de chacune des variables aléatoires X et Y, puis pour chaque couple *(i,j)* de X (Ω)xY (Ω), on calcule $P((X=i)\cap(Y=j))$.

5. Loi de min ; loi de sup

Dans le cas d'une loi Y de min ou d'une loi Z de sup et à condition que les variables entrant en jeu soient indépendantes, on écrit $P(Y \geq k) = \prod_i P(X_i \geq k)$ ou $P(Z \leq k) = \prod_i P(X_i \leq k)$.

Puis on calcule $P(Y=k)$ ou $P(Z=k)$ à l'aide de la méthode indiquée précédemment.

6. Calcul de la probabilité liée à 2 variables

On détermine les valeurs de X et Y qui réalisent cet événement et on calcule les probabilités correspondantes. Il est souvent utile de considérer un système complet d'événements formé soit de $(Y=k)_{k\in Y(\Omega)}$ soit de $(X=k)_{k\in X(\Omega)}$

7. Indépendance de deux variables

Pour montrer l'indépendance, il faut montrer que <u>pour tous les couples *(i,j)*</u>, on a $P\big((X=i)\cap(Y=j)\big)=P(X=i)P(Y=j)$. On utilise donc la loi conjointe de (X,Y) et les lois marginales de X et Y.

Si X et Y suivent les lois de Bernoulli il suffit de montrer
$p(X = 1 \cap Y = 1) = p(X = 1)\ p(Y = 1)$

Si X et Y représentent des suites disjointes d'événements indépendants, alors X et Y sont indépendantes.

Pour montrer que les variables ne sont pas indépendantes, il suffit de trouver un couple *(i,j)* pour lequel $P\big((X=i)\cap(Y=j)\big)\neq P(X=i)P(Y=j)$. En général, on regarde les valeurs de la variable pour lesquelles une des probabilités est nulle.

Pour montrer que les variables ne sont pas indépendantes, on peut aussi montrer que $\operatorname{cov}(X,Y)\neq 0$. Attention, la réciproque n'est pas vraie ; on ne peut pas conclure à l'indépendance lorsqu'on a obtenu $\operatorname{cov}(X,Y)=0$.

8. Espérance d'une variable discrète

Dans le cas d'une loi usuelle, on utilise le résultat du cours.

Autrement, si X (Ω) est fini, on calcule la somme $\sum_{k \in X(\Omega)} kP(X=k)$ mais si X (Ω) est infini, il faut justifier la convergence de la série avant de calculer la somme. Si X est une variable à valeur dans IN et qui admet une espérance, on a $E(X) = \sum_{k \geq 0} P(X > k)$.

Réciproquement, si X est une variable à valeurs dans IN et que la série de terme général *P* (X > *k*) converge, alors X admet une espérance et on a $E(X) = \sum_{k \geq 0} P(X > k)$

S'il est possible d'exprimer la variable X en fonction d'une variable Y qui suit une loi connue, on utilise alors la linéarité de l'espérance et les résultats de cours pour obtenir *E (X).*

9. Variance d'une variable discrète

Dans le cas d'une loi usuelle, on utilise le résultat du cours.

Si X (Ω) est fini, on calcule la somme $E(X^2) = \sum_{k \in X(\Omega)} k^2 P(X=k)$ et on utilise le Théorème de Köenig.

Si X (Ω) est infini, il faut justifier la convergence de la série $\sum_{k \in X(\Omega)} k^2 P(X=k)$ avant de calculer cette somme. On se souvient que X ne peut avoir de variance que si X admet une espérance et que la variance existe si et seulement si le moment d'ordre 2 existe ; de même, on utilise le théorème de Köenig.

Pour le calcul de $E(X^2)$, on pourra penser à écrire $k^2 = k(k-1) + k$.

Dans certains cas, au lieu de calculer $E(X^2)$, on peut calculer $E(X(X+1))$ ou $E(X(X-1))$ et on en déduit la variance en utilisant la linéarité de l'espérance.

S'il est possible d'exprimer la variable X en fonction d'une variable Y qui suit une loi connue, on utilise alors les propriétés de la variance et les résultats de cours pour obtenir *V (X).*

10. Interprétation de la variance

La variance et l'écart-type mesurent la plus ou moins grande dispersion des observations de part et d'autre de la moyenne. Leur signification concrète dépend de la nature des données enregistrées.

La dispersion peut être exprimée par le coefficient de variation qui est le rapport de l'écart-type et de la moyenne. C'est un nombre sans dimension ; il s'exprime sous forme de pourcentage et permet de comparer des observations différentes.

