CONCOURS POUR L'ADMISSION EN FORMATION DES INGÉNIEURS DE L'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE MARITIME ANNÉE 2019

Durée : 2 heures

Le candidat traitera 3 questions au choix parmi les 4 proposées, chaque question représentant le même nombre de points.

1re question

1. Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ respectivement par :

$$f(x) = x^2\mathrm{e}^{-x} \quad \text{et} \quad g(x) = \mathrm{e}^{-x}.$$

Dans un repère orthonormé du plan, on note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leurs courbes représentatives.

a. Déterminer, par le calcul, les valeurs exactes des coordonnées des points d'intersection des deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

b. Étudier les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sur $\mathbb{R}$.

2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \left(x^2 - 1\right)\mathrm{e}^{-x}$.

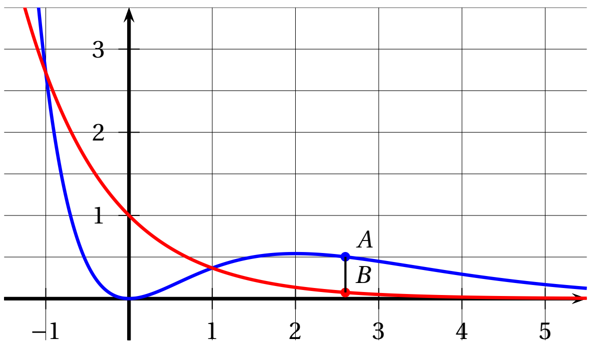
a. On admet que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^2} = +\infty$. Déterminer les limites de la fonction h en $+\infty$ et en $-\infty$.

b. Montrer que $h'(x)$ est du signe de $-x^2 + 2x + 1$.

c. En déduire les variations de la fonction h sur $\mathbb{R}$, et dresser son tableau de variations.

3. Soient les points $A(x\ ;\ f(x))$ et $B(x\ ;\ g(x))$ pour $x \in [-1\ ;\ +\infty[$.

On s'intéresse à la distance AB.



a. Montrer que :

$$AB = \left\{\begin{array}{lll} h(x) & \text{si} & x \in [1\ ;\ +\infty[\\ -h(x) & \text{si} & x \in [-1\ ;\ 1] \end{array}\right.$$

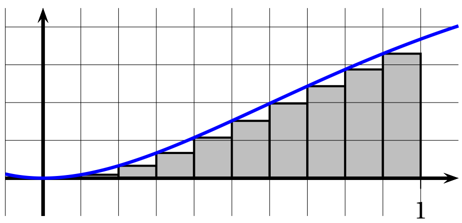
b. Pour quelle valeur de x la distance AB est-elle maximale ? On notera x_0 cette valeur.

Calculer la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-3} près de la distance AB en x_0.

3. On s'intéresse, à présent, à l'aire $\mathscr{A}$ du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}_f$ et les droites $x = 0$ et $x = 1$. (La fonction f a été définie dans la question 1.).

Afin d'obtenir une valeur approchée de $\mathscr{A}$, on utilise la méthode dite « des rectangles » qui consiste à approcher cette aire par la somme des aires de n rectangles.

Le graphique ci-contre illustre cette méthode pour $n = 10$ (le premier rectangle est d'aire nulle car $f(0) = 0$). Le nombre n de rectangles choisi permettra, lorsqu'on l'augmente, d'améliorer l'approximation de l'aire S.



a.

Recopier et compléter l'algorithme ci-contre pour qu'en fin d'exécution, la variable S contienne la valeur approchée par défaut de l'aire A obtenue en utilisant la méthode « des rectangles » avec n rectangles.

```
Saisir n
S ← …
Pour k allant de 0 à n − 1
    S ← S + …
Fin pour
```

Voici les résultats obtenus pour S en programmant cet algorithme avec différentes valeurs de n :

n	S
10	0,142 514 607
100	0,158 766 463
100000	0,160 600 955

b. Montrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \left(-x^2 - 2x - 2\right) \mathrm{e}^{-x}$ est une primitive de la fonction f.

c. Déterminer à présent la valeur exacte de l'aire $\mathscr{A}$.

Votre résultat est-il cohérent avec les valeurs de S obtenues précédemment ?

2e question

Un biologiste étudie le développement d'un certain type de parasite.
Il place en milieu clos une colonie de 50 000 individus.
Des expériences ont démontré que dans ces conditions, à long terme, la population se stabilise autour de 90 000 individus, sans jamais dépasser cette valeur.
On considèrera que la population est « stable » lorsque le taux d'évolution du nombre d'individus en une journée est inférieur à 0,1 %.
Rappel : Lorsqu'une quantité passe de la valeur Q_1 à la valeur Q_2 le taux d'évolution est $t = \dfrac{Q_2 - Q_1}{Q_1}$

1. Premier modèle

Au bout d'une journée, il observe que la population s'élève à 54 000 individus.

