Corrigé du concours contrôleur des douanes
Branche surveillance – session 2024

Exercice 1

En 2020, M. DUFISC a fait sa première déclaration de revenus : il a déclaré un revenu annuel de 90 000 €, l'impôt correspondant s'est élevé à 8 000 € et son revenu après impôt a donc été de 82 000 €. Chacune des quatre années suivantes, son revenu annuel a augmenté de 2 % et l'impôt correspondant a augmenté de 3 %. M. DUFISC souhaite étudier ce qu'il adviendrait de son revenu après paiement de l'impôt si l'évolution constatée se poursuivait. Dans ce but, on suppose que l'évolution constatée se poursuit et, pour tout entier n positif ou nul, on note :

- R_n le montant exprimé en euros du revenu annuel de M. DUFISC en l'an $(2020+n)$;
- I_n le montant exprimé en euros de l'impôt correspondant ;
- $U_n = R_n - I_n$.

Ainsi $R_0 = 90\,000$; $I_0 = 8\,000$; $U_0 = 82\,000$.

1. **a.**
- $R_1 = R_0 + R_0 \times \dfrac{2}{100} = 90\,000 + 90\,000 \times \dfrac{2}{100} = 90\,000 + 1\,800 = 91\,800$
- $I_1 = I_0 + I_0 \times \dfrac{3}{100} = 8\,000 + 8\,000 \times \dfrac{3}{100} = 8\,000 + 240 = 8\,240$
- $U_1 = R_1 - I_1 = 91\,800 - 8\,240 = 83\,560$
- $R_2 = R_1 + R_1 \times \dfrac{2}{100} = 91\,800 + 91\,800 \times \dfrac{2}{100} = 91\,800 + 1\,836 = 93\,636$
- $I_2 = I_1 + I_1 \times \dfrac{3}{100} = 8\,240 + 8\,240 \times \dfrac{3}{100} = 8\,240 + 247{,}20 = 8\,487{,}20$
- $U_2 = R_2 - I_2 = 93\,636 - 8\,487{,}20 = 85\,148{,}80$

b.
- Ajouter 2 %, c'est multiplier par $1 + \dfrac{2}{100}$, soit 1,02.

  La suite (R_n) est donc une suite géométrique de raison $q_R = 1{,}02$ et de premier terme $R_0 = 90\,000$. On en déduit que pour tout n positif, on a :
  $R_n = R_0 \times q_R^n = 90\,000 \times (1{,}02)^n$.
- Ajouter 3 %, c'est multiplier par $1 + \dfrac{3}{100}$, soit 1,03.

  La suite (I_n) est donc une suite géométrique de raison $q_I = 1{,}03$ et de premier terme $I_0 = 8\,000$. On en déduit que pour tout n positif, on a :
  $I_n = I_0 \times q_I^n = 8\,000 \times (1{,}03)^n$.

2. **a.** Pour tout entier n positif :

$$\begin{aligned}
U_{n+1} - U_n &= (R_{n+1} - I_{n+1}) - (R_n - I_n)\\
&= \left(90\,000 \times (1{,}02)^{n+1} - 90\,000 \times (1{,}02)^n\right) - \left(8\,000 \times (1{,}03)^{n+1} - 8\,000 \times (1{,}03)^n\right)\\
&= 90\,000 \times (1{,}02)^n\,(1{,}02 - 1) - 8\,000 \times (1{,}03)^n\,(1{,}03 - 1)\\
&= 90\,000 \times (1{,}02)^n \times 0{,}02 - 8\,000 \times (1{,}03)^n \times 0{,}03\\
&= 1\,800 \times (1{,}02)^n - 240 \times (1{,}03)^n
\end{aligned}$$

b.
$$\begin{aligned}
U_{n+1} < U_n &\iff U_{n+1} - U_n < 0 \iff 1\,800 \times (1{,}02)^n - 240 \times (1{,}03)^n\\
&\iff 1\,800 \times (1{,}02)^n < 240 \times (1{,}03)^n \iff \frac{1\,800}{240} < \frac{(1{,}03)^n}{(1{,}02)^n}\\
&\iff \frac{15}{2} < \left(\frac{1{,}03}{1{,}02}\right)^n \iff \ln\left(\frac{15}{2}\right) < \ln\left(\left(\frac{1{,}03}{1{,}02}\right)^n\right)\\
&\iff \ln\left(\frac{15}{2}\right) < n \times \ln\left(\frac{1{,}03}{1{,}02}\right) \iff n \times \ln\left(\frac{1{,}03}{1{,}02}\right) > \ln\left(\frac{15}{2}\right)
\end{aligned}$$

On admettra que les entiers n supérieurs ou égaux à 207 vérifient $n \times \ln\left(\dfrac{1,03}{1,02}\right) > \ln\left(\dfrac{15}{2}\right)$.