11. Covariance

Pour calculer la covariance, on peut :

- utiliser la définition Cov (X,Y) = E [(X-E (X))(Y-E (Y))]
  la propriété Cov (X,Y) = E (XY)-E (X) E (Y)
- utiliser la relation V (X + Y) = V (X) + V (Y) + 2Cov (X,Y)
  ou encore V (X-Y) = V (X) + V (Y)-2Cov (X,Y)
- si X et Y sont indépendants alors Cov (X,Y) = 0
- Attention, la réciproque est fausse si Cov (X,Y) = 0, X et Y ne sont pas nécessairement indépendantes
- si X + Y = n en calculant E ($(X + Y)^2$) et en développant on peut calculer E (XY) et obtenir la covariance

Se souvenir que pour toute variable X, on a cov (X,X) = V (X).

Il faut aussi penser à utiliser les propriétés de bilinéarité de la covariance.

12. Coefficient de corrélation linéaire

$|\rho(X,Y)| = 1$ si et seulement si il existe 2 nombres réels a et b tels que P (Y = aX + b) = 1

Si $0{,}7 < |\rho| < 1$, on peut trouver 2 réels a et b tels que la variable aléatoire (aX + b) soit une bonne approximation de Y. La droite Y = aX + b donne alors une estimation de Y en fonction de X. Le coefficient de corrélation linéaire peut donc s'interpréter comme « le degré de proportionnalité » entre les deux grandeurs X et Y rapporté à l'échelle de la quantité à mesurer.

Si X et Y sont indépendantes, ρ= 0 les variables sont non corrélées et la matrice de covariance est diagonale. La réciproque est fausse en général.

C. Variables à densité

1. Fonction de répartition d'une variable aléatoire continue

Pour montrer qu'une fonction F définie sur IR. est une fonction de répartition d'une variable aléatoire continue, on montre que F est continue sur IR, que F est dérivable sauf éventuellement en un nombre fini de points, F est croissante sur IR et que $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$; $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$

2. Densité d'une variable aléatoire

Pour montrer qu'une fonction *f* définie sur IR est une densité d'une variable aléatoire continue, on montre que f est continue sauf en un nombre fini de points où elle admet des limites éventuellement infinies, que f est positive et que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge et vaut 1.

Si *f* est une densité d'une variable aléatoire X à densité et que *g* coïncide avec *f* sauf en un nombre fini de points alors *g* est également une densité de X.

Si on connaît la fonction de répartition d'une densité d'une variable à densité X, pour déterminer la densité d'une variable $Y = f(X)$, on calcule $P(Y \leq x) = P(f(X) \leq x)$ pour obtenir la fonction de répartition G de Y. La dérivée de G sera alors la densité cherchée.

3. Espérance d'une variable à densité

Dans le cas d'une loi usuelle, on utilise les résultats du cours.

Sinon, il faut montrer la convergence de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$ ce qui assure l'existence de l'espérance puis en calculer la valeur qui est celle de l'espérance.

S'il est possible d'exprimer la variable X en fonction d'une variable Y qui suit une loi connue, on utilise alors la linéarité de l'espérance et les résultats de cours pour obtenir *E (X)*.

4. Variance d'une variable à densité

Dans le cas d'une loi usuelle, on utilise les résultats du cours.

Sinon, il faut montrer la convergence de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)dt$ ce qui assure l'existence de la variance. On se souvient que X ne peut avoir de variance si X ne possède pas d'espérance.

On peut aussi utiliser le théorème de Köenig pour obtenir la valeur de la variance.

5. Variables centrées réduites associées

Soit X une variable aléatoire admettant des moments d'ordre 1 et 2.

La variable aléatoire Y définie par $Y = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est la variable centrée réduite associée à X.

En particulier si Y = $m + \sigma X$ alors Y suit la loi normale N (m,σ^2) si et seulement si X suit la loi normale centrée réduite N (0,1).

6. Théorème du transfert

Soit X une variable aléatoire de densité *f*, soit φ une fonction de IR dans IR, strictement monotone et de classe C1 et soit Y une variable aléatoire définie par :

Y=φ(X) alors, on a $E(Y)=E(\varphi(X))=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)f(t)dt$ si cette intégrale est convergente.

Le théorème du transfert s'applique encore si φ est de classe C1, strictement monotone par morceaux. Et même, le théorème s'applique pour φ continue dès que l'intégrale converge.