Il décide de faire l'hypothèse suivante : En notant p_n le nombre d'individus, en milliers, au bout de n journées, la suite $\left(p_n\right)$ vérifie $p_0 = 50$ et pour tout entier naturel n, $p_{n+1} = 0,9p_n + 9$.

a. Vérifier que ce modèle est en accord avec l'observation du nombre d'individus au bout d'une journée.

b. On note $v_n = p_n - 90$.
Montrer que la suite (v_n) est géométrique.

c. En déduire l'expression de v_n puis de p_n en fonction de n.

d. Ce modèle est-il compatible avec l'observation attendue à long terme ? Justifier.

e. Déterminer au bout de combien de jours cette population est considérée comme « stable ».

2. Deuxième modèle

Au bout de deux journées, il observe que la population d'élève à 57 888 individus.

Il décide d'adopter un nouveau modèle : En notant r_n le nombre d'individus au bout de n journée(s), la suite (r_n) vérifie pour tout entier naturel n, $r_{n+1} = f\left(r_n\right)$ où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = -0,002x^2 + 1,18x.$$

a. Justifier que ce modèle est en accord avec les décomptes de la population effectués les deux premiers jours.

b. Démontrer que pour tout entier naturel n , $0 \leqslant r_n \leqslant r_{n+1} \leqslant 90$.

c. En déduire que la suite (r_n) est convergente. On note ℓ sa limite.

d. On admet que ℓ doit vérifier $f(\ell) = \ell$. En déduire la valeur de ℓ.

e. Recopier et compléter l'algorithme ci-contre pour qu'il affiche en sortie le nombre de jour(s) au bout duquel la population pourra être considérée comme stable.

```
r ← ...
n ← ...
t ← 1
Tant que ...
r' ← r
r ← ...
n ← ...
t ← ...
Fin tant que
Afficher ...
```

3ᵉ question

Dans une grande entreprise, un virus informatique a infecté 20 % des ordinateurs. Un technicien de la maintenance informatique doit les contrôler à l'aide d'un logiciel anti-virus.
Lorsqu'un ordinateur est infecté par le virus, le logiciel émet un message d'alerte dans 95 % des cas. 27 % des tests ont donné lieu à un message d'alerte.

1. On choisit au hasard un des ordinateurs de l'entreprise, et on note les évènements suivants :
V : « l'ordinateur est infecté par le virus » A : « Le logiciel émet un message d'alerte »

a. Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré et calculer $P(V \cap A)$.

b. Calculer $P\left(\overline{V} \cap A\right)$ et en déduire $P_{\overline{V}}(A)$.

c. Le technicien reçoit un message d'alerte du logiciel anti-virus sur un ordinateur.
Il affirme qu'il y a alors moins de 3 chances sur 4 que cet ordinateur soit effectivement infecté par le virus.
Justifier cette affirmation.

2. À chaque fois qu'un message d'alerte est émis par le logiciel anti-virus, le technicien réalise un second test, parfaitement fiable celui-ci, pour savoir si l'ordinateur est effectivement infecté par le virus. Le coût de ce second test pour l'entreprise s'élève à 10 €. Si l'ordinateur est effectivement infecté, il engage alors une réparation de la carte mère dont le coût pour l'entreprise s'élève à 25 €.

Lorsque le logiciel anti-virus n'a pas émis de message d'alerte, l'ordinateur est remis en circulation, et le coût pour l'entreprise est de 0 €.

On note X la variable aléatoire qui donne le coût total de l'intervention sur un ordinateur choisi au hasard dans l'entreprise.

a. Donner la loi de probabilité de X sous forme d'un tableau.

b. Calculer $E(X)$ et interpréter le résultat obtenu.

c. Le responsable du budget de la maintenance informatique demande au technicien de ne pas pratiquer ce second test, et d'effectuer la réparation de la carte mère sur tous les ordinateurs sur lesquels le message d'alerte a été émis par le logiciel anti-virus. Justifier cette décision.