3. Si $n \geqslant 207$, alors $n \times \ln\left(\dfrac{1,03}{1,02}\right) > \ln\left(\dfrac{15}{2}\right)$, ce qui veut dire que $U_{n+1} < U_n$.
Donc M. DUFISC devrait attendre 207 ans pour voir son revenu après impôt diminuer, donc il ne le verra pas.

Exercice 2

Depuis une décennie, le nombre de candidats admis au baccalauréat augmente régulièrement à Clermont-Ferrand. Les responsables du campus universitaire décident de mener une étude sur les besoins en infrastructures et équipements du campus puis une enquête auprès d'un échantillon d'étudiants sur leur préférence entre le renforcement du parc automobile et la construction de nouvelles résidences universitaires.

L'étude menée sur la période allant de 2015 à 2020 a permis de modéliser l'évolution du nombre de nouveaux étudiants demandeurs de logements dans les résidences universitaires par la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n = 1\,000\left[\dfrac{1}{2}n + 1 - \ln\left(\dfrac{1}{2}n+1\right)\right]$,

(u_n) étant le nombre d'étudiants en $(2015+n)$.

Arthur, le premier responsable des étudiants, a pris connaissance des résultats de l'étude menée. Afin de connaître l'évolution du nombre d'étudiants demandeurs de logements dans les résidences universitaires, il se propose d'étudier les variations de la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1}{2}x + 1 - \ln\left(\dfrac{1}{2}x+1\right)$.

Il se propose également d'analyser les résultats issus de l'enquête.

Partie A

1.
- L'année 2015 correspond à $n = 0$.

  Donc le nombre de nouveaux étudiants demandeurs de logements dans les résidences en 2015 est :

  $u_0 = 1\,000\,[0+1-\ln(0+1)] = 1\,000$.
- L'année 2020 correspond à $n = 5$.

  Donc le nombre de nouveaux étudiants demandeurs de logements dans les résidences en 2020 est :

  $u_5 = 1000\left[\dfrac{1}{2}\times 5 + 1 - \ln\left(\dfrac{1}{2}\times 5+1\right)\right] = 1\,000\left[\dfrac{7}{2} - \ln\left(\dfrac{7}{2}\right)\right] \approx 1\,000\,(3,5 - 1,252\,8)$,
  soit 2 247 en arrondissant à l'unité.

2. **a.** La dérivée de f pour tout x appartenant à $[0\,;\,+\infty[$ est la fonction f' définie par

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}x+1} = \frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}(x+2)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{x+2} = \frac{x+2-2}{2\,(x+2)} = \frac{x}{2x+4}$$

b. $x \in [0\,;\,+\infty[$ donc $x \geqslant 0$ donc $2x+4 > 0$ et donc $f'(x) \geqslant 0$.

On en déduit que la fonction f est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

3. $f(0) = 1 - \ln(1) = 1$ et $f(10) = \dfrac{1}{2}\times 10 + 1 - \ln\left(\dfrac{1}{2}\times 10+1\right) = 6 - \ln(6) \approx 6 - 1,791\,8 \approx 4,2082$

On dresse le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,10]$.

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ 10
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$1 \nearrow \approx 4{,}2082$

4. n est un entier naturel donc $n \in [0\,;\,+\infty[$ et $n+1 \in [0\,;\,+\infty[$.

   $n < n+1$ et f est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$ donc $f(n) < f(n+1)$.
   Il en découle que $1\,000 \times f(n) < 1\,000 \times f(n+1)$ et donc que $u_n < u_{n+1}$.

   La suite (u_n) est donc croissante.

Partie B

Un groupe de 100 étudiants composé de 60 garçons et 40 filles a participé à l'enquête sur la préférence entre le renforcement du parc automobile et la construction des résidences universitaires. 40 % des garçons sont favorables au renforcement du parc et 60 % des filles optent pour la construction des résidences universitaires.

1. **a.** Il y a 60 garçons dont 40 % favorables au renforcement du parc, donc 60 % optent pour la construction des résidences universitaires soit $60 \times \dfrac{60}{100} = 36$.

   Le nombre de garçons ayant opté pour la construction de nouvelles résidences est donc 36.

   b. Il y a 40 filles dont 60 % qui optent pour la construction des résidences universitaires soit $40 \times \dfrac{60}{100} = 24$.

   $36+24 = 60$ donc le nombre total d'étudiants ayant opté pour la construction des nouvelles résidences est 60.

2. On interroge un étudiant au hasard.

   a. Soit l'événement A : l'étudiant préfère la construction de nouvelles résidences.

   Il y a un total de 100 étudiants dont 60 qui préfèrent la construction de nouvelles résidences.

   La probabilité de A est donc $\dfrac{60}{100}$ soit 0,6.

   b. Soit l'événement B : l'étudiant est une fille qui a opté pour le renforcement du parc automobile.

   Il y a 24 filles qui préfèrent la construction de nouvelles résidences sur 40 filles, donc il y en a 16 qui ont opté pour le renforcement du parc automobile.

   La probabilité de B est donc $\dfrac{16}{100}$ soit 0,16.