7. Variables indépendantes

Pour montrer que X et Y sont indépendantes, on montre que <u>pour tous réels x et y,</u> on a P [(X ≤ x)∩(Y ≤ y)] = P (X ≤ x) P (Y ≤ y).

8. Lois de somme

Si X et Y sont deux variables à densité <u>indépendantes</u> de densités respectives *f* et *g,* alors la variable Z = X + Y admet pour densité la fonction *h* définie par :

$$\forall x\in IR \quad h(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)g(x-u)du=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x-v)g(v)dv$$

Les cas particuliers suivants sont à bien connaître, car on les utilise très souvent :

- Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement les lois normales $N(m,\sigma^2)$ et $N(m',\sigma'^2)$ alors X + Y suit une loi normale $N(m+m' ; \sigma^2+\sigma'^2)$.
- La somme de *n* lois exponentielles de même paramètre λ est une loi Gamma $\Gamma(n,\lambda)$.

9. Lois discrètes et continues

Loi discrète	Loi continue
$p_i = P(X = x_i)$	f est la fonction densité de X
$P_i \geq 0$	$f \geq 0$
$\sum_i p_i = 1$	$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$
$E(X) = \sum_i p_i x_i$	$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x.f(x)dx$
$E(X^2) = \sum_i p_i x_i^2$	$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2.f(x)dx$
$E(\varphi(X)) = \sum_i \varphi(x_i) p_i$	$E(\varphi(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x).f(x)dx$
$V(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - E^2(X)$	
$F(a) = P(X \leq a)$	
$F(a) = \sum_{x_i \leq a} P(X = x_i)$	$F(a) = \int_{-\infty}^{a} f(t)dt$
$F(b) - F(a) = P(a < X \leq b)$	$F(b) - F(a) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b)$ $= P(a < X < b) = P(a \leq X < b)$
	$P(X = a) = 0$

D. Convergence et approximation

1. Convergence en probabilité

Pour démontrer qu'une suite de variables aléatoires (X_n) converge vers une variable X définie sur le même espace probabilisé, on utilise la définition ; le plus souvent, on a besoin d'inégalités pour conclure. Les inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebichev servent essentiellement à ces démonstrations, elles sont cependant numériquement très mauvaises.

2. Inégalité de Bienaymé-Tchebichev

L'idée est la suivante : la probabilité d'être en dehors de l'intervalle $[E(X) - \varepsilon, E(X) + \varepsilon]$ diminue et tend vers 0 quand l'intervalle augmente. D'autre part, quand la variance augmente, c'est-à-dire que la dispersion des valeurs possibles augmente, la probabilité d'être dehors augmente.

3. Conditions suffisantes de convergence en probabilité

Soient (X_n) une suite de variables aléatoires réelles et X une variable aléatoire réelle définies sur le même espace probabilisé, alors :

1) $\lim\limits_{n\to\infty} E(|X_n - X|) = 0 \quad \Rightarrow \quad X_n \xrightarrow[p]{} X$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} E(|X_n - X|) = 0 \quad et \quad \lim\limits_{n\to\infty} V(X_n - X) = 0 \quad \Rightarrow \quad X_n \xrightarrow[p]{} X$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} E(|X_n - X|^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad X_n \xrightarrow[p]{} X$

Ne pas perdre de vue que $\lim\limits_{n\to\infty} E(X_n - X) = 0$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to\infty} E(X_n) = E(X)$ mais que ce n'est pas aussi simple pour la variance.

Ne pas oublier que ces résultats concernent des conditions suffisantes. Pour les réciproques, on peut trouver des contre-exemples.

4. Loi faible des grands nombres

L'idée est que si on fait des épreuves répétées indépendantes et nombreuses, la moyenne des résultats observés est proche de l'espérance.

La suite des moyennes expérimentales converge en probabilité vers l'espérance.

On se souvient que la loi faible des grands nombres n'oblige pas les variables à être indépendantes ni à suivre la même loi.

5. Convergence en loi

Les convergences en loi respectives de (X_n) et (Y_n) vers X et Y n'impliquent ni la convergence en loi de ($X_n - Y_n$) vers X-Y ni la convergence de ($X_n + Y_n$) vers $X + Y$.

Mais, la convergence en loi de (X_n) vers X implique la convergence en loi de ($-X_n$) vers $-X$ et plus généralement la convergence en loi de (aX_n) vers (aX).

Attention la limite en loi n'est pas nécessairement unique.