3. Il choisit 400 ordinateurs pour les tester. Le parc informatique de l'entreprise est suffisamment grand pour que ce choix puisse être assimilé à 400 tirages successifs avec remise. On note Y la variable aléatoire qui donne le nombre d'ordinateurs infectés parmi ces 400 ordinateurs.

a. Déterminer la loi de probabilité de Y en précisant ses paramètres puis calculer son espérance μ et son écart-type σ.

b. Quel calcul donne la probabilité qu'au moins un ordinateur soit infecté par ce virus ? Que peut-on dire de cet évènement ?

c. Pour cette question, on utilisera l'approximation permise par le théorème de Moivre-Laplace, c'est-à-dire que pour tous réels a et b , $P\left(a \leqslant \dfrac{Y-80}{8} \leqslant b\right) \approx P(a \leqslant Z \leqslant b)$ où Z suit la loi normale centrée réduite.
On utilisera la table de valeurs suivante pour répondre :

a	0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45
$P(Z<a)$	0,5	0,52	0,54	0,56	0,579	0,599	0,618	0,637	0,655	0,674
a	0,5	0,55	0,6	0,65	0,7	0,75	0,8	0,85	0,9	0,95
$P(Z<a)$	0,691	0,709	0,726	0,742	0,758	0,773	0,788	0,802	0,816	0,829
a	1	1,05	1,1	1,15	1,2	1,25	1,3	1,35	1,4	1,45
$P(Z<a)$	0,841	0,853	0,864	0,875	0,885	0,894	0,903	0,911	0,919	0,926
a	1,5	1,55	1,6	1,65	1,7	1,75	1,8	1,85	1,9	1,95
$P(Z<a)$	0,933	0,939	0,945	0,951	0,955	0,96	0,964	0,968	0,971	0,974

i. Calculer $P(Y \leqslant 90)$.

ii. Déterminer un entier c tel que $P(80-c \leqslant Y \leqslant 80+c) \approx 0,9$.

4e question

On se place dans un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$ de l'espace.
On note P le plan $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ et on considère les points :

$$A\left(1\,;\,2\,;\,\sqrt{5}\right),\ B\left(2\,;\,-1\,;\,\sqrt{5}\right),\ C(3\,;\,1\,;\,0),\ D\left(0\,;\,0\,;\,\sqrt{5}\right),\ S\left(\frac{1}{2}\,;\,-\frac{3}{2}\,;\,0\right) \text{ et } T\left(-\frac{1}{2}\,;\,\frac{3}{2}\,;\,0\right)$$

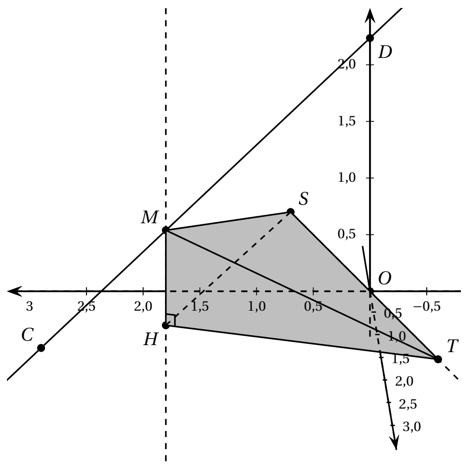
1. **a.** Déterminer une représentation paramétrique de la droite D, parallèle à la droite (AB), passant par O, l'origine du repère.

b. Montrer qu'il existe exactement deux points, appartenant à la droite D, situés à la distance $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ du point O. Vous préciserez les coordonnées de ces deux points.

c. Déterminer une équation cartésienne du plan Q, orthogonal à la droite (CD), et passant par le point O.

d. Montrer que la droite D est incluse dans le plan Q. On sait déjà que $O \in D$ et $O \in Q$.

2. Soit t un nombre réel appartenant à $[0;\,1]$ et M le point du segment $[CD]$ vérifiant l'égalité vectorielle :
$\overrightarrow{CM} = t\overrightarrow{CD}$.



a. Déterminer les coordonnées de M en fonction de t.

b. Montrer que le point $H(3-3t\,;\,1-t\,;\,0)$ est le projeté orthogonal de M sur le plan P (c'est-à-dire que $H \in P$ et $(MH) \perp P$).

c. Montrer que le triangle TSH est isocèle en H puis déterminer une expression de l'aire du triangle TSH en fonction de t.

d. En déduire que le volume $V(t)$ de la pyramide $TSMH$ peut s'écrire :

$$V(t) = \frac{5\sqrt{5}}{3}t(1-t).$$

e. Déterminer les coordonnées du point M_0 permettant d'obtenir la pyramide de volume maximal.

f. Calculer la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{M_0S} \cdot \overrightarrow{M_0T}$.

g. En déduire la valeur de $\cos\left(\widehat{SM_0T}\right)$ puis donner une valeur en degré, approchée à $0,1$ près, de l'angle géométrique $\widehat{SM_0T}$.

Nota :

1. *Aucun document n'est autorisé.*

2. *Délits de fraude : « Tout candidat pris en flagrant délit de fraude ou convaincu de tentative de fraude se verra attribuer la note zéro, éliminatoire, sans préjudice de l'application des sanctions prévues par les lois et règlements en vigueur réprimant les fraudes dans les examens et concours publics ».*