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = x^2 - 8\ln(x)$.

On admet que f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

1. On détermine les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

- Limite en 0

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0\\ \lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty\end{array}\right\}\text{ donc }\lim_{x\to 0} x^2 - 8\ln(x) = +\infty \text{ donc } \lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$$

- Limite en $+\infty$

$$f(x) = x^2 - 8\ln(x) = x\left(x - 8\frac{\ln(x)}{x}\right)$$

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty\\ \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0\end{array}\right\}\text{donc } \lim\limits_{x\to +\infty} x - 8\dfrac{\ln(x)}{x} = +\infty\\ \lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty\end{array}\right\}\text{donc } \lim_{x\to +\infty} x\left(x - 8\frac{\ln(x)}{x}\right) = +\infty$$

donc $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

2. $f'(x) = 2x - 8\times\dfrac{1}{x} = \dfrac{2x^2-8}{x} = \dfrac{2(x-2)(x+2)}{x}$

3. On étudie le signe de f' sur $]0\,;\,+\infty[$.

x	0		2		$+\infty$
$x-2$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$+$		$+$	
x	0	$+$		$+$	
$f'(x) = \dfrac{2(x-2)(x+2)}{x}$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

$f(2) = 2^2 - 8\ln(2) = 4 - 8\ln(2)$; d'après l'exercice 2, $\ln(2) \approx 0{,}6931$. On en déduit que $f(2) \approx -1{,}54 < 0$. On établit le tableau de variations de f sur $]0\,;\,+\infty[$.

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	$4-8\ln(2)$	$\nearrow$	$+\infty$

4. On complète le tableau des variations de f sur $]0\,;\,2]$.

x	0	α	2
$f(x)$	$+\infty$	0	$\approx -1{,}54$

La fonction f est dérivable donc continue sur $]0\,;\,2]$, elle est strictement décroissante sur cet intervalle ; de plus $\lim\limits_{x \to 0} f(x) > 0$ et $f(2) < 0$. Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, on peut dire que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique sur $]0\,;\,2]$.

5. On admet que sur $[2\,;\,+\infty[$, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique β.

On en déduit le signe de f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

x	0		α		2	β		$+\infty$
$f(x)$	‖	$+$	0	$-$		0	$+$	

6. Pour tout réel k, on considère la fonction g_k définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :
$g_k(x) = x^2 - 8\ln(x) + k$. Donc $g_k(x) = f(x) + k$.

La fonction f admet le nombre $4 - 8\ln(2)$ comme minimum ; en prenant pour k l'opposé du minimum soit $k = -4 + 8\ln(2)$, la fonction g_k sera tout le temps positive, sauf en $x = 2$ où elle s'annulera.

Exercice 4

On dispose d'une urne contenant 6 jetons indiscernables au toucher dont :

- trois jetons numérotés 1 ;
- deux jetons numérotés 2 ;
- un jeton numéroté 3.

et d'un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées 1, 1, 2, 2, 2, 3.

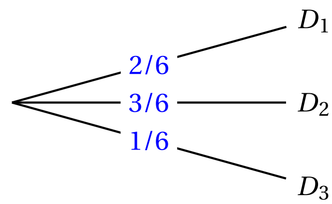
L'épreuve (E) consiste à tirer au hasard et simultanément deux jetons de l'urne et à lancer une fois le dé.
On effectue une épreuve. On suppose que tous les événements élémentaires sont équiprobables.

On résume la situation avec des arbres pondérés.

- Le dé comporte 6 faces qui peuvent faire apparaître les numéros 1, 2 ou 3. On note respectivement D_1, D_2 et D_3 l'apparition du 1, du 2 ou du 3

  - Le numéro 1 est présent deux fois donc sa probabilité d'apparition est $\dfrac{2}{6}$.
  - Le numéro 2 est présent trois fois donc sa probabilité d'apparition est $\dfrac{3}{6}$.
  - Le numéro 3 est présent une fois donc sa probabilité d'apparition est $\dfrac{1}{6}$.

  Voici l'arbre pondéré représentant le lancer du dé.

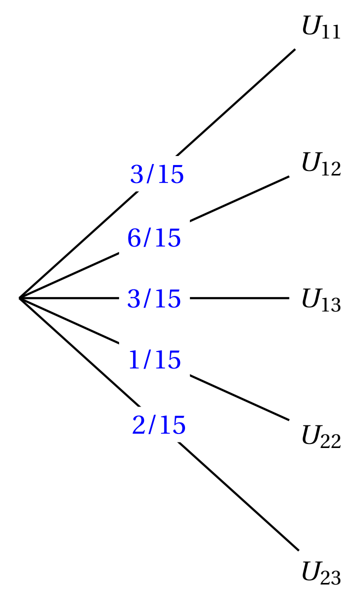

2/6
3/6
1/6
D_1
D_2
D_3

- On extrait simultanément deux numéros parmi six dans l'urne.