6. Correction de continuité

Lorsqu'on approche une variable X discrète définie sur [[0,n]] par une variable continue Y, on effectue une correction de continuité. Si on note F la fonction de répartition de Y, on aura alors :

- pour tout k de [[1,n]] P (X = k) est approché par F (k +0,5) -F (k-0,5)
- pour k = 0 P (X = 0) est approché par F (0,5)
- pour k = n P (X = n) est approché par 1-F (n-0,5)

7. Approximation de la loi binômiale par la loi de Poisson

Soit λ un nombre fixé de [0,1]. Soit n un entier non nul. Soit (X_n) une suite de variables suivant des lois binômiales $\boldsymbol{B}(n, p_n)$ telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} np_n = \lambda$

Alors, la suite (X_n) converge en loi vers une V.A.R. de loi de Poisson $\boldsymbol{P}(\lambda)$

<u>En pratique</u>: La loi B (n,p) peut être approchée par la loi **P** (np) lorsque $\boldsymbol{p \leq 0{,}1}$, $\boldsymbol{n \geq 30}$ et $\boldsymbol{np < 15}$

8. Approximation de la loi hypergéométrique par la loi binômiale

Soit E un ensemble de N éléments, dont une proportion p de type 1. On effectue dans E n tirages **sans** remise. Soit X le nombre d'éléments de type 1 obtenus. X suit la loi H (N, n, p)

Intuitivement, quand N devient très grand, n et p restant fixés, effectuer des tirages sans remise équivaut à effectuer des tirages avec remise (car on a peu de chance de tirer deux fois le même élément). Donc pour N très grand, on peut considérer que X suit la loi B (n,p).

<u>En pratique</u>**:** La loi H (N,n,p) peut être approchée par la loi B (n,p) lorsque $\boldsymbol{N \geq 10n}$

9. Approximation de la loi binômiale par la loi normale

Soit (X_n) une suite de V.A.R. mutuellement indépendantes et de même loi de Bernoulli de même paramètre p. Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ alors S_n suit la loi B (n,p) et en posant $S_n^* = \dfrac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ on : a (S_n^*) converge en loi vers une V.A.R. de loi normale N (0,1).

<u>En pratique</u>**:**

La loi B (n,p) peut être approchée par la loi N (np, $\sqrt{np(1-p)}$) lorsque **n ≥ 30, np ≥ 15 , np (1-p) ≥ 5**

E. Estimations

1. Estimateurs

Bien faire la différence entre $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ qui est un n-uplet de variables aléatoires et $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ qui est un n-uplet de réels vérifiant $\forall k \quad x_k \in X_k(\Omega)$.

Il ne faut pas confondre $T_n = \varphi_n(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, l'estimateur de θ, qui est une variable aléatoire avec une de ses réalisations $\varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ qui est un réel appelé estimation de θ. L'estimation $\varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ne dépend que de l'échantillon observé.

La variable aléatoire T_n dépend à priori de θ puisque les X_i dépendent de θ.

Bien connaître les estimateurs usuels :

- estimateur d'une proportion : $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$
- estimateur de la moyenne : $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$
- estimateur de la variance, si $m = E(X)$ est connu : $\Sigma_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2$
- estimateur de la variance, si $m = E(X)$ est inconnu : $S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$

Quelle que soit la valeur du paramètre, $\bar{X}$ converge en probabilité vers $m = E(X)$ et la variable centrée réduite associée à $\bar{X}$ converge en loi vers une variable normale centrée réduite (donc de loi indépendante du paramètre).

2. Biais. Risque quadratique

Le biais d'un estimateur peut être positif ou négatif.

Le risque quadratique d'un estimateur permet de déterminer entre deux estimateurs celui qui va être préféré : on choisit celui dont le risque est le moins élevé.

Si on a affaire à deux estimateurs sans biais, on choisit celui de plus petite variance.

L'image par une fonction f d'un estimateur sans biais de θ n'est pas en général un estimateur sans biais de θ et ceci même si la fonction est continue.

3. Intervalles de confiance

Un intervalle de confiance est un intervalle dont les bornes sont aléatoires et qui contient avec une probabilité donnée la valeur θ qu'on cherche à évaluer. Cette valeur n'est pas aléatoire, elle est seulement inconnue.

Une variable aléatoire admet une infinité d'intervalles de confiance au risque α. Si la variable est symétrique, l'intervalle optimal est symétrique.

Le fond et la forme

A. Le fond : ce que vous écrivez

Les examinateurs ne vous connaissent pas, vous êtes évalués uniquement sur le contenu de votre copie.