  Les résultats possibles sont :

  - deux 1 (événement noté U_{11}) avec une probabilité de $\dfrac{\binom{2}{3}}{\binom{2}{6}} = \dfrac{3}{15}$;
  - un 1 et un 2 (événement noté U_{12}) avec une probabilité de $\dfrac{\binom{1}{3} \times \binom{1}{2}}{\binom{2}{6}} = \dfrac{6}{15}$;
  - un 1 et un 3 (événement noté U_{13}) avec une probabilité de $\dfrac{\binom{1}{3} \times \binom{1}{1}}{\binom{2}{6}} = \dfrac{3}{15}$;
  - deux 2 (événement noté U_{22}) avec une probabilité de $\dfrac{\binom{2}{2}}{\binom{2}{6}} = \dfrac{1}{15}$;
  - un 2 et un 3 (événement noté U_{23}) avec une probabilité de $\dfrac{\binom{1}{2} \times \binom{1}{1}}{\binom{2}{6}} = \dfrac{2}{15}$.

  On représente cette situation par un arbre pondéré.



- On peut donc représenter le jeu complet : voir l'arbre 1 page **??**.

1. On va calculer les probabilités des événements ci-dessous

- A : « le produit des trois numéros obtenus est égal à 4 »

  Voir l'arbre 2 page **??** ; les trajets favorables sont en rouge.

  $P(\text{A}) = P\left(U_{12} \cap D_2\right) + P\left(U_{22} \cap D_1\right) = \dfrac{6}{15} \times \dfrac{3}{6} + \dfrac{1}{15} \times \dfrac{2}{6} = \dfrac{3}{15} + \dfrac{2}{90} = \dfrac{18}{90} + \dfrac{2}{90} = \dfrac{20}{90} = \dfrac{2}{9}$
- B : « la somme des trois numéros obtenus est égale à 5 »

  Voir l'arbre 3 page **??** ; les trajets favorables sont en rouge.

  $P(\text{B}) = P\left(U_{11} \cap D_3\right) + P\left(U_{12} \cap D_2\right) + P\left(U_{13} \cap D_1\right) + P\left(U_{22} \cap D_1\right)$

  $= \dfrac{3}{15} \times \dfrac{1}{6} + \dfrac{6}{15} \times \dfrac{3}{6} + \dfrac{3}{15} \times \dfrac{2}{6} + \dfrac{1}{15} \times \dfrac{2}{6} = \dfrac{3}{90} + \dfrac{18}{90} + \dfrac{6}{90} + \dfrac{2}{90} = \dfrac{29}{90}$

2. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de numéro 2 lors d'une épreuve.

Voir l'arbre 4 page **??**.

- Nombre de 2 égal à 0

$$P(X=0) = P(U_{11} \cap D_1) + P(U_{11} \cap D_3) + P(U_{13} \cap D_1) + P(U_{13} \cap D_3)$$
$$= \frac{3}{15} \times \frac{2}{6} + \frac{3}{15} \times \frac{1}{6} + \frac{3}{15} \times \frac{2}{6} + \frac{3}{15} \times \frac{1}{6} = \frac{3}{15} \times \frac{6}{6} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

- Nombre de 2 égal à 1

$$P(X=1) = P(U_{11} \cap D_2) + P(U_{12} \cap D_1) + P(U_{12} \cap D_3) + P(U_{13} \cap D_2) + P(U_{23} \cap D_1)$$
$$+ P(U_{23} \cap D_3)$$
$$= \frac{3}{15} \times \frac{3}{6} + \frac{6}{15} \times \frac{2}{6} + \frac{6}{15} \times \frac{1}{6} + \frac{3}{15} \times \frac{3}{6} + \frac{2}{15} \times \frac{2}{6} + \frac{2}{15} \times \frac{1}{6}$$
$$= \frac{1}{10} + \frac{2}{15} + \frac{1}{15} + \frac{1}{10} + \frac{2}{45} + \frac{1}{45} = \frac{9+12+6+9+4+2}{90} = \frac{42}{90} = \frac{7}{15}$$

- Nombre de 2 égal à 2

$$P(X=2) = P(U_{12} \cap D_2) + P(U_{22} \cap D_1) + P(U_{22} \cap D_3) + P(U_{23} \cap D_2)$$
$$= \frac{6}{15} \times \frac{3}{6} + \frac{1}{15} \times \frac{2}{6} + \frac{1}{15} \times \frac{1}{6} + \frac{2}{15} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{5} + \frac{1}{45} + \frac{1}{90} + \frac{1}{15}$$
$$= \frac{18+2+1+6}{90} = \frac{27}{90} = \frac{3}{10}$$

- Nombre de 2 égal à 3

$$P(X=3) = P(U_{22} \cap D_2) = \frac{1}{15} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{30}$$

On en déduit la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

3. Lors d'une épreuve, on appelle « succès » l'obtention de trois numéros impairs.

Voir l'arbre 5 page **??**. La probabilité p du succès est :

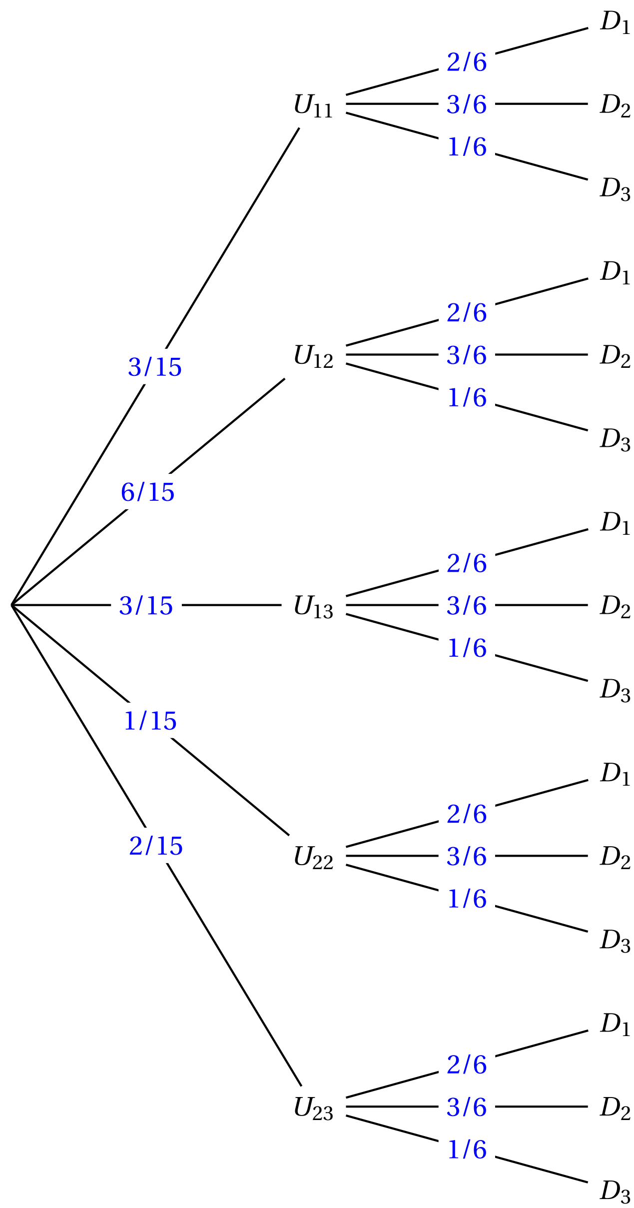
$$p = P(U_{11} \cap D_1) + P(U_{11} \cap D_3) + P(U_{13} \cap D_1) + P(U_{13} \cap D_3)$$
$$= \frac{3}{15} \times \frac{2}{6} + \frac{3}{15} \times \frac{1}{6} + \frac{3}{15} \times \frac{2}{6} + \frac{3}{15} \times \frac{1}{6} = \frac{3}{15} \times \frac{2+1+2+1}{6} = \frac{1}{5} \times 1 = \frac{1}{5}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\,;\,1\}$. On répète n fois de suite et d'une manière indépendante l'épreuve (E). Soit l'événement A_n : « obtenir au moins un succès lors des n épreuves », de probabilité P_n.