En toute chose, soyez rigoureux : n'oubliez pas les différents cas à traiter, faites les discussions jusqu'au bout ou si vous ne pouvez les achever, désignez tous les cas et résolvez ceux que vous pouvez; évitez les erreurs grossières (attention, on voit trop souvent dans les calculs algébriques des divisions par des termes qui peuvent s'annuler, des horreurs dans les manipulations des inégalités, des erreurs dans les calculs de dérivées ou de primitives, des inepties avec les variables muettes); ne vous contentez pas d'à peu près, tout particulièrement dans les justifications des hypothèses des théorèmes que vous voulez utiliser; faites un plan et énoncez-le si la question se traite en plusieurs parties.

N'oubliez pas que, si un résultat est donné dans une question, il doit être justifié avec d'autant plus de soin que, très souvent, il est utile dans une autre partie et qu'il est donné uniquement pour que les candidats qui ne l'auraient pas obtenu puissent continuer le problème.

N'essayez jamais de bluffer ; les correcteurs savent exactement quelle est la partie difficile de chaque question et y portent une attention particulière. Si vous ne savez pas répondre, précisez que vous admettez le résultat. Un bluff induit une méfiance vis-à-vis de l'ensemble de votre devoir, ce qui est très préjudiciable.

B. La forme : comment vous rédigez

« La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. »

Cette consigne est donnée sur tous les sujets de concours, il est impératif de la respecter. Les correcteurs ne perdent pas de temps à déchiffrer ce qui est mal écrit ; ce qui est illisible… n'est pas lu !

Un correcteur doit à tout moment savoir quelle est la question traitée. On aura donc intérêt à écrire dans la marge le numéro de cette question et c'est la seule chose que vous vous autoriserez à inscrire dans la marge.

Aérez votre copie.

Soulignez votre résultat : cela indique la fin de votre raisonnement et permet d'introduire une autre question ou une autre partie de cette question.

Ne laissez pas des ébauches de calcul ou de raisonnement sur votre copie. Si votre calcul n'est pas abouti, il ne vous rapportera pas de point et fera perdre un certain temps de lecture au correcteur, ce qui n'est jamais bénéfique. Vous aurez donc intérêt à utiliser un brouillon pour vos calculs et à ne recopier sur votre copie que les étapes essentielles nécessaires à la compréhension du correcteur.

Evitez les ratures et les gribouillages de toute sorte qui montrent une certaine confusion dans votre pensée ou dans vos méthodes.

Faites en sorte d'utiliser à bon escient les symboles mathématiques.Ceux-ci ne doivent jamais être considérés comme de la sténotypie (attention notamment aux mélanges d'égalités et d'inégalités, à l'utilisation abusive du symbole de limite ou à l'emploi de flèches, au rôle des quantificateurs, etc.). Les raisonnements doivent être concis, et leur expression donnée en un français le plus clair possible.

Prenez le temps de vous relire après la rédaction de chaque question, il est dommageable de laisser des fautes d'orthographe.

N'utilisez jamais d'abréviations mais donnez aux méthodes et théorèmes utilisés leurs noms.

Introduisez toujours un calcul qui n'est pas expressément demandé, car les calculs ne sont pas une fin en soit mais un moyen de faire aboutir un raisonnement et c'est votre raisonnement qui intéresse le correcteur.

Soignez les graphiques quand on vous en demande.

Adoptez un style impersonnel mais faites en sorte que votre copie soit agréable à lire. La première impression lorsqu'on ouvre un devoir est souvent déterminante.

BCE - CONCOURS 2008

Les épreuves écrites

L'INSEEC utilise les épreuves de la BCE-CCIP selon la grille ci-dessous. Le choix des coefficients d'écrits (total : 30) est équilibré mais privilégie néanmoins les langues, la culture générale et l'histoire - géographie politique du monde contemporain (voie scientifique), l'analyse économique et historique (voie économique) ou l'économie (voie technologique). Cette décision est en parfaite cohérence avec le projet pédagogique de l'INSEEC qui affiche une volonté claire d'internationalisation de son cursus (nombreux cours dispensés en anglais) et qui, depuis sa création, est la seule École de Management à avoir développé un Département "Conférences de Méthodes et Culture Générale" tel qu'il existe dans les Instituts d'Études Politiques.