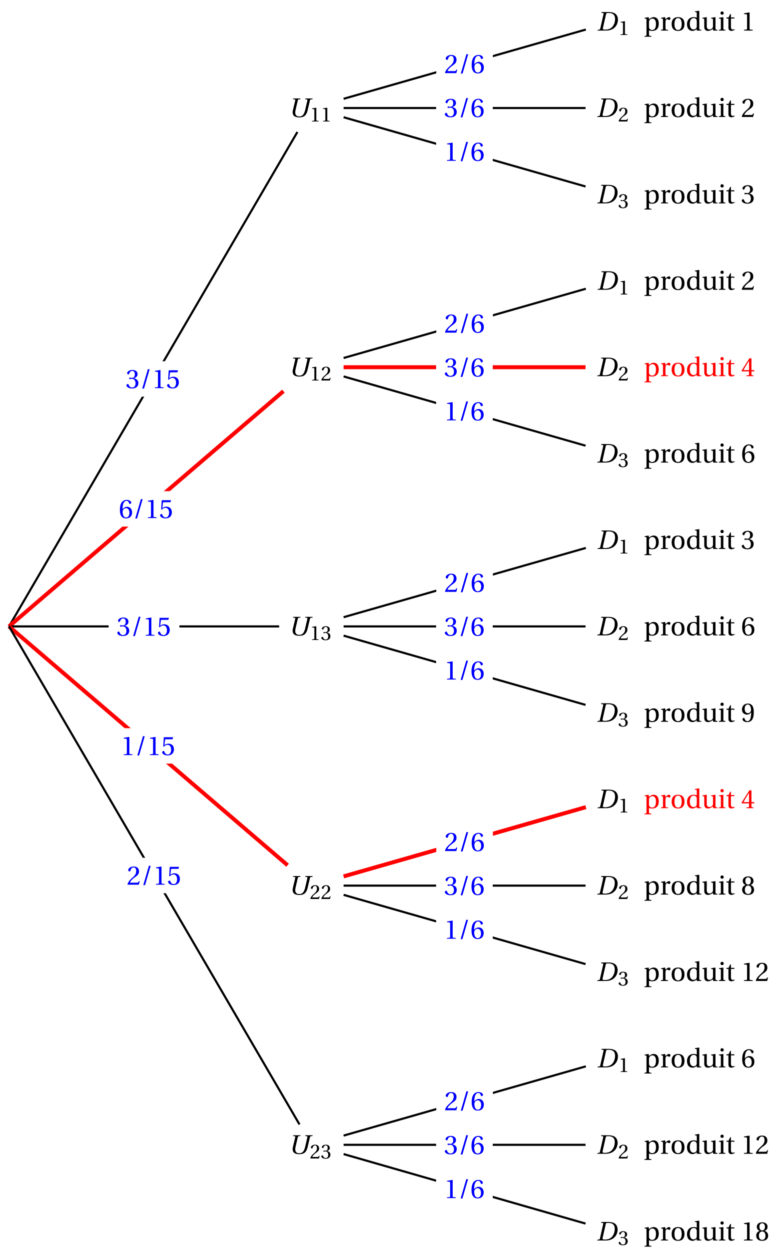
Chaque épreuve (E) n'a que deux issues et on répète n fois de suite et d'une manière indépendante cette épreuve. Donc la variable aléatoire Y qui donne le nombre de succès sur n épreuves suit la loi binomiale de paramètres n et $p = \dfrac{1}{5}$.

Donc : $P_n = P(A_n) = P(Y \geqslant 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \dbinom{0}{n}\left(\dfrac{1}{5}\right)^0 \left(1 - \dfrac{1}{5}\right)^{n-0} = 1 - \left(\dfrac{4}{5}\right)^n$