Choix des épreuves écrites	Option Scientifique	Coef	Option Économique	Coef	Option Technologique	Coef	Option Littéraire	Coef
- Contraction de texte	Épreuve HEC	2	Épreuve HEC	2	Épreuve HEC	2	Épreuve HEC	2
- Première langue	IENA	7	IENA	7	IENA	4	IENA	6
- Deuxième langue	IENA	5	IENA	5	IENA	3	IENA	4
- Dissertation de culture générale	Épreuve ESC	5	Épreuve ESC	5	Épreuve ESC	4	-	
- Dissertation littéraire	-		-		-		Épreuve ESSEC	5
- Dissertation philosophique	-		-		-		Épreuve ESSEC	5
- Mathématiques	Épreuve EDHEC	5	Épreuve EDHEC	4	Épreuve ESC	4	-	
- Histoire, géographie économiques	Épreuve ESC	6	-		-		-	
- Analyse économique et historique	-		Épreuve ESC	7	-		-	
- Économie	-		-		Épreuve ESC	5	-	
- Histoire	-		-		-		Épreuve ESCP-EAP	4
- Techniques de gestion - Informatique & Droit	-		-		Épreuve ESC	8	-	
- Épreuve à option							Épreuve ESSEC	4
Total coefficients		30		30		30		30

À l'issue des épreuves écrites, le jury d'admissibilité de l'INSEEC se réunit et arrête la liste des candidats admissibles. Ceux-ci sont convoqués soit à Paris soit à Bordeaux en fonction de l'académie d'appartenance de leur classe préparatoire et d'une décision arrêtée par le jury d'admissibilité, dans le but d'équilibrer au mieux les calendriers de passage. Des dérogations sont possibles sur demande du candidat. **Les résultats d'admissibilité sont transmis aux candidats le jeudi 12 juin 2008.**

Les épreuves orales

Les épreuves orales se déroulent sur une journée, soit à Paris soit à Bordeaux. Les jurys sont composés de manière équilibrée de professeurs de classes préparatoires, de cadres d'entreprises, d'enseignants ou d'Anciens Élèves de l'INSEEC.
Les épreuves orales de l'INSEEC ont un double objectif :

- discerner l'aptitude du candidat à réussir et bénéficier pleinement des projets et programmes qui lui seront proposés : ouverture internationale, goût pour la communication et l'argumentaire, esprit d'entreprendre, sens de l'équipe…
- susciter une première rencontre entre le candidat et l'École.

	Entretien individuel	Entretien collectif	Langues Vivantes 1	Langues Vivantes 2	TOTAL
Coefficients INSEEC - Paris - Bordeaux	12	6	7	5	30

L'admission et l'inscription

L'inscription se fait par la procédure centralisée SIGEM 2008.
Quel que soit votre rang de classement (liste principale + liste complémentaire), c'est vous qui déciderez d'intégrer soit PARIS, soit BORDEAUX.

LES MÉMENTOS DE L'INSEEC

COLLECTION DIRIGÉE PAR ERIC COBAST

Retrouvez la collection 2007
sur www.inseec-france.com/mementos2007

Les « Mémentos de l'INSEEC » ont été conçus et rédigés par une équipe de professeurs des Classes Préparatoires particulièrement sensibilisés aux difficultés que rencontrent régulièrement leurs étudiants.
L'ambition des « Mémentos » n'est pas de se substituer d'une manière ou d'une autre aux cours annuels mais de proposer simplement des outils susceptibles d'accompagner avec efficacité la préparation des concours.

Collection Les mémentos de l'INSEEC 2007

N° 1 : Méthode de la dissertation de Culture Générale
N° 2 : La dissertation d'Histoire aux concours des Ecoles de Commerce
N° 3 : Méthode du résumé et de la synthèse de textes
N° 4 : Les mots de la Science
N° 5 : L'Anglais écrit des concours d'entrée des Ecoles de Commerce
N° 6 : Réussir l'entretien des Ecoles de Commerce

Collection Les mémentos de l'INSEEC 2008

N° 7 : Les mots de l'Action
N° 8 : La dissertation d'analyse économique
N° 9 : Les astuces de Maths
N° 10 : Formulaire de Maths
N° 11 : L'Espagnol aux concours d'entrée des Ecoles de Commerce
N° 12 : Réussir l'entretien des Ecoles de Commerce

mp www.mwp.be

BUSINESS SCHOOL
INSEEC
PARIS • BORDEAUX

INSEEC
Secrétariat de la Collection Les Mémentos
H16 quai de Bacalan
33300 Bordeaux
Tél. : 05 56 01 77 26