Arbre 1

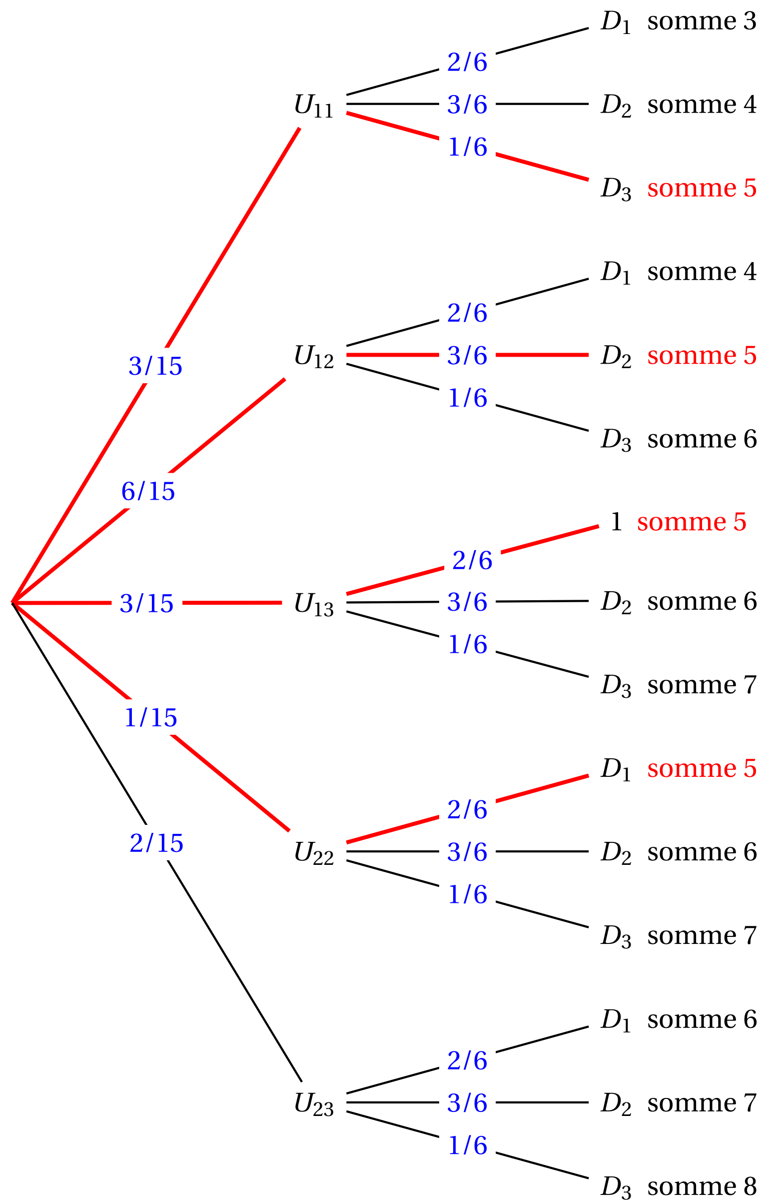


Arbre 2

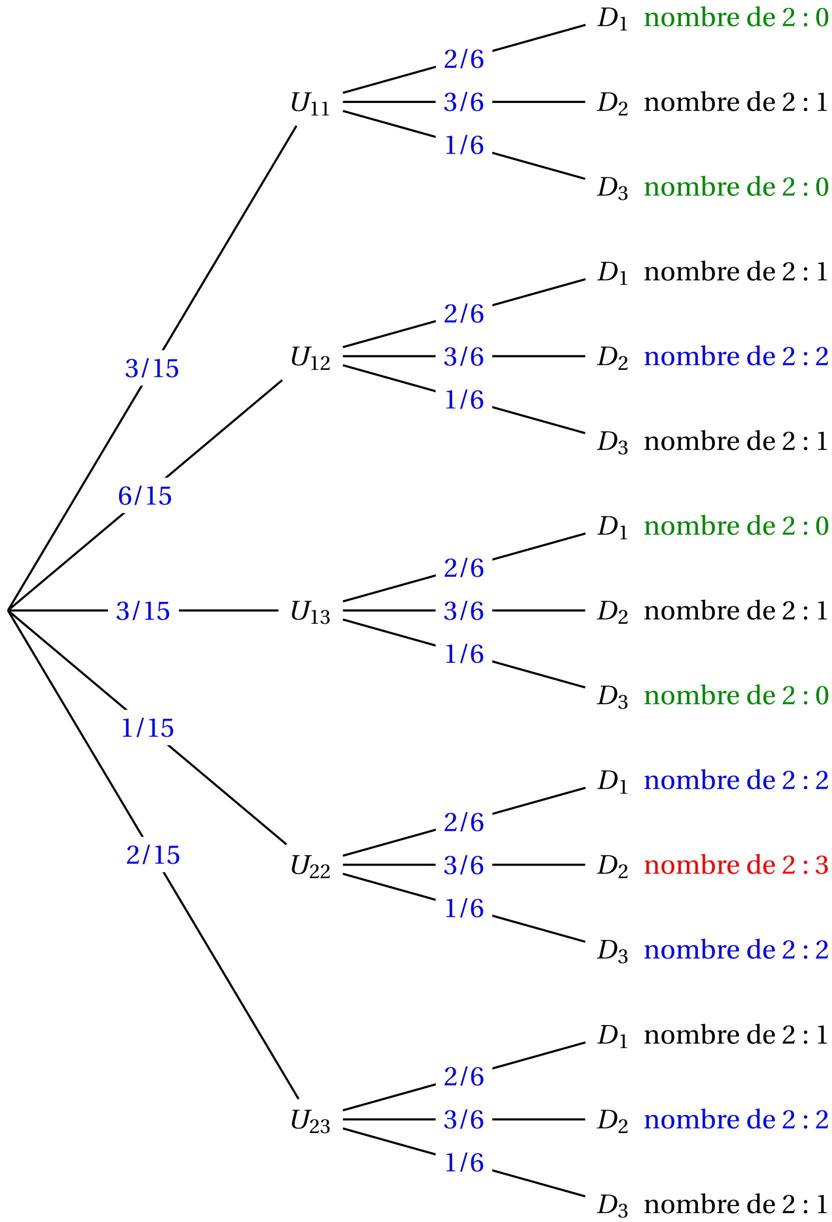


3/15
6/15
3/15
1/15
2/15
U11
U12
U13
U22
U23
2/6
3/6
1/6
D1 produit 1
D2 produit 2
D3 produit 3
D1 produit 2
D2 produit 4
D3 produit 6
D1 produit 3
D2 produit 6
D3 produit 9
D1 produit 4
D2 produit 8
D3 produit 12
D1 produit 6
D2 produit 12
D3 produit 18

Arbre 3

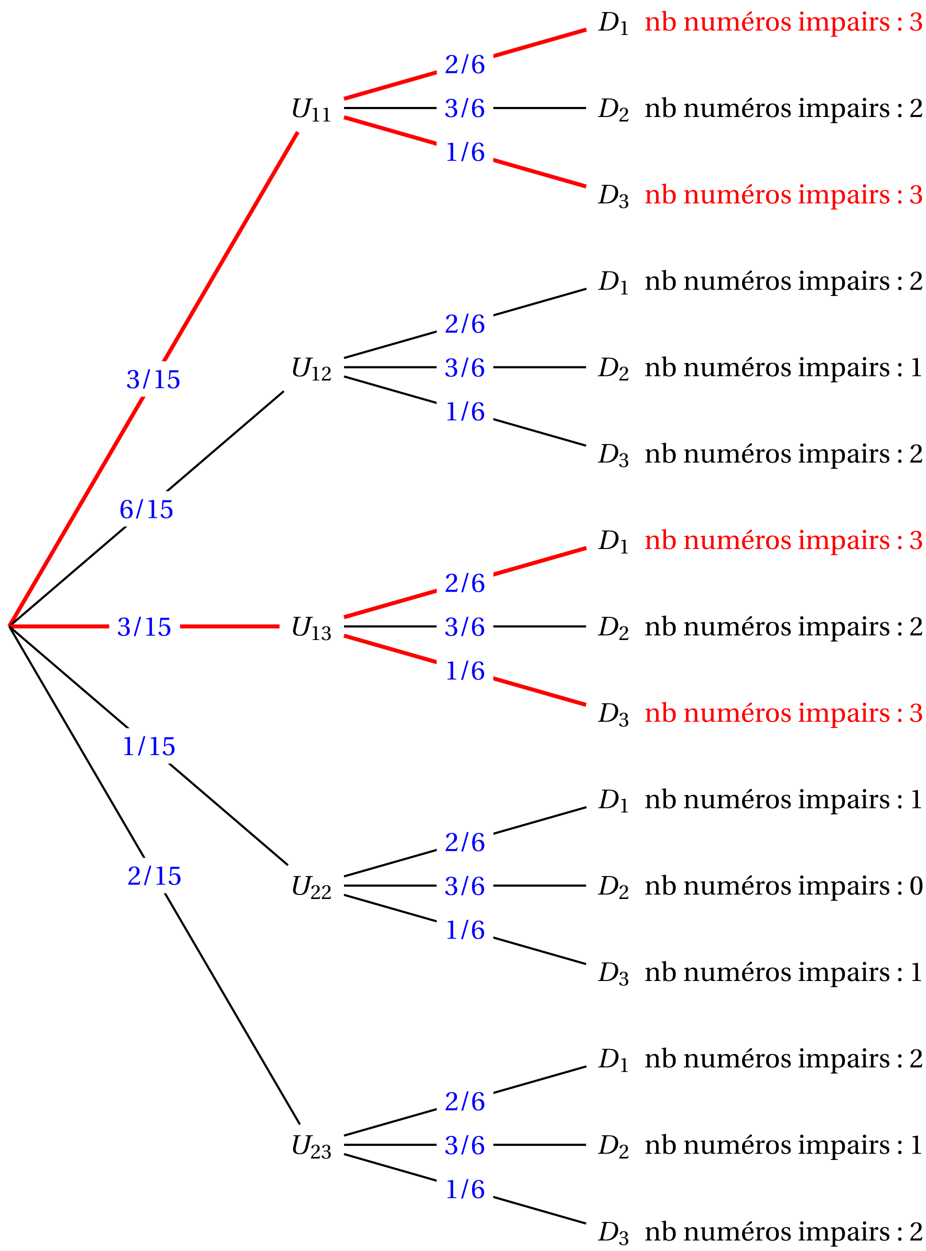

U_{11}
U_{12}
U_{13}
U_{22}
U_{23}
3/15
6/15
3/15
1/15
2/15
2/6
3/6
1/6
D_1 somme 3
D_2 somme 4
D_3 somme 5
D_1 somme 4
D_2 somme 5
D_3 somme 6
1 somme 5
D_2 somme 6
D_3 somme 7
D_1 somme 5
D_2 somme 6
D_3 somme 7
D_1 somme 6
D_2 somme 7
D_3 somme 8

Arbre 4



3/15
6/15
3/15
1/15
2/15
U_{11}
U_{12}
U_{13}
U_{22}
U_{23}
2/6
3/6
1/6
D_1 nombre de 2 : 0
D_2 nombre de 2 : 1
D_3 nombre de 2 : 0
D_1 nombre de 2 : 1
D_2 nombre de 2 : 2
D_3 nombre de 2 : 1
D_1 nombre de 2 : 0
D_2 nombre de 2 : 1
D_3 nombre de 2 : 0
D_1 nombre de 2 : 2
D_2 nombre de 2 : 3
D_3 nombre de 2 : 2
D_1 nombre de 2 : 1
D_2 nombre de 2 : 2
D_3 nombre de 2 : 1

Arbre 5


D_1 nb numéros impairs : 3
2/6
U_{11}
3/6
D_2 nb numéros impairs : 2
1/6
D_3 nb numéros impairs : 3
D_1 nb numéros impairs : 2
2/6
3/15
U_{12}
3/6
D_2 nb numéros impairs : 1
1/6
D_3 nb numéros impairs : 2
6/15
D_1 nb numéros impairs : 3
2/6
3/15
U_{13}
3/6
D_2 nb numéros impairs : 2
1/6
D_3 nb numéros impairs : 3
1/15
D_1 nb numéros impairs : 1
2/6
2/15
U_{22}
3/6
D_2 nb numéros impairs : 0
1/6
D_3 nb numéros impairs : 1
D_1 nb numéros impairs : 2
2/6
U_{23}
3/6
D_2 nb numéros impairs : 1
1/6
D_3 nb numéros impairs : 2